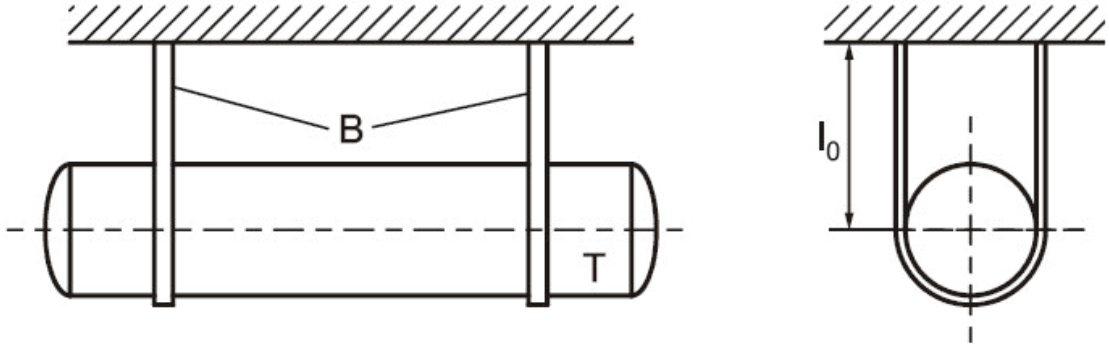
# Aufgabe 1:

Eine Reaktionstrommel T ist an zwei Stahlbändern B aus S260 aufgehängt (s. Skizze). Die Masse der leeren Trommel beträgt $m_T = 1600$ kg, die der gefüllten Trommel $m_{ges} = 3400$ kg. Die Stahlbänder haben den Querschnitt 20 mm x 3 mm.
**S260**: $R_e = 260$ MPa; $R_m = 420$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 22\%$




1. Wie groß ist die **Spannung** in den Bändern bei leerer und voller Trommel?

2. Wie groß ist die **Sicherheit** der Bänder gegen Versagen?

3. Um welchen Betrag senkt sich die Trommel beim Füllen, wenn die freie Länge der Bänder bei leerer Trommel $l_0 = 1{,}2$ m beträgt (s. Skizze)?

**Hinweise:**

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Sicherheitsanalyse, Festigkeitsbedingung

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0$$

1. Wie groß ist die **Spannung** in den Bändern bei leerer und voller Trommel?

Allgemein gilt für die Normalspannung: $\sigma = \frac{F}{A}$

zu beachten: $1g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$

$1\frac{kg \cdot m}{s^2} = 1N$

Berechnung der wirkenden Kräfte bei vollem und leerem Behälter:

$A = 4 \cdot 20 \cdot 3 = 240\,mm^2$

$F = m \cdot g$

$F_{voll} = 3400 \cdot 9{,}81 = 33354N$

$F_{leer} = 1600 \cdot 9{,}81 = 15696N$

$$\sigma_{voll} = \frac{F_{voll}}{A} = \frac{33354\ N}{240mm^2} = 139{,}0MPa$$

$$\sigma_{leer} = \frac{F_{leer}}{A} = \frac{15696\,N}{240mm^2} = 65{,}4MPa$$

2. Wie groß ist die **Sicherheit** der Bänder gegen Versagen?

Allgemeine Festigkeitsbedingung (FB): $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zul}$

Maximal **wirkende** Spannung:

$$\sigma = \sigma_{max} = \sigma_{voll} = 139{,}0\,MPa$$

Ermittlung der **zulässigen** Spannung:

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \text{ bzw. } \frac{R_m}{S_B}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma} = \frac{260\,MPa}{139{,}0\,MPa} = 1{,}87 \quad (>1{,}5)$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma} = \frac{420\,MPa}{139{,}0\,MPa} = 3{,}02 \quad (>2{,}0)$$

$R_e$ und $R_m$ aus Tabelle (Skript S. 52)

3. Um welchen Betrag senkt sich die Trommel beim Füllen, wenn die freie Länge der Bänder bei leerer Trommel $l_0 = 1{,}2$ m beträgt (s. Skizze)?

Hooke'sches Gesetz:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} = \frac{\sigma_{voll} - \sigma_{leer}}{E} = \frac{139{,}0\,MPa - 65{,}4\,MPa}{210000\,MPa} = 0{,}035\,\%$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 0{,}035\,\% \cdot 1200\,mm = 0{,}42mm$$

## Aufgabe 2:

1. Zeichnen Sie (soweit möglich maßstäblich) die **Spannungs-Dehnungs-Diagramme** von

   **S210:**
   ($R_e$ = 210 MPa, $R_m$ = 340 MPa, E = 210 000 MPa, $\mu$ = 0,3, $A_5$ = 28%, $A_{gt} \approx 2/3\, A_5$)

   und

   **EN-GJL-350 (GG35):**
   ($R_m$ = 350 MPa, E = 100 000 MPa, $\mu$ = 0,25).

2. Wie groß ist bei der erreichten Höchstlast die **elastische** und die **plastische Dehnung** für die beiden Werkstoffe?

**Hinweise:**

$\varepsilon_F, \varepsilon_{\sigma max}$

$\varepsilon_{\sigma max}$

$\varepsilon_{el}, \varepsilon_{pl}$

1. Zeichnen Sie (soweit möglich maßstäblich) die **Spannungs-Dehnungs-Diagramme** von **S210** ($R_m$ = 340 MPa, $R_e$ = 210 MPa, $A_5$ = 28%, $A_{gt} \approx 2/3\ A_5$, E = 210 000 MPa).

$$R_e = 210MPa$$

$$\varepsilon_F = \frac{R_e}{E} = \frac{210MPa}{210000MPa} = 0{,}001 = 0{,}1\%$$

$$R_m = 340MPa$$

$$A_{gt} = \varepsilon_{\sigma_{max}} \approx \frac{2}{3} \cdot A_5 = \frac{2}{3} \cdot 28\% = 18{,}7\%$$

$$A_5 = 28\%$$

1. Zeichnen Sie (soweit möglich maßstäblich) die **Spannungs-Dehnungs-Diagramme** von **EN-GJL-350 (GG35)** ($R_m$ = 350 MPa, E = 100 000 MPa).

$$R_m = 350\,MPa$$

$$\varepsilon_{\sigma_{max}} \approx \frac{R_m}{E} = \frac{350\,MPa}{100000\,MPa} = 0{,}0035 = 0{,}35\,\%$$

2. Wie groß ist bei der erreichten Höchstlast die **elastische** und die **plastische Dehnung** für die beiden Werkstoffe?

**S210** elastischer Anteil aus Zugfestigkeit:

$$\varepsilon_{el} = \frac{R_m}{E} = \frac{340\,MPa}{210000\,MPa} = 0{,}00162 = 0{,}162\%$$

plastischer Anteil aus Gesamtdehnung (totale Gleichmaßdehnung):

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{ges} - \varepsilon_{el} = 18{,}7\% - 0{,}162\% = 18{,}538\,\%$$

**EN-GJL-350** elastischer Anteil aus Zugfestigkeit:

$$\varepsilon_{el} = \frac{R_m}{E} = \frac{350\,MPa}{100000\,MPa} = 0{,}35\%$$

spröder Werkstoff,
daher nahezu kein plastischer Anteil:

$$\varepsilon_{pl} \approx 0$$

## Aufgabe 3:

Ein Stab mit Kreisquerschnitt aus dem Werkstoff C35 soll als Zuganker verwendet werden. Er hat eine statische Betriebskraft von F = 12500 N aufzunehmen.
**C35**: $R_e = 430$ MPa; $R_m = 630$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 19\%$

1. Mit welchem **Durchmesser** ist der Zuganker auszuführen?
2. Wie groß ist die auftretende **Dehnung**?
3. Bei welcher **Zugkraft** wäre mit einem Bruch zu rechnen?

**Hinweise:**

$R_e$, $R_m$ aus Anhang; Festigkeitsbedingung; Dimensionierung

Hooke'sches Gesetz

$$F_{max} = R_m \cdot A_0$$

1. Mit welchem **Durchmesser** ist der Zuganker auszuführen? (→ Dimensionierungsaufgabe)

Allgemeine Festigkeitsbedingung (FB): $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zul}$

**wirkende** Spannung:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2}$$

Rechnung gegen Fließen, da bei einem Zuganker keine bleibenden Verformungen auftreten dürfen:

**zulässige** Spannung:

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$$

mit $R_e$(C35) = 430 MPa *)
und $S_F$ = 1,5

*) aus Tabelle (Skript)

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot S_F}{\pi \cdot R_e}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12500\,N \cdot 1{,}5}{\pi \cdot 430\,MPa}} = 7{,}45\,mm$$

→ ausgeführt mit **d = mm**

2. Wie groß ist die auftretende **Dehnung**?

Einachsige Beanspruchung, Hooke'sches Gesetz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{A \cdot E} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2 \cdot E} = \frac{4 \cdot 12500\,\mathrm{N}}{\pi \cdot 7{,}5^2\,\mathrm{mm}^2 \cdot 210000\,\mathrm{MPa}} = 0{,}00135 = 0{,}135\%$$

3. Bei welcher **Zugkraft** wäre mit einem Bruch zu rechnen?

Berechnung der maximalen Kraft beim Erreichen der Zugfestigkeit $R_m$ *)
→ **ohne** Sicherheit!

$$F_{max} = R_m \cdot A_0 = R_m \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 630\,\mathrm{MPa} \cdot \frac{\pi \cdot 7{,}5^2\,\mathrm{mm}^2}{4} = 27832{,}5\,\mathrm{N} = 27{,}8\,\mathrm{kN}$$

*) aus Tabelle (Skript S. 52)

## Aufgabe 4:

An einem Baugerüst werden Rohre (Länge L = 4,20 m; Außendurchmesser D = 60 mm; Wanddicke s = 5 mm) aus S235 als Stützen verwendet, die statisch auf Druck beansprucht sind. Sie sind so eingebaut, dass beide Enden als fest eingespannt betrachtet werden können.

**S235**: $R_e$ = 235 MPa; $R_m$ = 400 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 26%

1. Wodurch könnte eine solche Stütze **versagen**?
2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?
3. Um welchen **Betrag** wird die Stütze dadurch **zusammengedrückt**?

**Hinweise:**

duktiler Werkstoff

Last-begrenzung

Definition von ε

1. Wodurch könnte eine solche Stütze **versagen**?

duktiler Werkstoff → Versagen möglich durch:

1) Fließen
2) Knicken

2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

## Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ [MPa] min. | $R_m$ [MPa] | $A_5$ [%] min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)** neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 – 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 – 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 – 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 – 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 – 630 | 22 |
| **Maschinenbaustähle (E)** | St 50 | E295 | 295 | 470 – 610 | 20 |
| | St 60 | E335 | 335 | 570 – 710 | 16 |
| | St 70 | E360 | 360 | 670 – 830 | 11 |

$R_e$ und $R_m$ sind dickenabhängig! siehe Anhang (Skript)

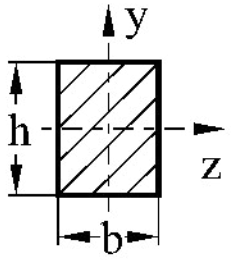
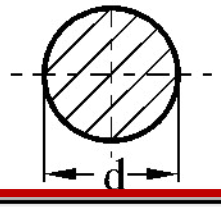
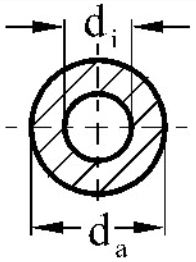
2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

## Sicherheitsbeiwerte aus Regelwerken für die jeweiligen Anwendungen

| Werkstoff | Versagensart | Maßgebender Werkstoff-kennwert (K) | Sicherheits-beiwert (S) | Typischer Sicherheits-beiwert |
|---|---|---|---|---|
| zäh | Fließen | $R_e$ ($R_{p0,2}$) | $S_F = 1,2 – 2$ | $S_F = 1,5$ |
| zäh | Bruch | $R_m$ | $S_B = 2 – 3$ | $S_B = 2$ |
| spröd | Bruch | $R_m$ | $S_B = 4 – 9$ | $S_B = 4$ |
| zäh/spröd | Knicken | $F_K$ | $S_K = 2,5 – 5$ | $S_K = 3,5$ |

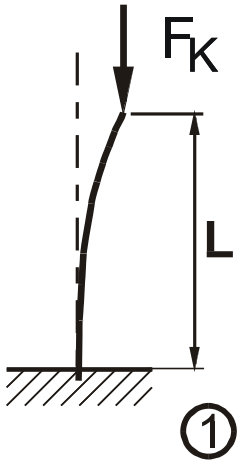
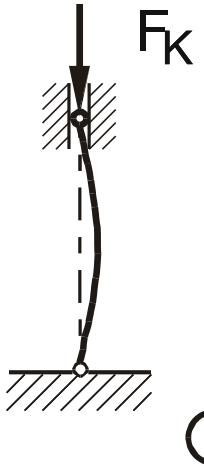
2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

## Axiale Trägheits- und Widerstandsmomente

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rechteckquerschnitt |  | $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ | $W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$ |
| Kreisquerschnitt |  | $I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$ | $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$ |
| Kreisringquerschnitt |  | $I = \frac{\pi}{64} \cdot \left(d_a^4 - d_i^4\right)$ | $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}\right)$ |

2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

## Knickfälle nach Euler

| Knickfall (nach Euler) |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
| **Knicklast $F_K$** | $\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ |

I: axiales Trägheitsmoment

2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

Allgemeine Festigkeitsbedingung (FB): $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zul}$

**wirkende** Spannung:

$$\sigma = -\frac{F}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \qquad \text{mit} \quad d = D - 2 \cdot s = 50\,mm$$

$$A = \frac{\pi}{4}(60^2 - 50^2) = 863{,}9\,mm^2$$

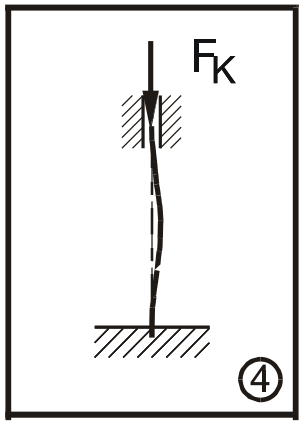
**Rechnung gegen Fließen:**

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} = -\frac{R_e}{S_F} = -\frac{235\ MPa}{1{,}5} = -156{,}7\ MPa$$

FB: $-\frac{F_{max\,F}}{A} = \sigma_{zul}$ ➡

$$F_{max\,F} = -A \cdot \sigma_{zul} = -863{,}9\,mm^2 \cdot (-156{,}7\,MPa) = 135\,kN$$

2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?




Allgemeine Festigkeitsbedingung (FB): $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zul}$

**wirkende** Spannung:

$$\sigma = -\frac{F}{A}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \qquad \text{mit} \quad d = D - 2 \cdot s = 50\,mm$$

$$A = \frac{\pi}{4}(60^2 - 50^2) = 863{,}9\,mm^2$$

**Rechnung gegen Knicken:**

$$\sigma_{K,zul} = -\frac{F_K}{A \cdot S_K} \qquad F_K = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad \text{(Eulerfall 4)} \qquad I = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4)$$

FB: $+\frac{F_{max\,K}}{A} = +\frac{F_K}{A \cdot S_K}$ ⇒

$$F_{max\,K} = \frac{F_K}{S_K} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2 \cdot S_K} = 44229\,N = 44{,}2\,kN$$

mit $S_K = 3{,}5$

2. Wie groß ist die **zulässige Druckbelastung** einer Stütze?

Zulässige Druckbelastung bei Fließen: $F_{max\,F} = 135kN$

Zulässige Druckbelastung bei Knicken: $F_{max\,K} = 44{,}2kN$

$F_{zul} = 44{,}2kN$

3. Um welchen **Betrag** wird die Stütze dadurch **zusammengedrückt**?

$F_{zul} = 44{,}2\,kN$ $\qquad$ $E = 210000\,MPa$

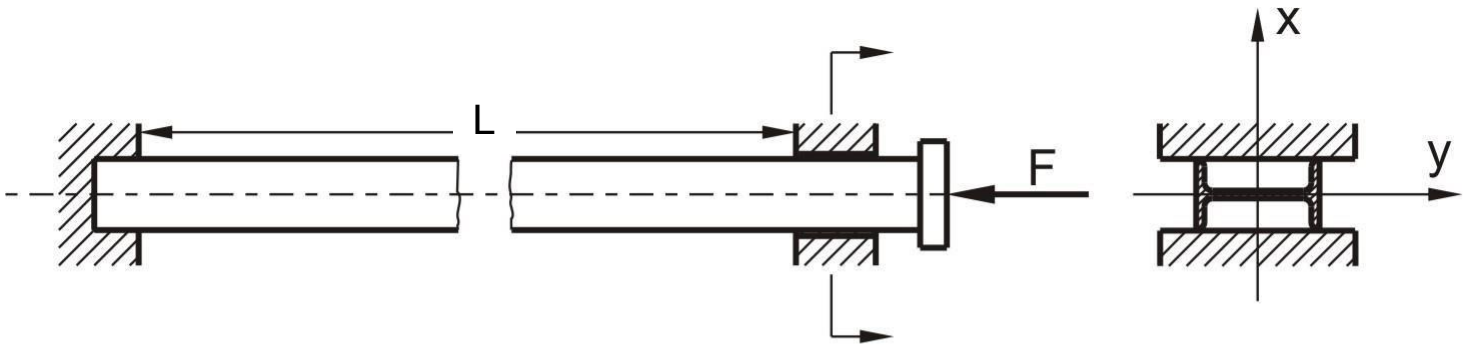
$L_0 = 4200\,mm$ $\qquad$ $A = 863{,}9\,mm^2$

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0 = \frac{\sigma}{E} \cdot L_0 = \frac{-F \cdot L_0}{A \cdot E} = \frac{-44200\,N \cdot 4200\,mm}{863{,}9\,mm^2 \cdot 210000\,MPa} = -1{,}02\,mm$$

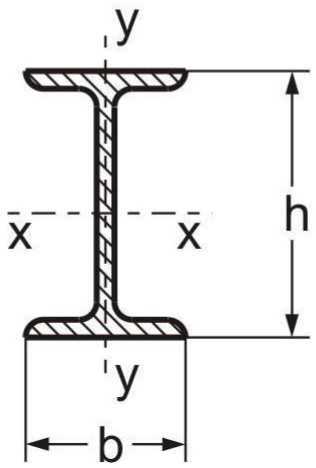
# Aufgabe 5:

Ein Träger aus E295 mit dem Profil I 100 und der freien Länge L = 2,05 m ist durch die Druckkraft F = 92 kN belastet. Die Einspannbedingungen sind aus der Skizze ersichtlich. Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

**E295**: $R_e$ = 295 MPa; $R_m$ = 540 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 20%




Profil I 100
DIN 1025




h = 100 mm b = 50 mm A = 10,6 $cm^2$
$I_x$ = 171 $cm^4$
$I_y$ = 12,2 $cm^4$

**Hinweise:**

- Versagens-arten
- Knick-richtungen
- Festigkeits-bedingung (FB)
- Sicherheits-analyse

Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

## Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ [MPa] min. | $R_m$ [MPa] | $A_5$ [%] min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)** neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 – 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 – 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 – 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 – 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 – 630 | 22 |
| **Maschinenbaustähle (E)** | St 50 | E295 | 295 | 470 – 610 | 20 |
| | St 60 | E335 | 335 | 570 – 710 | 16 |
| | St 70 | E360 | 360 | 670 – 830 | 11 |

$R_e$ und $R_m$ sind dickenabhängig! siehe Anhang (Skript)

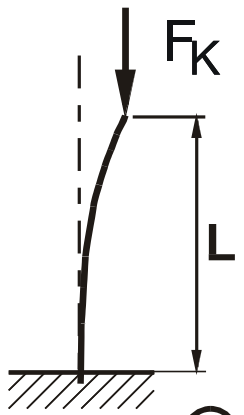
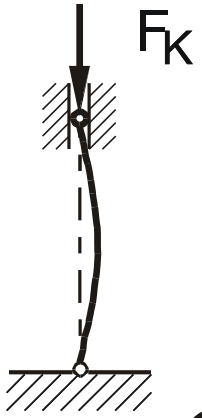
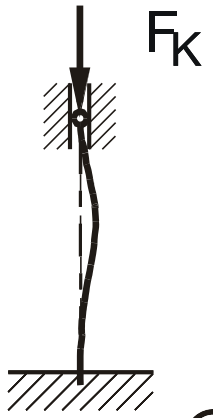
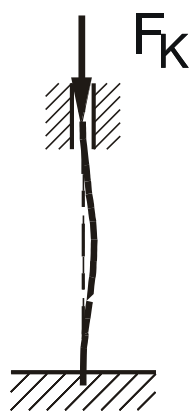
Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

## Sicherheitsbeiwerte aus Regelwerken für die jeweiligen Anwendungen

| Werkstoff | Versagensart | Maßgebender Werkstoff-kennwert (K) | Sicherheits-beiwert (S) | Typischer Sicherheits-beiwert |
|---|---|---|---|---|
| zäh | Fließen | $R_e$ ($R_{p0,2}$) | $S_F = 1,2 – 2$ | $S_F = 1,5$ |
| zäh | Bruch | $R_m$ | $S_B = 2 – 3$ | $S_B = 2$ |
| spröd | Bruch | $R_m$ | $S_B = 4 – 9$ | $S_B = 4$ |
| zäh/spröd | Knicken | $F_K$ | $S_K = 2,5 – 5$ | $S_K = 3,5$ |

Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

## Knickfälle nach Euler

| Knickfall (nach Euler) | ①   | ②   | ③   | ④   |
|---|---|---|---|---|
| **Knicklast $F_K$** | $\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ | $4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ |

I: axiales Trägheitsmoment

Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

Versagensmöglichkeiten: 1)
2)

Allgemeine Festigkeitsbedingung (FB): $\sigma_{wirkend} \leq \sigma_{zul}$

**Rechnung gegen Fließen:**

wirkende Spannung: $\sigma = \sigma_{wirk} = -\frac{F}{A} = -\frac{92 \cdot 10^3\,N}{10{,}6 \cdot 10^2\,mm^2} = -86{,}8MPa$

$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F}$ mit $\sigma_{dF} = -R_e = -295MPa$

$S_F = \frac{\sigma_{dF}}{\sigma} = \frac{+295MPa}{+86{,}8MPa} = 3{,}4$

Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

Versagensmöglichkeiten: 1)
2)

**Rechnung gegen Knicken:**

$$\sigma_{K,zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \qquad \text{mit} \quad \sigma_K = -\frac{F_K}{A}$$

$$\text{FB:} \quad -\frac{F}{A} = -\frac{F_K}{A \cdot S_K} \quad \Rightarrow \quad S_K = \frac{F_K}{F}$$

⇒ Fallunterscheidung

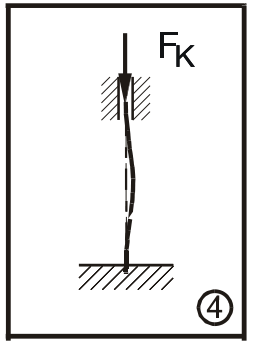
Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**? Ist sie ausreichend?

Fallunterscheidung

**1) Ausknicken in x-Richtung: Euler-Fall 4 ($I = I_y$)**

$$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_y}{L^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 210000 \cdot 12{,}2 \cdot 10^4}{2050^2} = 240{,}675\,\text{kN}$$

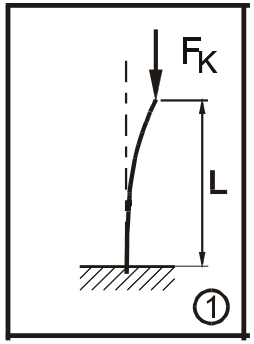
$$S_K = \frac{F_K}{F} = \frac{240{,}675}{92} = 2{,}6 \; (> 2{,}5 = S_{K,\min})$$



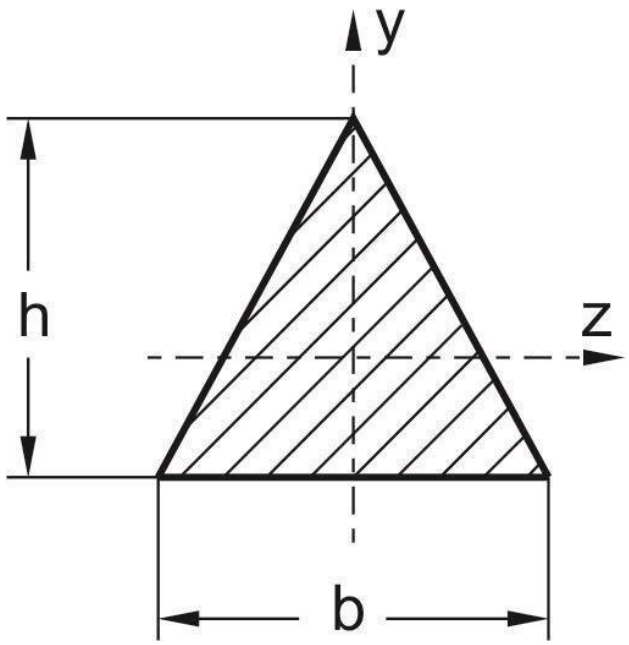

**2) Ausknicken in y-Richtung: Euler-Fall 1 ($I = I_x$)**

$$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I_x}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000 \cdot 171 \cdot 10^4}{4 \cdot 2050^2} = 210{,}837\,\text{kN}$$

$$S_K = \frac{F_K}{F} = \frac{210{,}837}{92} = 2{,}3 \qquad (S_K = 2{,}5 \div 5{,}0)$$



# Aufgabe 6:




1. Man **berechne** das **axiale Trägheitsmoment $I_z$** und das **Widerstandsmoment $W_{bz}$** eines Trägers, dessen Querschnitt ein ***gleichschenkliges Dreieck*** mit der ***Höhe h*** und der ***Breite b*** ist (siehe Skizze).
2. Wie groß sind $I_z$ und $W_{bz}$ für ein ***gleichseitiges Dreieck*** mit der **Kantenlänge b**?

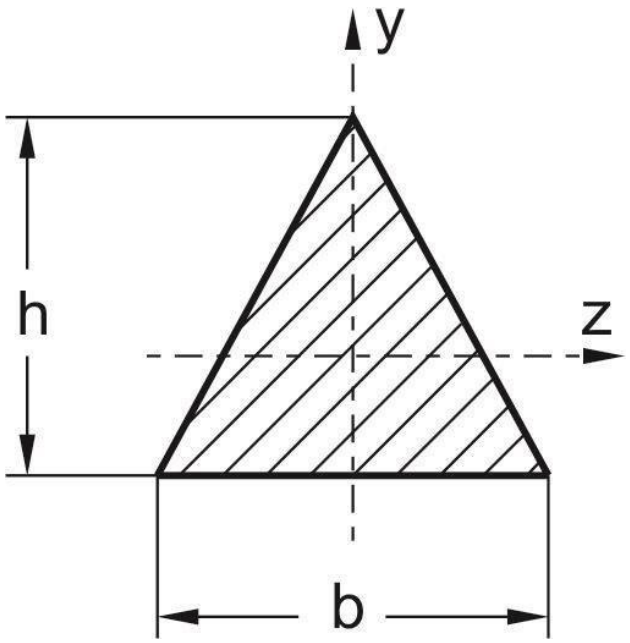
**Hinweise:**

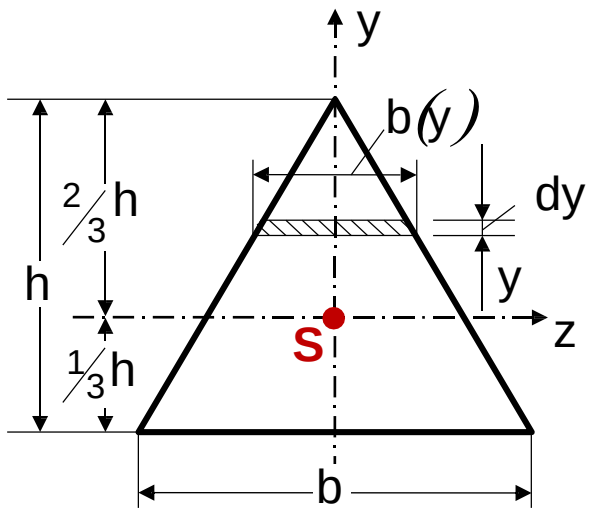
Strahlensatz

Schwerpunkt bei y = 1/3 h

$$I_z = \int_A y^2 \, dA$$

1. Man berechne das **axiale Trägheitsmoment $I_z$** und das **Widerstandsmoment $W_{bz}$** eines Trägers, dessen Querschnitt ein ***gleichschenkliges Dreieck*** mit der ***Höhe h*** und der ***Breite b*** ist (siehe Skizze).




$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma_x \, dA = 0$$

$$\rightarrow \frac{E}{R} \int_A y \, dA = 0$$

z-Achse muss durch den ***Schwerpunkt S*** gehen, der auf der y-Achse um 1/3 h über der Grundseite b liegt.

**Strahlensatz:**

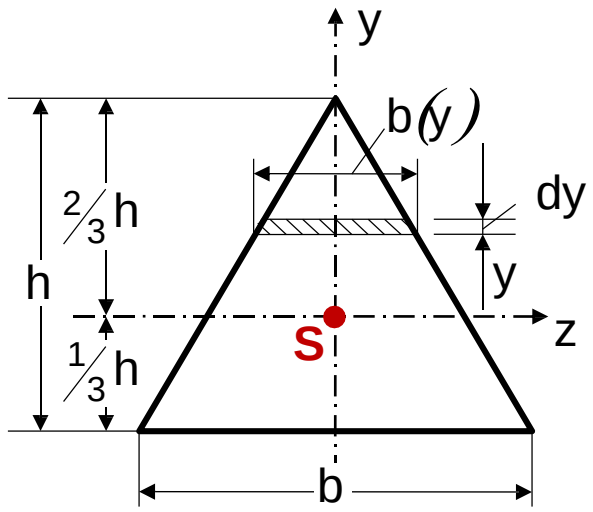
$$\frac{b(y)/2}{b/2} = \frac{\frac{2}{3}h - y}{h}$$

$$\Rightarrow \quad b(y) = b \cdot \frac{\frac{2}{3}h - y}{h} = b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)$$

$$I_z = \int_A y^2 \, dA; \qquad dA = b(y)\,dy$$

1. Man berechne das **axiale Trägheitsmoment $I_z$** und das **Widerstandsmoment $W_{bz}$** eines Trägers, dessen Querschnitt ein ***gleichschenkliges Dreieck*** mit der ***Höhe h*** und der ***Breite b*** ist (siehe Skizze).

$$I_z = \int_A y^2\,dA; \quad dA = b(y)\,dy \quad \text{mit} \quad b(y) = b\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)$$




$$I_z = \int_{y=-h/3}^{2h/3} y^2 \cdot b\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h}\right)dy = b\cdot\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{y^3}{h}\right)dy$$

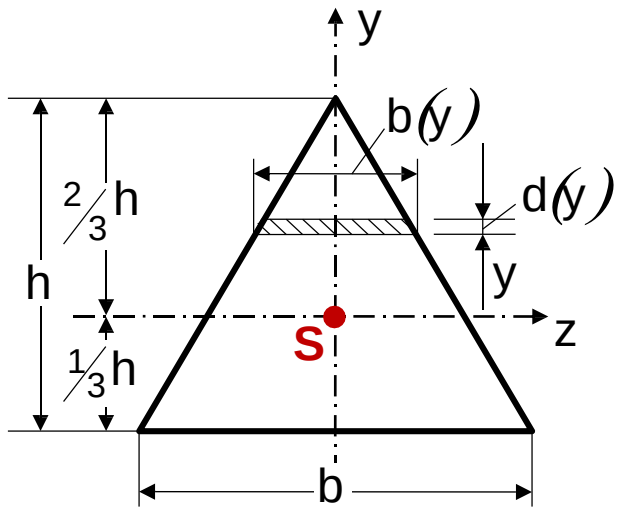
$$= b\cdot\left\{\left[\frac{2}{3}\frac{y^3}{3}\right]_{-h/3}^{2h/3} - \left[\frac{1}{h}\frac{y^4}{4}\right]_{-h/3}^{2h/3}\right\}$$

$$= b\cdot\left\{\frac{2}{9}\underbrace{\left[\frac{8}{27}h^3 + \frac{1}{27}h^3\right]}_{=h^3/3} - \frac{1}{4h}\underbrace{\left[\frac{16}{81}h^4 - \frac{1}{81}h^4\right]}_{=5h^3/27}\right\} = bh^3\cdot\left(\frac{2}{27} - \frac{5}{108}\right) = bh^3\cdot\frac{8-5}{108}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

Einfacher mit dem Steinerschen Satz

1. Man berechne das **axiale Trägheitsmoment $I_z$** und das **Widerstandsmoment $W_{bz}$** eines Trägers, dessen Querschnitt ein ***gleichschenkliges Dreieck*** mit der ***Höhe h*** und der ***Breite b*** ist (siehe Skizze).

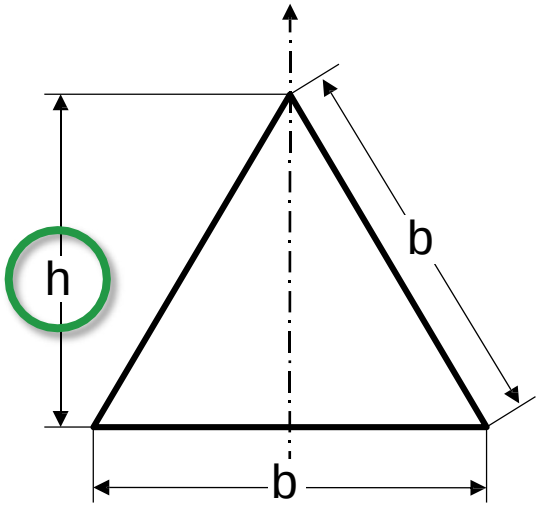



$$I_z = \frac{bh^3}{36}$$

$$W_{bz} = \frac{I_z}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^3 \cdot 3}{36 \cdot 2h}$$

$$\Rightarrow \quad W_{bz} = \frac{bh^2}{24}$$

2. Wie groß sind $\mathbf{I_z}$ und $\mathbf{W_{bz}}$ für ein ***gleichseitiges Dreieck*** mit der **Kantenlänge b**?




axiales Trägheitsmoment: $I_z = \frac{bh^3}{36}$

Widerstandsmoment: $W_{bz} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{I_z}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24}$

gleichseitiges Dreieck: $h = \frac{b}{2}\sqrt{3}$

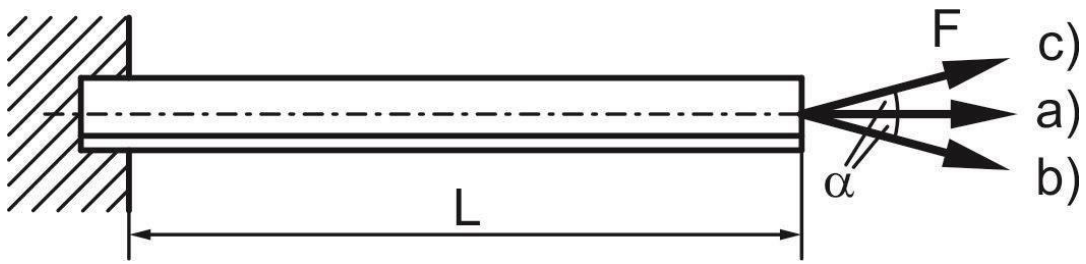
eingesetzt ergibt sich:

$$I_z = \frac{b \cdot b^3 \cdot 3\sqrt{3}}{36 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{96} b^4 = 0{,}0180 \cdot b^4$$

$$W_{bz} = \frac{b \cdot b^2 \cdot 3}{24 \cdot 4} = \frac{b^3}{32} = 0{,}03125 \cdot b^3$$

# Aufgabe 7:

Ein hochstegiger T-Träger (Profil T50) aus dem Stahl S210 mit der Länge L = 350 mm ist an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft F belastet, deren Richtung sich im Winkelbereich $\alpha = \pm 10°$ gegen die Achsrichtung ändern kann (siehe Skizze).



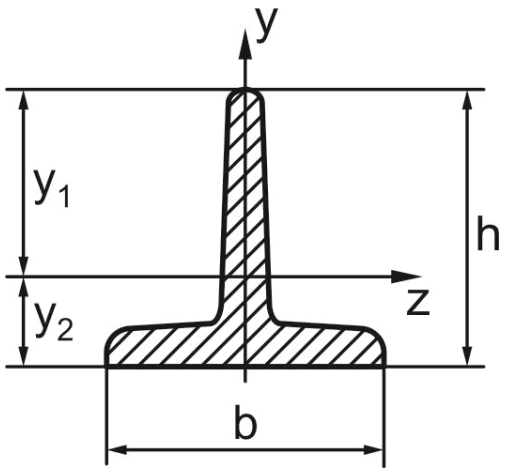

Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für

a) $\alpha = 0°$

$\beta$) $\alpha$ = -10° (nach unten)

$\chi$) $\alpha$ = +10° (nach oben)

**S210:**
$R_e$ = 210 MPa; $R_m$ = 340 MPa
E = 210000 MPa, μ = 0,3;
$A_5$ = 28 %



Profil T50 (DIN EN 10055)

$b = h = 50\,mm$

$A = 5{,}66\,cm^2$

$y_1 = 36{,}1mm$

$y_2 = 13{,}9\,mm$

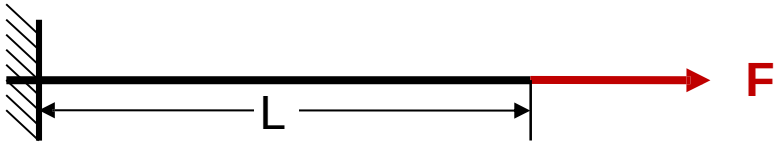
$I_z = 12{,}1cm^4$

$W_{bz} = 3{,}36\,cm^3$

**Hinweise:**

Fließbeginn:
$\sigma_{max} = R_e$

a) Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für $\alpha = 0°$



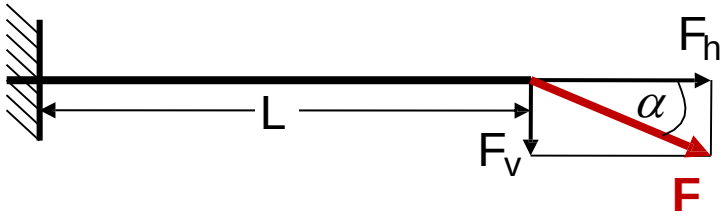

α = 0°

Fließbeginn bei: $\sigma_{max} = R_e$

$$\sigma_{max} = \sigma = \frac{F}{A}$$

$$F_F(\alpha = 0°) = R_e \cdot A = 210\,MPa \cdot 5{,}66\,cm^2 = 118{,}86\,kN$$

b) Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für $\alpha$ **= -10° (nach unten)**




**Aufteilung der Kraft F:**

$F_h \rightarrow$ Zug

$F_v \rightarrow$ Biegung

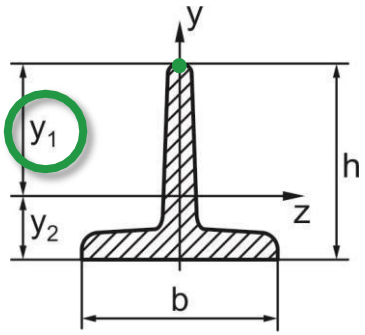
Fließbeginn bei: $\sigma_{max} = R_e$

**Lineares Superpositionsprinzip anwendbar:**

**Oberseite:** $\sigma_{ges} = \sigma_z + \sigma_b(y)$

$$\sigma_{max,o} = \sigma_{z,max} + \sigma_{b,max}$$

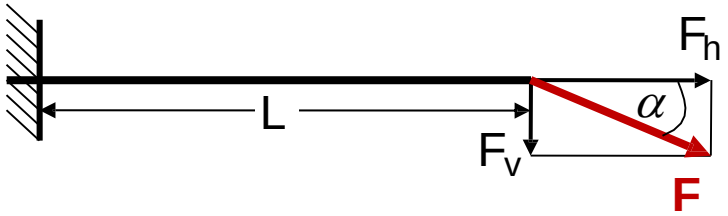
$$\sigma_{max,o} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{A} + \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot L}{I_z} \cdot y_1$$




mit $\sigma_{b,max} = \frac{M_{bmax}}{I_z} \cdot y_1 = \left(\frac{M_{bmax}}{W_{bz}}\right)$

$F_F(\alpha = -10°) = 10{,}6\,kN$

b) Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für $\alpha$ **= -10° (nach unten)**




**Aufteilung der Kraft F:**

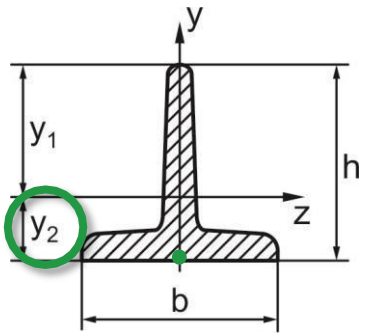
$F_h \rightarrow$ Zug

$F_v \rightarrow$ Biegung

Fließbeginn bei: $\sigma_{max} = R_e$

Lineares Superpositionsprinzip anwendbar:

**Unterseite:** $\sigma_{ges} = \sigma_z + \sigma_b(y)$



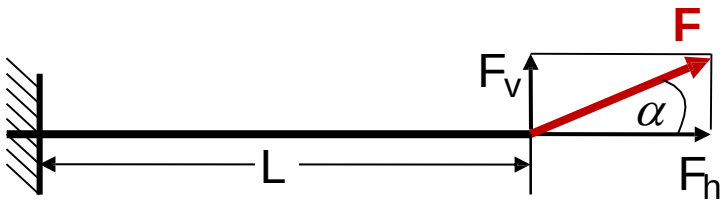

$$\sigma_{max,u} = \sigma_{z,max} - \sigma_{b,max}$$

mit $\sigma_{b,max} = \frac{M_{bmax}}{I_z} \cdot y_2 = \left(\frac{M_{bmax}}{W_{bz}}\right)$

$$\sigma_{max,u} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{A} - \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot L}{I_z} \cdot y_2$$

$$F_F(\alpha = -10°) = 40{,}1\,kN$$

c) Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für $\alpha$ = **+10° (nach oben)**




**Aufteilung der Kraft F:**

$F_h \rightarrow$ Zug

$F_v \rightarrow$ Biegung

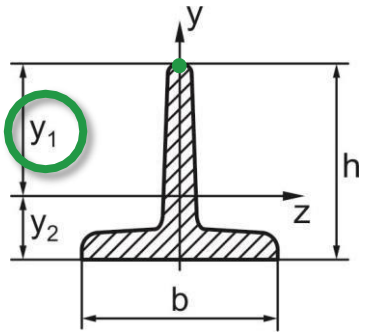
Fließbeginn bei: $\sigma_{max} = R_e$

**Lineares Superpositionsprinzip anwendbar:**

$$\sigma_{max,o} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{A} - \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot L}{I_z} \cdot y_1$$

**Oberseite:** $\sigma_{ges} = \sigma_z + \sigma_b(y)$

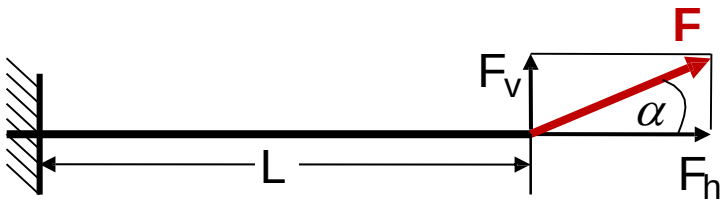
$\sigma_{max,o} = \sigma_{z,max} - \sigma_{b,max}$




mit $\sigma_{b,max} = \frac{M_{bmax}}{I_z} \cdot y_1 = \left(\frac{M_{bmax}}{W_{bz}}\right)$

$F_F(\alpha = +10°) = 12{,}8\text{kN}$

c) Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für $\alpha$ **= +10° (nach oben)**




**Aufteilung der Kraft F:**

$F_h \rightarrow$ Zug

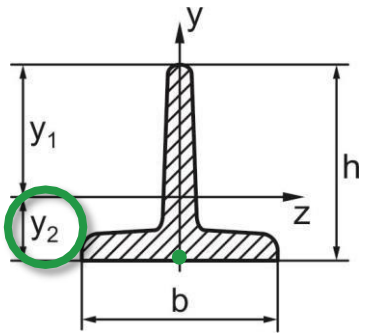
$F_v \rightarrow$ Biegung

Fließbeginn bei: $\sigma_{max} = R_e$

Lineares Superpositionsprinzip anwendbar:

$$\sigma_{max,u} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{A} + \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot L}{I_z} \cdot y_2$$

**Unterseite:** $\sigma_{ges} =$




$$\sigma_{max,u} = \sigma_{z,max} + \sigma_{b,max}$$

mit $\sigma_{b,max} = \frac{M_{bmax}}{I_z} \cdot y_2 = \left(\frac{M_{bmax}}{W_{bz}}\right)$

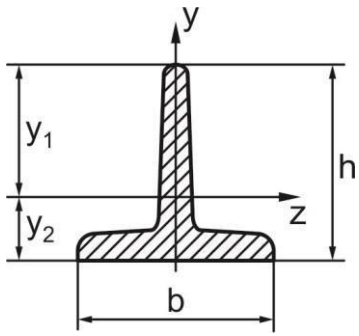
$F_F(\alpha = +10°) = 24{,}1\,kN$

Bestimmen Sie die Kraft, bei der am Träger plastische Verformungen einsetzen, für

α = 0°




$F_F(\alpha = 0°) = 118{,}9\,kN$



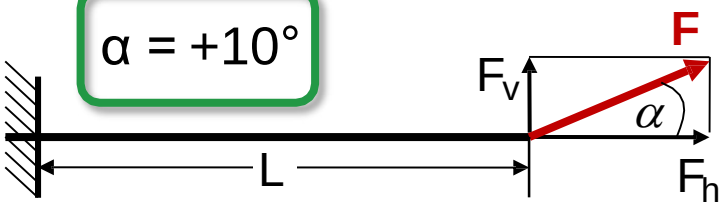

α = -10°




oben: $F_F(\alpha = -10°) = 10{,}6\,kN$ → **Fließbeginn**

unten: $F_F(\alpha = -10°) = 40{,}1\,kN$

α = +10°




oben: $F_F(\alpha = +10°) = 12{,}8\,kN$ → **Fließbeginn**

unten: $F_F(\alpha = +10°) = 24{,}1\,kN$

# Aufgabe 8:

Ein Rohr (Länge L = 2000 mm; Außendurchmesser $d_a$ = 100 mm, Wanddicke s = 5 mm), das an beiden Enden gelenkig gelagert ist, wird in der Mitte durch die Kraft F belastet (siehe Skizze). Auf welchen Betrag ist die maximale Durchbiegung f zu begrenzen, wenn als Rohrwerkstoff

**1.** **EN-GJS 400** oder **2.** **S260**

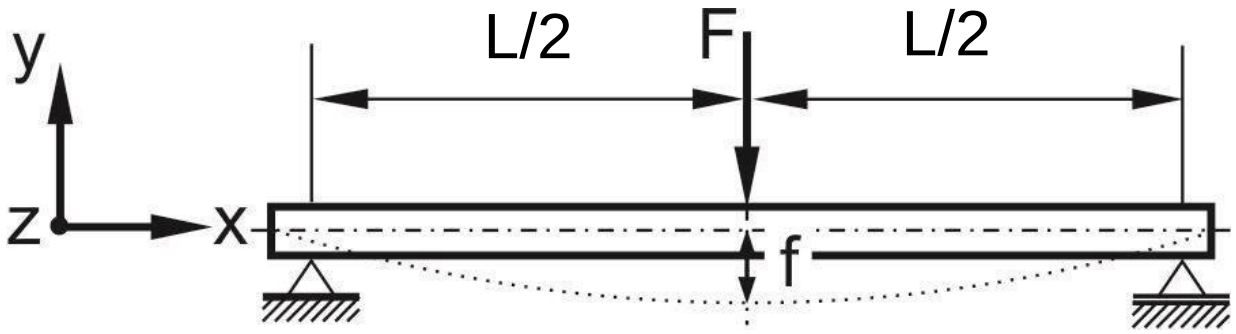
gewählt wird?

**EN-GJL-400:** $R_m$ = 400 MPa; E = 110000 MPa; $\sigma_{b,B}$ = 600 MPa

**S260:** $R_e$ = 260 MPa; $R_m$ = 420 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 22%;

$\sigma_{b,F}$ = 260 MPa; $\sigma_{b,B}$ = 420 MPa

Hinweis : $f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_z}$



## Weitere Lösungshinweise zu Aufgabe 8:

Belastung: Biegung

FB: $\begin{cases} \sigma \le \sigma_{zul} \\ \sigma_{bmax} \le \sigma_{zul} \end{cases}$ mit $\sigma_{bmax} = \frac{M_{b,max}}{W_b}$

$$f_{zul} = \frac{\sigma_{zul} \cdot L^2}{6 \cdot E \cdot d_a}$$

EN – GJL – 400: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{b,B}}{S_B}$

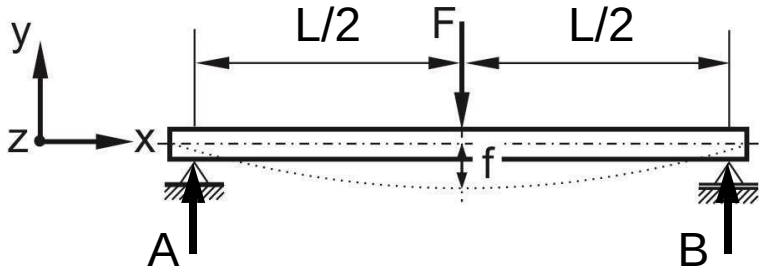
S260: $\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{b,F}}{S_F}$

# Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ [MPa] min. | $R_m$ [MPa] | $A_5$ [%] min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)** neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 – 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 – 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 – 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 – 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 – 630 | 22 |

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu | $R_m$ [MPa] | $\sigma_{bB}$ [MPa] | $\sigma_{dB}$ [MPa] |
|---|---|---|---|---|---|
| **Gusseisen mit lamellarem Graphit** DIN 1691 (bleibt erhalten) | GG-25 | GG25 (EN-GJL-250) | 210 – 330 | 390 – 460 | 700 – 1000 |
| | GG-30 | GG30 (EN-GJL-300) | 260 – 330 | 450 – 480 | 850 – 1200 |
| | GG-35 | GG35 (EN-GJL-350) | 310 – 380 | 510 – 540 | 950 – 1400 |
| | GG-40 | GG40 (EN-GJL-400) | 360 – 400 | 570 – 600 | 1100 – 1400 |

Allgemein gilt: $f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$ ➡ $F = \frac{48 \cdot E \cdot I \cdot f}{L^3}$




## Kräftegleichgewicht / Biegemoment:

$A + B = F$ mit $A = B$ ➡ $A = F/2 = B$

$M_b(x) = \frac{F}{2} \cdot x$ ➡ $M_{b,max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{F \cdot L}{4}$

## Festigkeitsbedingung:

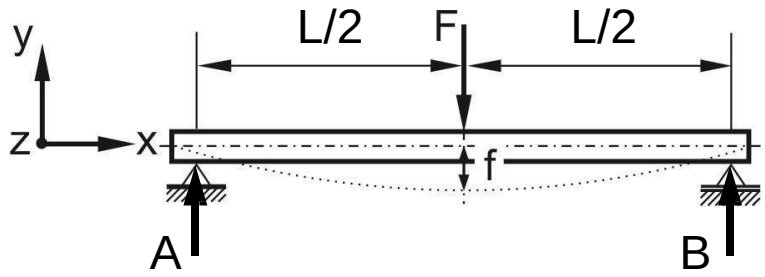
$$\begin{cases} \sigma \le \sigma_{zul} \\ \sigma_{b,max} \le \sigma_{zul} \end{cases}$$

mit $\sigma_{b,max} = \frac{M_{b,max}}{W_b}$

und $W_b = \frac{I}{y_{max}} = \frac{I}{D/2}$

➡

## Zulässige Durchbiegung f:




## EN-GJL-400:

$$\sigma_{b,max} \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{bB}}{S_B} = \frac{600MPa}{4} = 150MPa$$

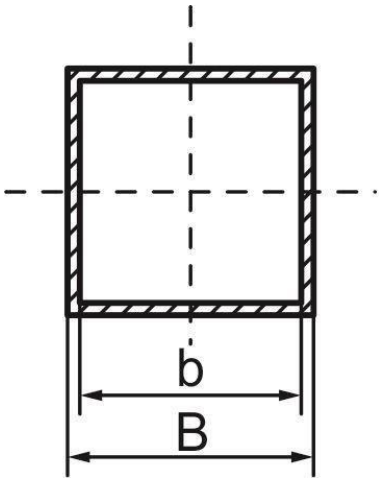
## S260:

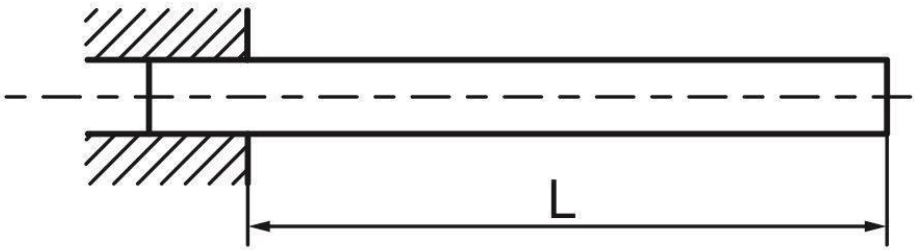
$$\sigma_{b,max} \leq \sigma_{zul} = \min\left\{\begin{array}{l} \frac{\sigma_{bF}}{S_F} = \frac{260MPa}{1{,}5} = 173{,}3MPa \\ \frac{\sigma_{bB}}{S_B} = \frac{420MPa}{2} = 210MPa \end{array}\right\} = 173{,}3MPa$$

# Aufgabe 9:

Ein Kastenträger aus S355 mit quadratischem Querschnitt wird beim Bau einer Brücke freitragend vorgeschoben (siehe Skizze).

**S355:** $R_e$ = 355 MPa; $R_m$ = 520 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 22%;




B = 200 mm
b = 180 mm
$I = (B^4-b^4)/12$

Wie groß ist die freie Länge L, bei der infolge des Eigengewichtes die ersten bleibenden Verformungen auftreten, wenn die Masse des Trägers 59,3 kg/m beträgt?

## Lösungshinweise zu Aufgabe 9:

Aufgabe: Dimensionierung (Bestimmen der Länge L)

Belastungen: Biegung; Versagen: Fließen

Versagensbedingung:

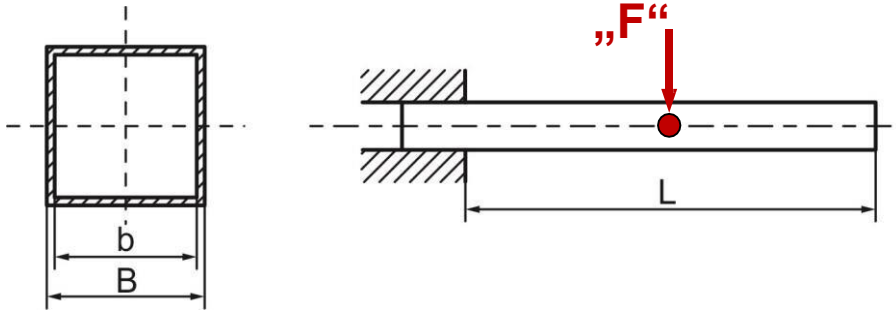
$$M_{b,max} = F \cdot \frac{L}{2} \qquad W_b = I / \frac{B}{2}$$

$$\text{mit } I = \frac{1}{12} \cdot (B^4 - b^4)$$

## Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ [MPa] min. | $R_m$ [MPa] | $A_5$ [%] min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)**<br>neu: DIN EN 10027<br>alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 – 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 – 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 – 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 – 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 – 630 | 22 |

Gesucht: L (Dimensionierungsaufgabe)




## Versagensbedingung (VB):

$$\sigma_{b,max} = \frac{M_{b,max}}{W_b}$$

$$M_{b,max} = F \cdot \frac{L}{2} = \frac{m \cdot g \cdot L}{2}$$

$$W_b = \frac{I}{B/2} = \frac{458{,}53 \cdot 10^5 \cdot 2}{200}$$

$$W_b = 458{,}53 \cdot 10^3\ mm^3$$

$$I = \frac{1}{12}\left(B^4 - b^4\right) = \frac{200^4 - 180^4}{12}\ mm^4$$

$$= 458{,}53 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$\text{Masse: } m = 59{,}3\ \frac{kg}{m} = 59{,}3 \cdot 10^{-3}\ \frac{kg}{mm}$$

$$F = m \cdot g \cdot L\ ; \quad g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

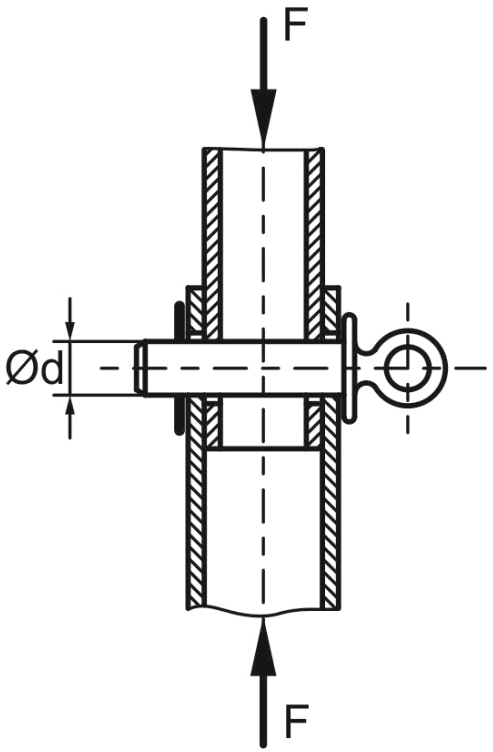
## VB:

$$L = \sqrt{\frac{2 \cdot W_b \cdot R_e}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 458{,}53 \cdot 10^3\ mm^3 \cdot 355 MPa}{59{,}3 \cdot 10^{-3}\ kg/mm \cdot 9{,}81 m/s^2}} = 23{,}66 \cdot 10^3\ mm = 23{,}66 m$$

# Aufgabe 10:

Zur Verlängerung von druckbeanspruchten Rohrstützen sollen Bolzen aus dem Stahl C22 mit d = 15 mm Durchmesser verwendet werden (siehe Skizze).

**S260:** $R_e$ = 360 MPa; $R_m$ = 610 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 22%;




Ist die Sicherheit gegen Abscheren der Bolzen ausreichend, wenn die Druckkraft auf die Stützen F = 55 kN beträgt?

# Lösungshinweise zu Aufgabe 10:

Hier: Nur Betrachtung der Abscherung (Schub)

Gefragt: Sicherheitsanalyse, Rechnung nur gegen Bruch

FB: $\tau \leq \tau_{zul}$

$$\text{mit } \tau = \frac{F}{2A}$$

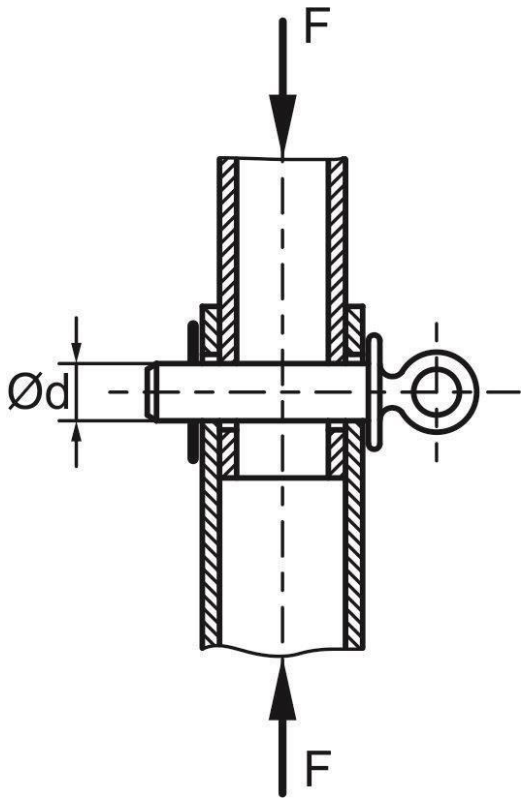
$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{a,B}}{S_B}$$

## Lösungshinweise zu Aufgabe 10:

Hier: nur Betrachtung der Abscherung (Schub)

Gefragt: Sicherheitsanalyse, Rechnung nur gegen Bruch

FB: $\tau \leq \tau_{zul}$




$$\text{mit } \tau = \frac{F}{2A}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{aB}}{S_B}$$

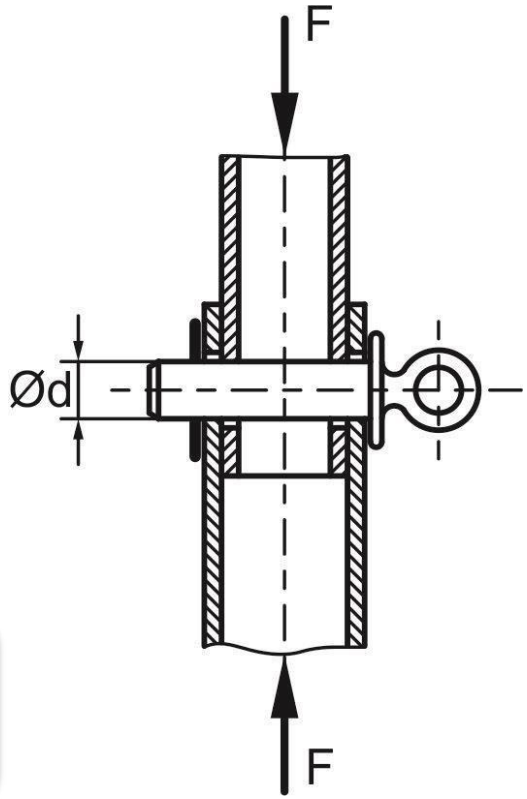
## Festigkeitsbedingung (FB):

$$\tau \leq \tau_{zul}$$

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{F \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{55000N \cdot 2}{\pi \cdot 15^2 mm^2} = 155{,}6MPa$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{aB}}{S_B} \approx \frac{0{,}7 \cdot R_m}{S_B} = \frac{0{,}7 \cdot 610MPa}{S_B}$$

$$\Rightarrow \quad S_B = \frac{0{,}7 \cdot R_m}{\tau_{zul}} = \frac{0{,}7 \cdot R_m}{\tau} = \frac{0{,}7 \cdot 610MPa}{155{,}6MPa} = 2{,}74 \quad > 2$$

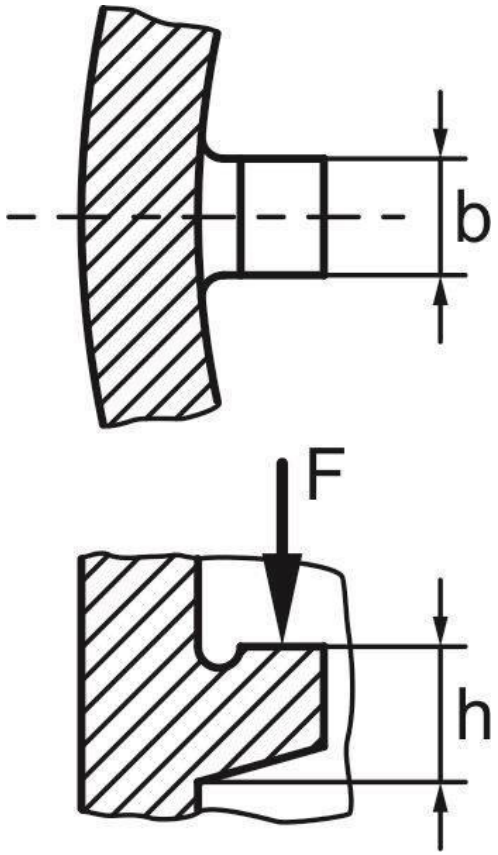


# Aufgabe 11:

An der Innenoberfläche eines zylindrischen Reaktionsgefäßes aus X12CrNi18-8 sind zur Auflage eines Zwischenbodens drei um 120° gegeneinander versetzte Nocken von je 80 mm Breite angegossen (siehe Skizze).

Wie groß muss die Höhe h mindestens sein, wenn mit einer Auflagekraft bis zu 2000 kN zu rechnen ist und eine Sicherheit von S = 2,5 verlangt wird?

**X12CrNi18-8:** $R_{p0,2}$ = 220 MPa; $R_m$ = 500 MPa
E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 50%



# Lösungshinweise zu Aufgabe 11:

Versagensmöglichkeit: Abscheren (Durch Schubbeanspruchung)

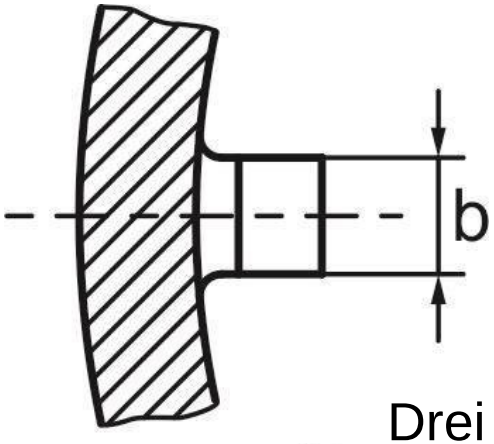
Notwendig: Dimensionierung von h

FB: $\tau \leq \tau_{zul}$

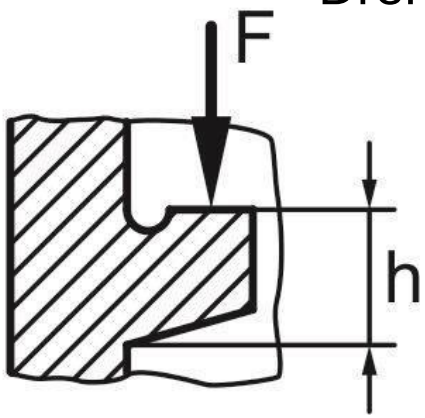
$$\text{mit } \tau = \frac{F}{A}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{a,B}}{S_B}$$

Versagensart: Abscheren




Drei Nocken




**Festigkeitsbedingung (FB):**

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{3 \cdot b \cdot h}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{a,B}}{S_B} \approx \frac{0{,}7 \cdot R_m}{S_B}$$

$$h \geq \frac{F \cdot S_B}{3 \cdot b \cdot 0{,}7 \cdot R_m} = \frac{2000000\,\text{N} \cdot 2{,}5}{3 \cdot 80\,\text{mm} \cdot 0{,}7 \cdot 500\,\text{MPa}} = 59{,}5\,\text{mm}$$

# Aufgabe 12:

Ein Rohr aus S355 mit dem Außendurchmesser $d_a = 40$ mm und der Wanddicke $s = 5$ mm ist durch ein Moment $M_t$ auf Torsion beansprucht.

**S355:** $R_e = 360$ MPa; $R_m = 520$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 22\%$

1. Skizzieren Sie den **Spannungsverlauf über dem Querschnitt**.
2. Wie groß ist das **maximal zulässige Torsionsmoment**?
3. Wie groß ist hierfür die **maximale Schubspannung** und die **zugehörige Schiebung**?

# Lösungshinweise zu Aufgabe 12:

FB: $\tau_{max} \leq \tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F}$ (Fließen) $\tau_{max} \leq \tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$ (Bruch)

Ermittlung des zulässigen Torsionsmomentes:

$$M_{t,zul} = W_t \cdot \tau_{zul}$$

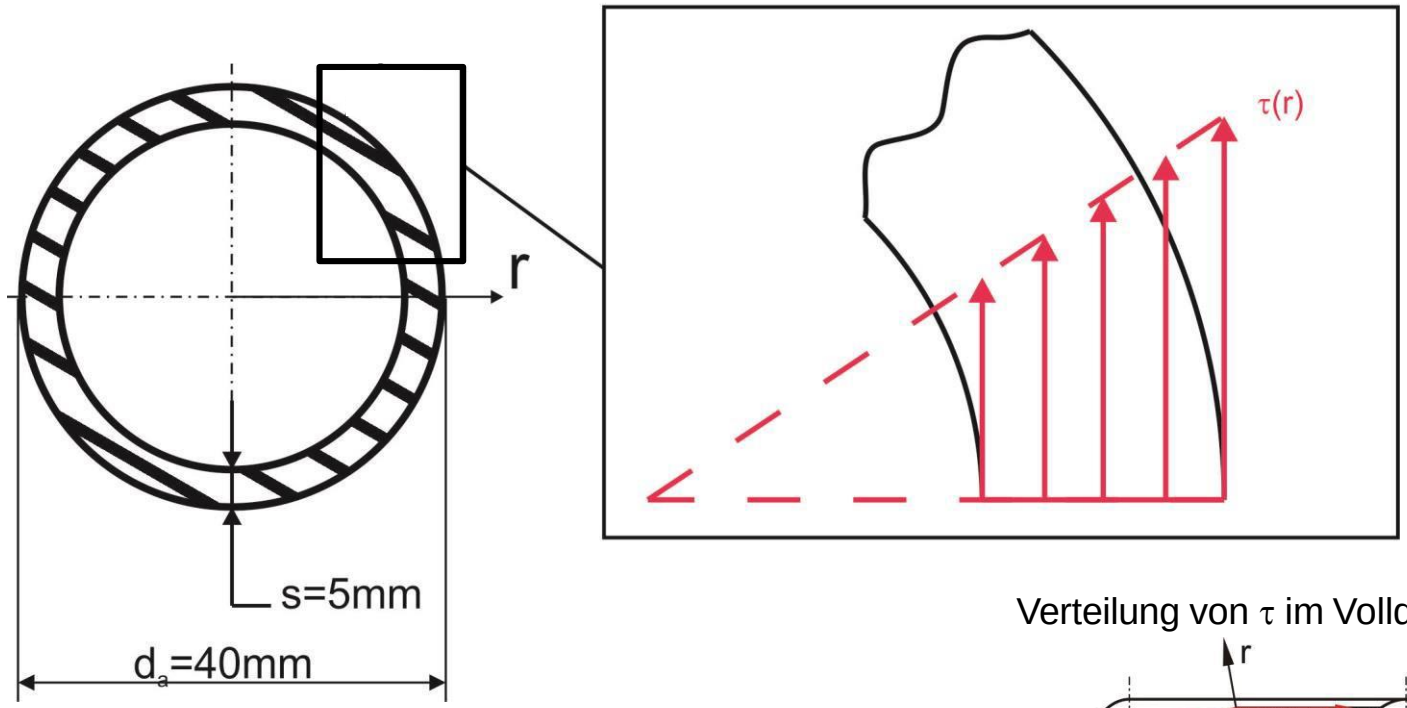
Maximale Verdrehung:

$$\tau_{max} = \tau_t = \frac{M_{t,zul}}{W_t}$$

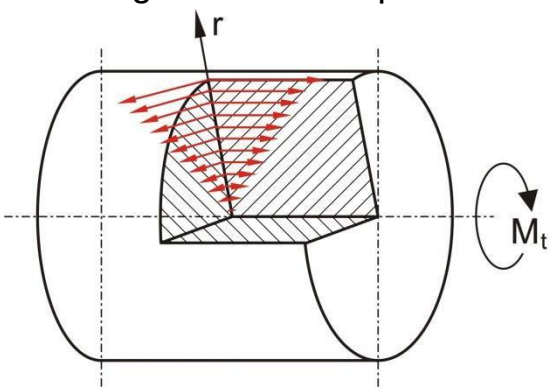
$$\gamma_{max} = \frac{\tau_t}{G}$$

Beachte: Schubspannung ist Funktion des Radius

# 1. Skizzieren Sie den Spannungsverlauf über dem Querschnitt




Verteilung von τ im Vollquerschnitt



# 2. Wie groß ist das maximal zulässige Torsionsmoment?

FB: $\tau \leq \tau_{zul}$

$$\tau_t = \frac{}{W_t} \qquad W_t = \frac{\pi}{16}\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a} = \frac{\pi}{16}\frac{40^4\,mm^4 - 30^4\,mm^4}{40\,mm} = 8590\,mm^3$$

$$d_i = d_a - 2s = 30\,mm$$

Fließen: (zäher Werkstoff)

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \approx \frac{0{,}58 \cdot R_e}{S_F} = \frac{0{,}58 \cdot 360\,MPa}{1{,}5} = 139{,}2\,MPa$$

Bruch:

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B} \approx \frac{R_m}{S_B} = \frac{520\,MPa}{2} = 260\,MPa > 139{,}2\,MPa$$

FB: $\frac{M_t}{W_t} = \tau_{zul}$

$$M_t = \tau_{zul} \cdot W_t = 139{,}2MPa \cdot 8590mm^3 = 1195728\,Nmm = 1{,}196\,kNm$$

## 3. Wie groß ist hierfür die maximale Schubspannung und die zugehörige Schiebung?

$$\tau_{max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{1195728\ \text{Nmm}}{8590\ \text{mm}^3} = 139{,}2\ \text{MPa}\ (= \tau_{zul}, \text{s.o.})$$

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_t}{G} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} =$$

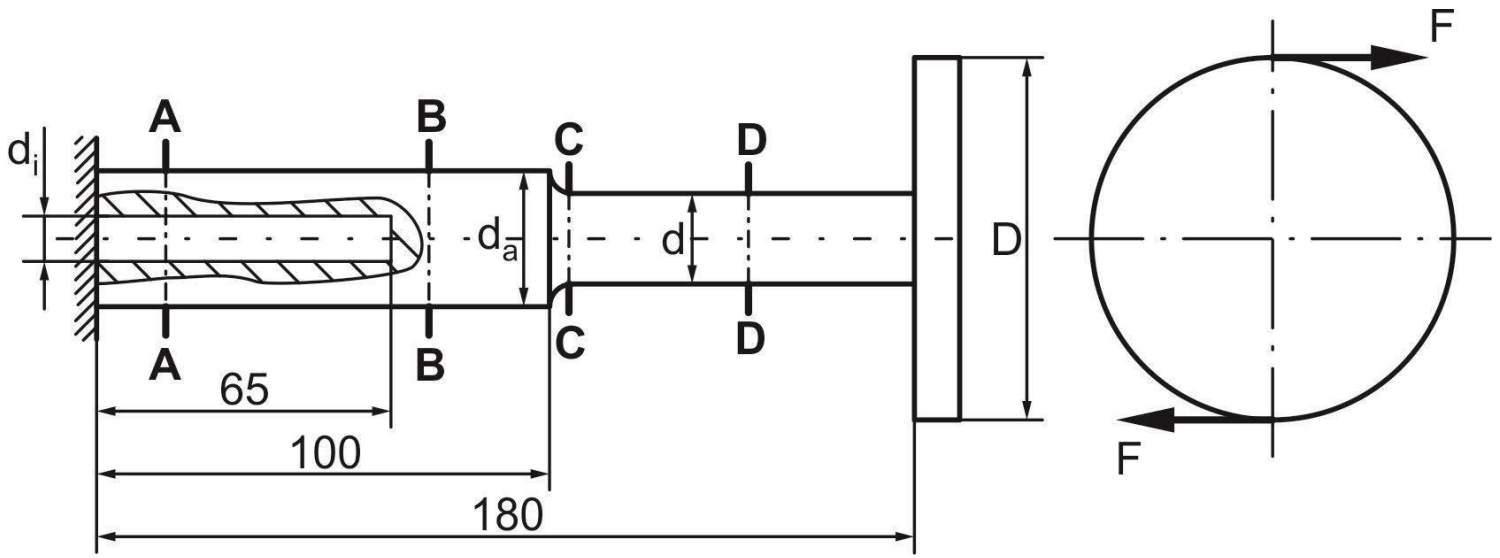
$$\gamma_{max} = \frac{139{,}2\text{MPa}}{80769\,\text{MPa}} = 0{,}0017234 = 0{,}0017234 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \mathrel{\hat{=}} 0{,}09875^\circ \approx 0{,}1^\circ$$

# Aufgabe 13:

Ein kreiszylindrischer Stab aus dem Vergütungsstahl 41Cr4 mit den in der Skizze angegebenen Abmessungen ist an einem Ende fest eingespannt und trägt am anderen Ende eine kreisförmige Scheibe, die durch ein tangential angreifendes Kräftepaar F verdreht wird.
**41Cr4:** $R_{p0,2}$ = 800 MPa; $R_m$ = 1000 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 12%

1. Welche **Kräfte F** sind nötig, um die Scheibe um **3° zu verdrehen**?

2. Wie groß ist dabei die **größte Schubspannung $\tau_{max}$**?
   Ist diese Beanspruchung **zulässig**?




$d_a$ = 30 mm
$d_i$ = 10 mm
d = 20 mm
D = 80 mm

# Lösungshinweise zu Aufgabe 13:

1.) Gesamtverdrehwinkel: Summe der einzelnen Teilverdrehwinkel: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$

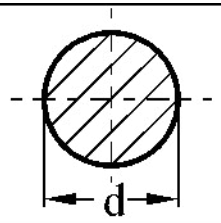
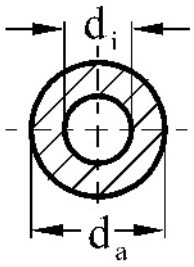
$$\frac{M_t}{G} \cdot \left( \frac{L_1}{I_{p_1}} + \frac{L_2}{I_{p_2}} + \frac{L_3}{I_{p_3}} \right) \quad (I_{p_i} = \text{polares Trägheitsmoment})$$

Vorgehen: Zuerst das Torsionsmoment $M_t$ ausrechnen, dann die Kraft F

(Betrachtung aller 3 Längenabschnitte)

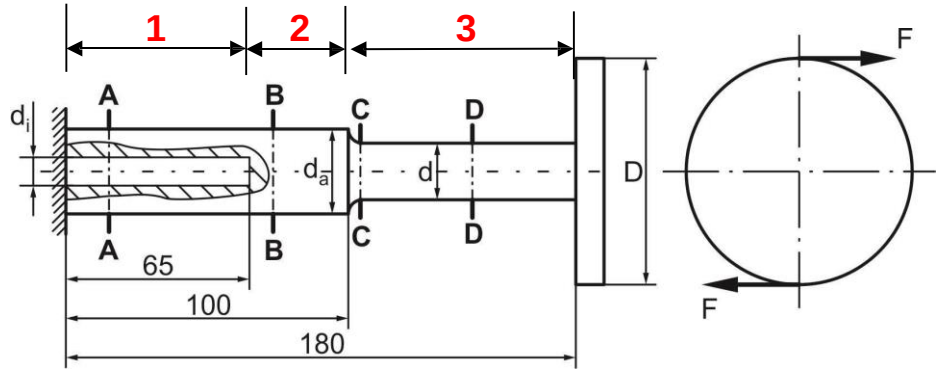
2.) Maximale Schubspannung: $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_{t(min)}}$

FB: $\tau_{max} \leq \tau_{zul} = \frac{\tau_{t,F}}{S_F}$ (Fließen) $\tau_{max} \leq \tau_{zul} = \frac{\tau_{t,B}}{S_B}$ (Bruch)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kreisquerschnitt |  | $I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$ | $W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$ |
| Kreisringquerschnitt |  | $I_p = \frac{\pi}{32} \cdot \left(d_a^4 - d_i^4\right)$ | $W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}\right)$ |

# 1. Welche Kraft F ist nötig, um die Scheibe um 3° zu verdrehen?

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{M_t}{G}\left(\frac{L_1}{I_{p_1}} + \frac{L_2}{I_{p_2}} + \frac{L_3}{I_{p_3}}\right)$$




$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{210000\ \text{MPa}}{2(1+0{,}3)} = 80769\ \text{MPa}$$

$$M_t = \frac{G\cdot\varphi}{\left(\frac{L_1}{I_{p1}} + \frac{L_2}{I_{p2}} + \frac{L_3}{I_{p3}}\right)}$$

$$\varphi = 3° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{180°}\cdot 3° = 0{,}052359$$

**Bereich 1:** $d_a = 30\ \text{mm}$, $d_i = 10\ \text{mm}$

$$I_{p_1} = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(30^4 - 10^4\right) = 78540\ \text{mm}^4$$

**Bereich 2:** $d_a = 30\ \text{mm}$

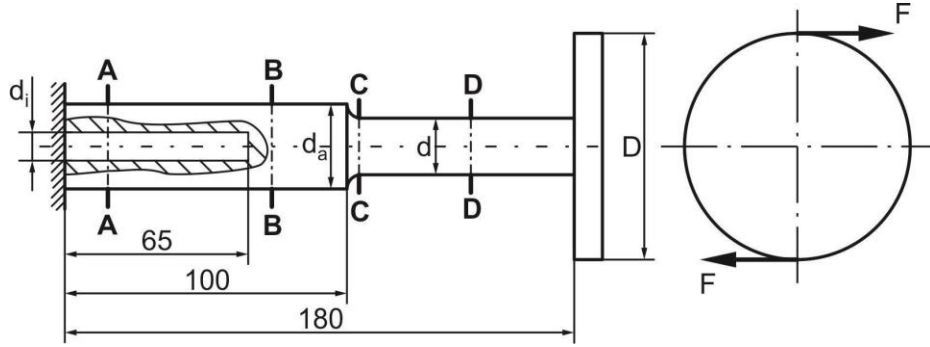
$$I_{p_2} = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(30^4\right) = 79522\ \text{mm}^4$$

**Bereich 3:** $d = 20\,\text{mm}$

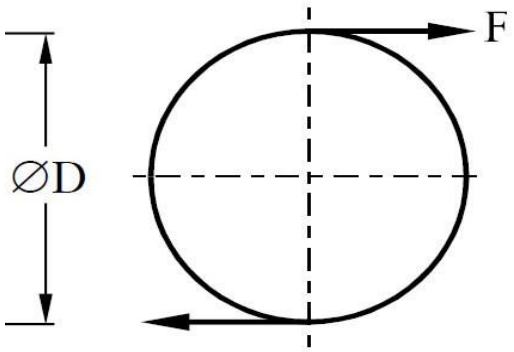
$$I_{p_3} = \frac{\pi}{32}\left(d^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(20^4\right) = 15708\ \text{mm}^4$$

# 1. Welche Kraft F ist nötig, um die Scheibe um 3° zu verdrehen?

$$M_t = \frac{G \cdot \varphi}{\left( \frac{L_1}{I_{p1}} + \frac{L_2}{I_{p2}} + \frac{L_3}{I_{p3}} \right)}$$




$$M_t = \frac{80769 \frac{N}{mm^2} \cdot 0{,}052359}{\left( \frac{65}{78540} + \frac{35}{79522} + \frac{80}{15708} \right) \frac{1}{mm^3}} = 664865\,Nmm = 664{,}9\,kNmm$$

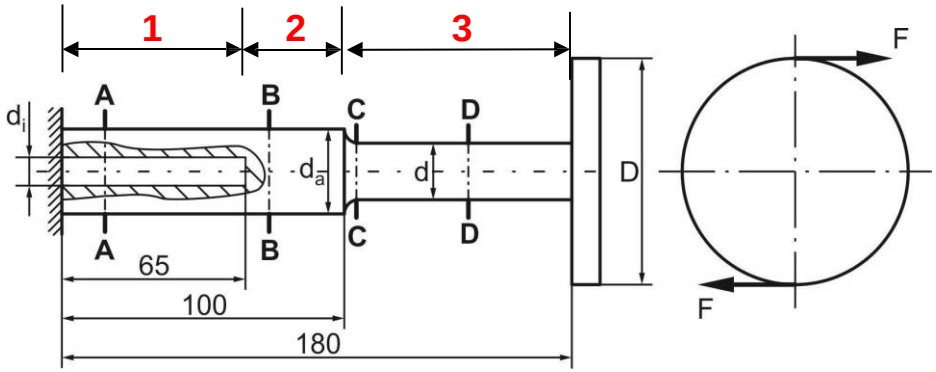



$$M_t = F \cdot \frac{D}{2} \cdot 2 = F \cdot D$$

$$F = \frac{M_t}{D} = \frac{664865\,Nmm}{80\,mm} = 8311N$$

## 2. Wie groß ist dabei die maximale Schubspannung $\tau_{max}$?

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_{t(min)}}$$




$$W_t = \frac{I_p}{d_{(max)}/2}$$

$$W_{t_1} = \frac{2 \cdot 78540}{30} = 5236\,mm^3$$

$$W_{t_2} = \frac{2 \cdot 79522}{30} = 5301 mm^3$$

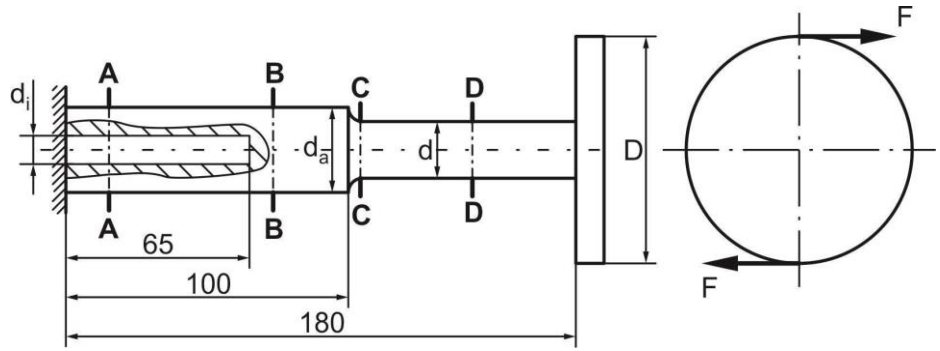
$$W_{t_3} = \frac{2 \cdot 15708}{20} = 1571 mm^3 = W_{t(min)}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_{t_3}} = \frac{664865\ Nmm}{1571\,mm^3} = 423{,}2\ MPa$$

# 2. Ist diese Beanspruchung zulässig?

FB:

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau_{tB}}{S_B}$$




$$\tau_{tF} \approx 0{,}58 \cdot R_{p0,2} = 0{,}58 \cdot 800 = 464 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{tB} \approx R_m = 1000 \text{ N/mm}^2$$

$$S_F = \frac{\tau_{tF}}{\tau_{max}} = \frac{464}{423{,}2} = 1{,}096 < 1{,}2$$ ⇒ nicht ausreichend

$$S_B = \frac{\tau_{tB}}{\tau_{max}} = \frac{1000}{423{,}2} = 2{,}36 > 2{,}0$$ ⇒ ausreichend

⇒ Also: $\tau_{max}$ bzw. F

# Aufgabe 14:

Ein **Rundstab aus Gusseisen** EN-GJL-400 (GG40) mit dem Durchmesser d = 30 mm und **geschlichteter Oberfläche** unterliegt einer **schwingenden Zug-Druck-Belastung**.

Wie groß ist die **höchste, beliebig oft ertragbare Last**, wenn $\sigma_w$ = 85 MPa ist, bei

1. (rein) schwellender Zugbeanspruchung?
2. (rein) schwellender Druckbeanspruchung?
3. schwingender Zugbeanspruchung mit einer statischen Vorspannung von $\sigma$ = 150 MPa?

**EN-GJL-400 (GG40):** $R_m$ = 400 MPa; E = 110000 MPa; $\sigma_{w(poliert)}$ = 85 MPa

Hinweise:

- $\sigma_w$ = 85 MPa
- Oberflächenfaktor f
- grafische Lösung: Smith-Diagramm
- analytische Näherungslösung:

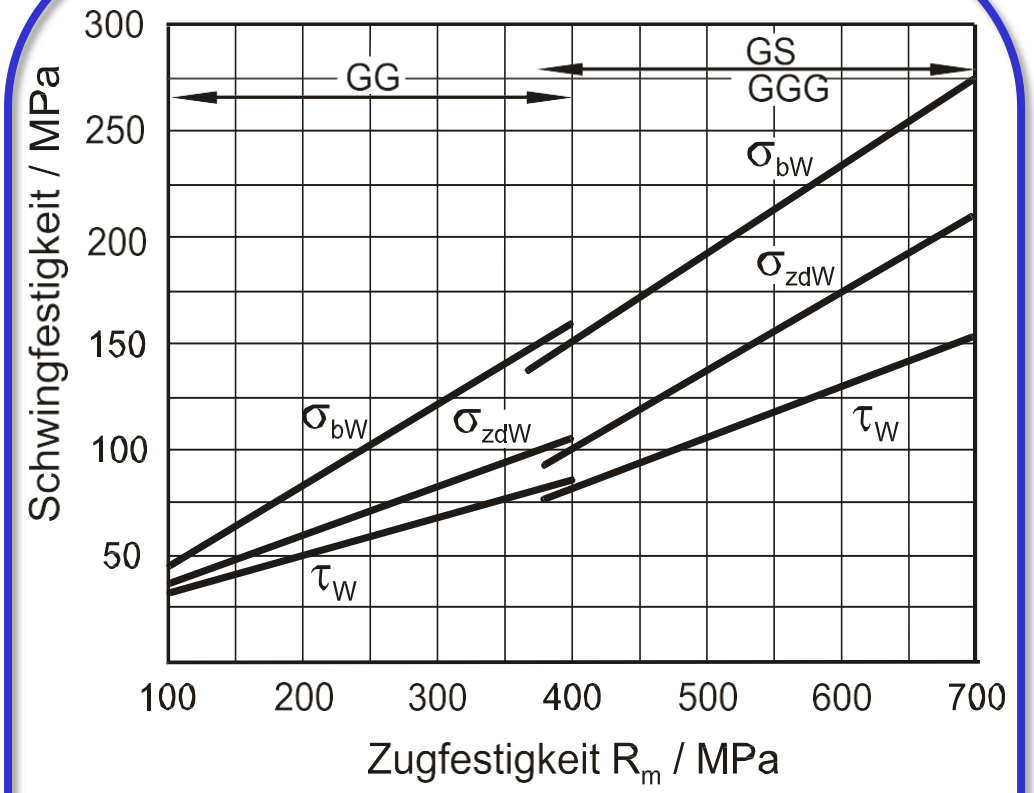
$$\sigma_A = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$$

# Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

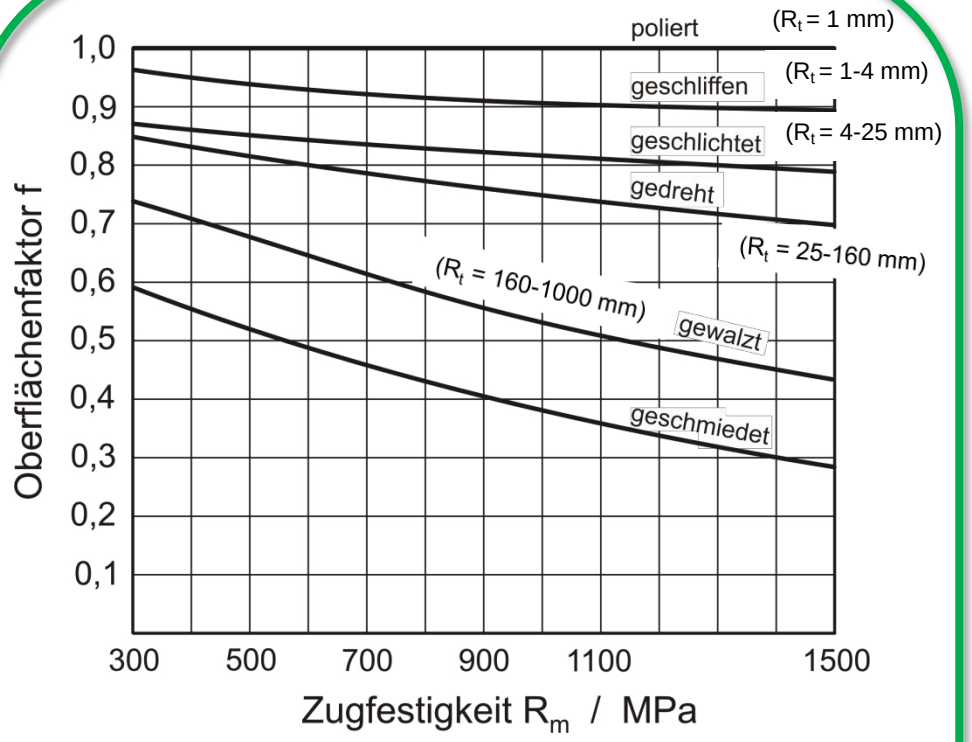
| | Alte Bezeichnung | Neue Bezeichnung | $R_m$ N /mm$^2$ | $\sigma_{bB}$ N /mm$^2$ | $\sigma_{dB}$ N /mm$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Gußeisen mit** | GG-10 | GG10(EN-GJL-100) | 100 | 250 | 500 – 600 |
| **lamellarem** | GG-15 | GG15(EN-GJL-150) | 110 - 230 | 270 - 340 | 550 – 700 |
| **Graphit** | GG-20 | GG20(EN-GJL-200) | 160 - 280 | 330 - 410 | 600 – 830 |
| DIN 1691 | GG-25 | GG25(EN-GJL-250) | 210 - 330 | 390 - 460 | 700 – 1000 |
| (bleibt erhalten) | GG-30 | GG30(EN-GJL-300) | 260 - 330 | 450 - 480 | 850 – 1200 |
| | GG-35 | GG35(EN-GJL-350) | 310 - 380 | 510 - 540 | 950 – 1400 |
| | GG-40 | GG40(EN-GJL-400) | 360 - 400 | 570 - 600 | 1100 – 1400 |

**verwendet:**

**$R_m$ = 400 MPa**




Wechselfestigkeit von **Gusswerkstoffen** in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)




Oberflächenfaktor in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit $(f = \frac{\sigma_W}{\sigma_{W,pol}})$

Wie groß ist die höchste, beliebig oft ertragbare Last (für $\sigma_W = 85$ MPa)?

$$F_{max} = \sigma_o \cdot A \quad ; \quad A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} 30^2 mm^2 = 706{,}9\ mm^2$$

$$\sigma_o = \begin{cases} 1)\ \sigma_{zSch} \\ 2)\ \sigma_{dSch} \\ 3)\ \sigma_o\ (\sigma_m) \end{cases}$$

aus DFS ablesen oder analytisch berechnen
(für geschlichtete Oberflächen)

$$\sigma_W\ (\text{geschlichtet}) = f \cdot \sigma_W\ (\text{poliert})$$

$$R_m = 400\ MPa$$

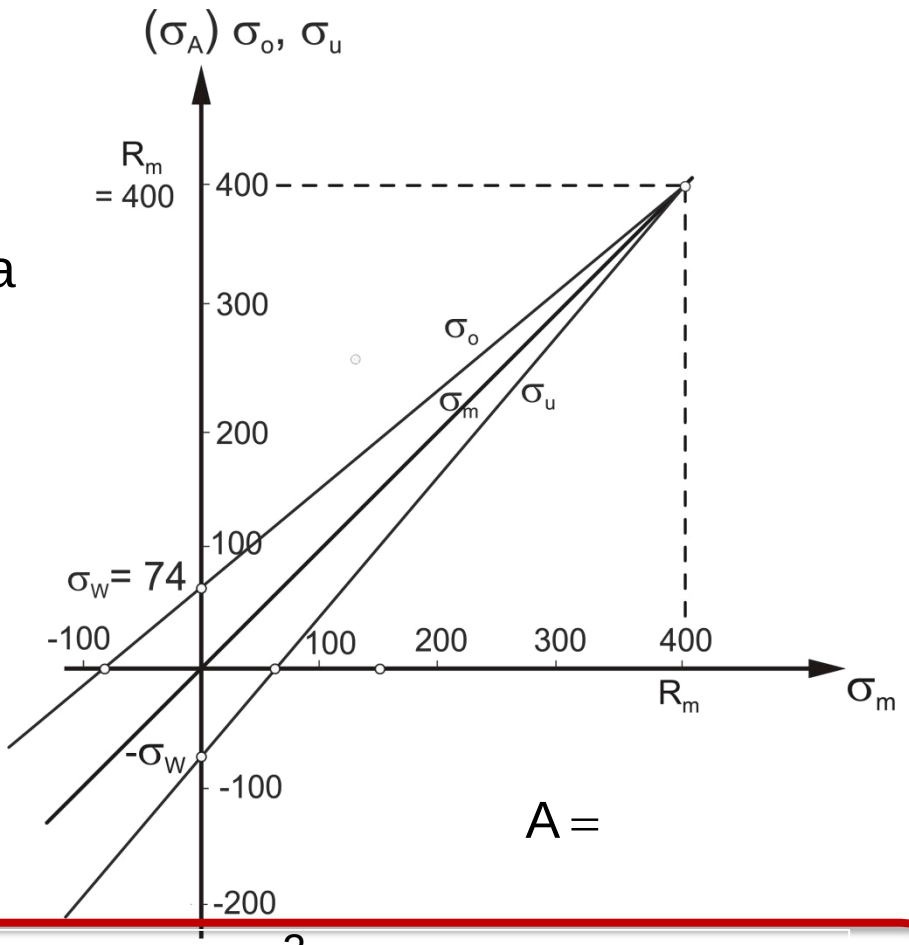
$$f = 0{,}87$$

$$\sigma_W = 85\ MPa$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_W\ (\text{geschlichtet}) = 0{,}87 \cdot 85 MPa = 74{,}0\ MPa$$

# a. Grafische Lösung:

DFS nach Smith <u>zeichnen</u>
mit $R_m = 400\ MPa$ und $\sigma_{W(geschlichtet)} = 74\ MPa$




$$\sigma_o = \begin{cases} 1)\ \sigma_{zSch} \\ 2)\ \sigma_{dSch} \\ 3)\ \sigma_o\ (\sigma_m = 150MPa) \end{cases}$$

1) $\sigma_{zSch} = 125\,MPa \rightarrow F_{max} = 125MPa \cdot 706{,}9mm^2 = 88362{,}5\,N = 88{,}3\,kN$

2) $\sigma_{dSch} = -180\,MPa \rightarrow F_{max} = -180MPa \cdot 706{,}9mm^2 = 127242\,N = 127{,}2\,kN$

3) $\sigma_o = 195\,MPa \rightarrow F_{max} = 195MPa \cdot 706{,}9mm^2 = 137845{,}5\,N = \underline{137{,}8\,kN}$

b. Analytische Lösung mit $\sigma_A = \sigma_W \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right)$ (1) (spröder Werkstoff)

1) $\sigma_A = \frac{\sigma_{zSch}}{2}$, $\sigma_m = \frac{\sigma_{zSch}}{2}$ } damit in (1)

$$\frac{\sigma_{zSch}}{2} = \sigma_W \left( 1 - \frac{\sigma_{zSch}}{2 \cdot R_m} \right) = \sigma_W - \frac{\sigma_W}{R_m} \frac{\sigma_{zSch}}{2}$$

$$\frac{\sigma_{zSch}}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_W}{R_m} \right) = \sigma_W$$

$$\sigma_{zSch} = \frac{2 \cdot \sigma_W}{\left( 1 + \frac{\sigma_W}{R_m} \right)} = \frac{2 \cdot 74 MPa}{1 + \frac{74 MPa}{400 MPa}} = 124{,}9 MPa$$

$$F_{max} = 124{,}9 MPa \cdot 706{,}9 mm^2 = 88292 N = 88{,}3 kN$$

b. Analytische Lösung mit $\sigma_A = \sigma_W \left( \left| 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right| \right)$ (1) (spröder Werkstoff)

2) $\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{\sigma_{dSch}}{2} \\ \sigma_m &= -\frac{\sigma_{dSch}}{2} \end{aligned} \right\}$ damit in (1)

$$\frac{\sigma_{dSch}}{2} = \sigma_W \left( \left| 1 + \frac{\sigma_{dSch}}{2 \cdot R_m} \right| \right) = \sigma_W + \frac{\sigma_W}{R_m} \frac{\sigma_{dSch}}{2}$$

$$\sigma_{dSch} = \frac{2 \cdot \sigma_W}{\left( \left| 1 - \frac{\sigma_W}{R_m} \right| \right)} = \frac{2 \cdot 74MPa}{1 - \frac{74MPa}{400MPa}} = 181{,}6MPa$$

$$F_{max} = 181{,}6MPa \cdot 706{,}9mm^2 = 128373\,N = 128{,}4\,kN$$

3) $\sigma_m = 150\ MPa$ } damit aus (1)

$$\sigma_A = \sigma_W \left( \left| 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right| \right) = 74MPa \left( \left| 1 - \frac{150MPa}{400MPa} \right| \right) = 46{,}3\,MPa$$

$$\sigma_o = \sigma_m + \sigma_A = 150MPa + 46{,}3MPa = 196{,}3\,MPa$$

$$F_{max} = 196{,}3MPa \cdot 706{,}9mm^2 = 138764N = 138{,}8\,kN$$

# Aufgabe 15:

Eine **Torsionsfeder aus Federstahl** 38Si6 ist als kreiszylindrischer Stab mit dem Durchmesser d = 20 mm und der Länge L = 800 mm ausgebildet.

1. Welches **statische Torsionsmoment** ist für den Federstahl **zulässig**?
2. Welches (rein) **wechselnde Torsionsmoment** ist für den Federstahl **zulässig**? (Oberfläche geschliffen)
3. Um welchen **Winkel** verdreht sich der Stab in den Fällen 1. und 2.?

**38Si6:** $R_{p0,2}$ = 1050 MPa; $R_m$ = 1200 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 6%

Hinweise:

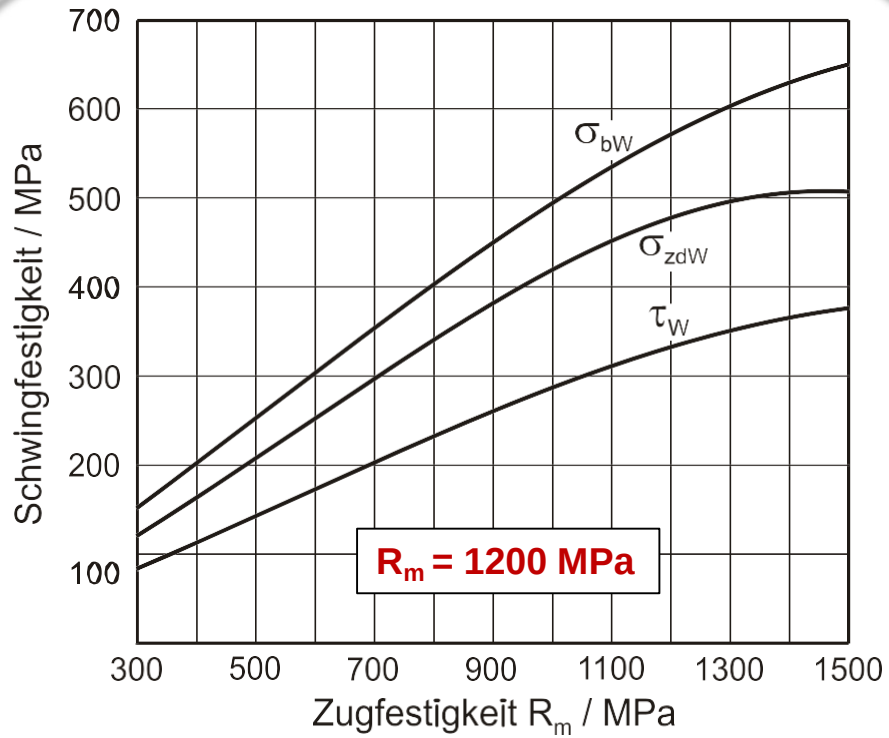
- zu 1.: Festigkeitsbedingung: $\tau_t \leq \tau_{zul}$ (Rechnung gegen Fließen und Bruch)
- zu 2.: Festigkeitsbedingung: $\tau_{t,a} \leq \tau_{a,zul}$ (Schwingungsbruch)
- zu 3.: Verdrehwinkel: $\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_P}$

# Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

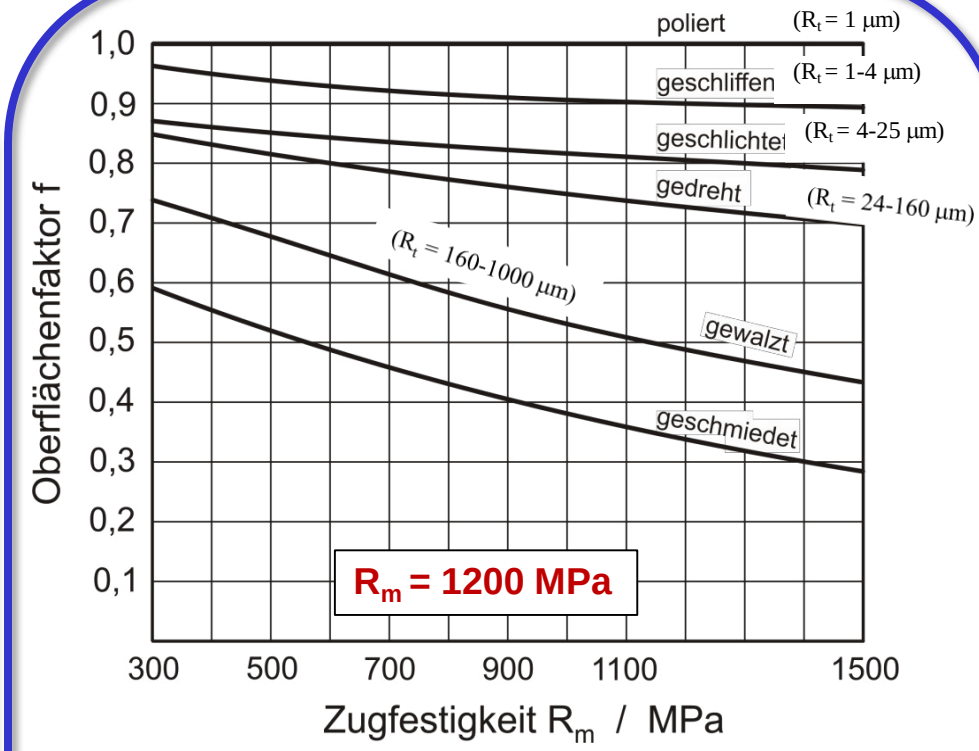
| | Alte Bezeichnung | Neue Bezeichnung (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ $N/mm^2$ min. | $R_m$ $N/mm^2$ | $A_5$ % min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)** neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 - 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 - 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 - 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 - 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 - 630 | 22 |
| **Maschinenbau-stähle (E)** | St 50 | E295 | 295 | 470 - 610 | 20 |
| | St 60 | E335 | 335 | 570 - 710 | 16 |
| | St 70 | E360 | 360 | 670 - 830 | 11 |
| **Vergütungs-Stähle** neu: DIN EN 10083 alt: DIN 17200 | C 35 | C35 (unlegiert) | 430 | 600 - 750 | 19 |
| | C 45 | C45 (unlegiert) | 490 | 650 - 800 | 16 |
| | C 55 | C55 (unlegiert) | 550 | 800 - 950 | 12 |
| | 41 Cr 4 | 41Cr4 (legiert) | 800 | 900 - 1100 | 12 |
| | 42 CrMo 4 | 42CrMo4 (legiert) | 900 | 1000 - 1200 | 11 |
| | 34 CrNiMo 6 | 34CrNiMo6 (legiert) | 1000 | 1100 - 1300 | 10 |
| **Federstähle** DIN 17221 (nicht ersetzt) | 38 Si 6 | 38Si6 | 1030 | 1180 - 1370 | 6 |
| | 60 SiMn 5 | 60SiMn5 | 1050 | 1350 - 1550 | 6 |
| | 58 CrV 4 | 58CrV4 | 1350 | 1500 - 1700 | 6 |
| **Nichtrostende Stähle** neu: DIN EN 10088 alt: DIN 17440 | X 7 Cr 13 | X7Cr13 | 250 | 450 - 650 | 20 |
| | X 12 CrNi 18 8 | X12CrNi18-8 | 250 | 500 - 700 | 50 |
| | X 10 CrNiMoTi 18 10 | X10CrNiMoTi18-8 | 230 | 500 - 750 | 40 |

**verwendet:**

**$R_{p0,2}$ = 1050 MPa**
**$R_m$ = 1200 MPa**




Zug-Druck-, Biege- und Torsionswechselfestigkeit von Stahl in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)




Oberflächenfaktor in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit $\left(f = \frac{\sigma_W}{\sigma_{W,pol}}\right)$

1. Welches **statische Torsionsmoment** ist für den Federstahl **zulässig**?

FB: $\tau_t \leq \tau_{zul}$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \qquad W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} 20^3 mm^3 = 1571 mm^3$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tF}}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\tau_{tB}}{S_B}$$

38Si6 ist kein ausgesprochen zäher Werkstoff, gegen Fließen und Bruch rechnen

Fließen

$$\tau_{tF} \approx 0{,}58 \cdot R_{p0,2} = 0{,}58 \cdot 1050 MPa = 610\ MPa$$

$$\tau_{zul,F} = \frac{610 MPa}{1{,}5} = 406\ MPa$$

Bruch

$$\tau_{tB} \approx R_m = 1200\ MPa$$

$$\tau_{zul,B} = \frac{1200 MPa}{3 (gewählt)} = 400\ MPa = \tau_{zul}$$

$$M_t = W_t \cdot \tau_{zul} = 1571 mm^3 \cdot 400 MPa = 628400\ Nmm = 628{,}4\ Nm$$

2. Welches (rein) **wechselnde Torsionsmoment** ist für den Federstahl **zulässig**? (Oberfläche geschliffen)

FB: $\tau_{ta} \leq \tau_{a,zul}$

$$\tau_{ta} = \frac{M_t}{W_t} \qquad \tau_{a,zul} = \frac{f \cdot \tau_{tW}}{S_D}$$

$R_m = 1200\ MPa \rightarrow \tau_{tW} = 330\ MPa$

geschliffen $\rightarrow f = 0{,}9$

gewählt: $S_D = 2{,}0$

$$\tau_{a,zul} = \frac{0{,}9 \cdot 330 MPa}{2{,}0} = 148{,}5\ MPa$$

Zum Vergleich:

$M_t = \underline{628{,}4\ Nm}$

$$M_{t,zul} = W_t \cdot \tau_{a,zul} = 1571 mm^3 \cdot 148{,}5 MPa = 233294\ Nmm = \underline{233{,}3\ Nm}$$

3. Um welchen **Winkel** verdreht sich der Stab in den Fällen 1. und 2.?

$$\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} 20^4 = 15708\ mm^4$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{210000}{2(1+0{,}3)} = 80769\ MPa$$

$$\varphi_1 = \frac{628400 \cdot 800}{80769 \cdot 15708} = 0{,}396 \rightarrow \varphi_1^\circ = \frac{180}{\pi} \cdot 0{,}396 = 22{,}7°$$

$$\varphi_2^\circ = \frac{M_{t2}}{M_{t1}} \cdot \varphi_1^\circ = \frac{233294}{628400} \cdot 22{,}7° = \pm 8{,}4°$$

$$\frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_1^\circ} = \frac{M_{t2}}{M_{t1}} = 0{,}371 = 37{,}1\%$$

# Aufgabe 16:

Ein **Zuganker** aus E 360 mit Kreisquerschnitt und geschliffener Oberfläche steht im Zylinderblock eines Motors unter einer **statischen Vorlast** von $F_1 = 15000$ N. Bei jedem Arbeitstakt wird er zusätzlich **schwellend** mit $F_2 = 30000$ N **belastet**.

Wie groß ist der **erforderliche Durchmesser** des Zugankers, wenn als **Sicherheit**

- gegen Fließen 1,5
- gegen Bruch 2,0
- gegen Schwingungsbruch 2,2

gefordert ist?

**E360:** $R_e = 370$ MPa; $R_m = 700$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 11\%$

Hinweise:

- Dimensionierungsaufgabe: FB verwenden
- Oberflächenfaktor f
- grafische Lösung (Haigh-Diagramm)
- analytische Näherungslösung:

$$\sigma_A = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

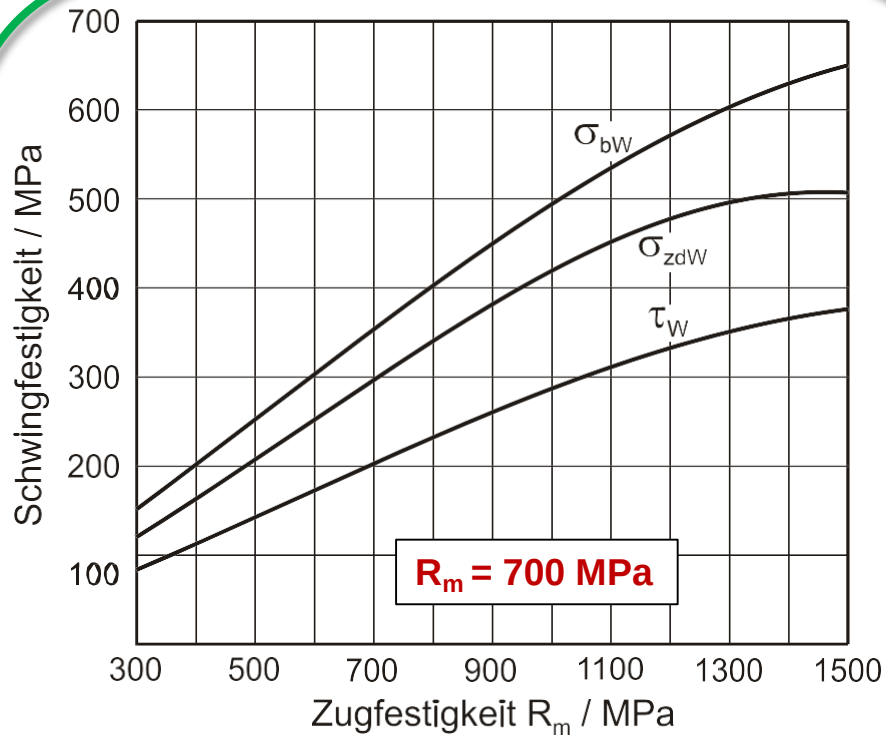
# Werkstoffkennwerte für verschiedene Werkstoffe bei Raumtemperatur (Auswahl)

| | Alte Bezeichnung | Neue Bezeichnung (seit 1993) | $R_e$, $R_{p0,2}$ N/mm² min. | $R_m$ N/mm² | $A_5$ % min. |
|---|---|---|---|---|---|
| **Stähle für den Stahlbau (S)** neu: DIN EN 10027 alt: DIN 17100 | St 33 | S185 | 185 | 290 - 510 | 28 |
| | St 37 | S235 | 235 | 340 - 470 | 26 |
| | St 42 | S260 | 260 | 420 - 500 | 22 |
| | St 44 | S275 | 275 | 410 - 560 | 22 |
| | St 52 | S355 | 355 | 490 - 630 | 22 |
| **Maschinenbau-stähle (E)** | St 50 | E295 | 295 | 470 - 610 | 20 |
| | St 60 | E335 | 335 | 570 - 710 | 16 |
| | St 70 | E360 | 360 | 670 - 830 | 11 |
| **Vergütungs-Stähle** neu: DIN EN 10083 alt: DIN 17200 | C 35 | C35 (unlegiert) | 430 | 600 - 750 | 19 |
| | C 45 | C45 (unlegiert) | 490 | 650 - 800 | 16 |
| | C 55 | C55 (unlegiert) | 550 | 800 - 950 | 12 |
| | 41 Cr 4 | 41Cr4 (legiert) | 800 | 900 - 1100 | 12 |
| | 42 CrMo 4 | 42CrMo4 (legiert) | 900 | 1000 - 1200 | 11 |
| | 34 CrNiMo 6 | 34CrNiMo6 (legiert) | 1000 | 1100 - 1300 | 10 |
| **Federstähle** DIN 17221 (nicht ersetzt) | 38 Si 6 | 38Si6 | 1030 | 1180 - 1370 | 6 |
| | 60 SiMn 5 | 60SiMn5 | 1050 | 1350 - 1550 | 6 |
| | 58 CrV 4 | 58CrV4 | 1350 | 1500 - 1700 | 6 |
| **Nichtrostende Stähle** neu: DIN EN 10088 alt: DIN 17440 | X 7 Cr 13 | X7Cr13 | 250 | 450 - 650 | 20 |
| | X 12 CrNi 18 8 | X12CrNi18-8 | 250 | 500 - 700 | 50 |
| | X 10 CrNiMoTi 18 10 | X10CrNiMoTi18-8 | 230 | 500 - 750 | 40 |

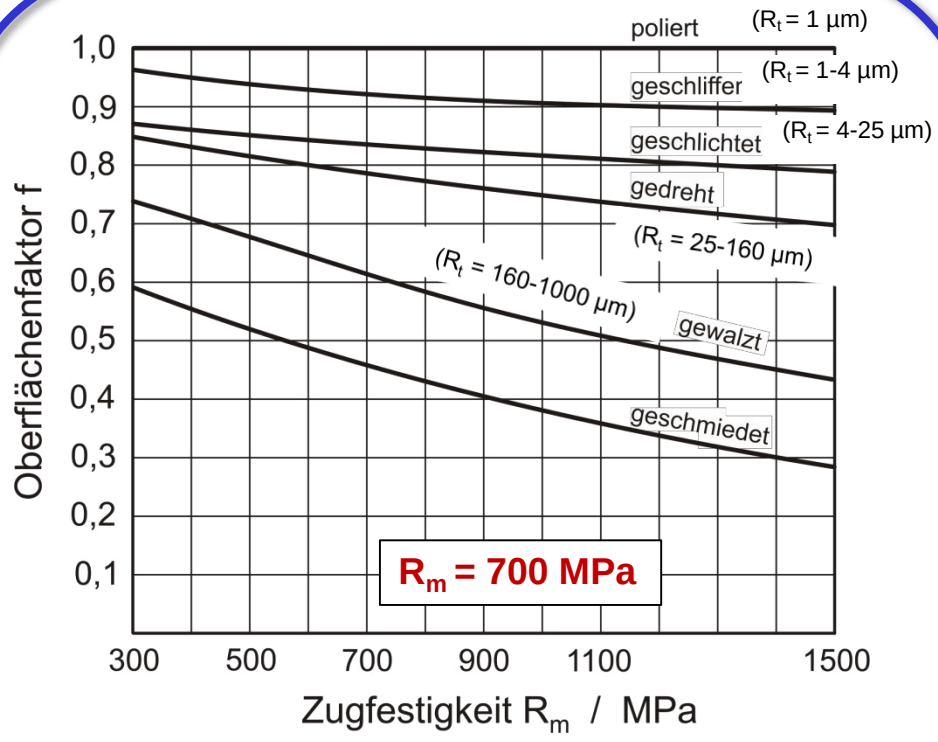
**verwendet:**

$R_e = 370$ MPa

$R_m = 700$ MPa




Zug-Druck-, Biege- und Torsionswechselfestigkeit von Stahl in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit (Oberfläche poliert)




Oberflächenfaktor in Abhängigkeit von der Zugfestigkeit $\left(f = \frac{\sigma_W}{\sigma_{W,pol}}\right)$

# 1. Rechnung gegen Fließen und Bruch

FB: $\sigma_o \leq \sigma_{o,zul}$

$$\sigma_o = \frac{F_o}{A}$$

$$\sigma_{o,zul} = \frac{R_e}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_m}{S_B}$$



also: $\sigma_{o,zul} = 246{,}7\,\text{MPa}$

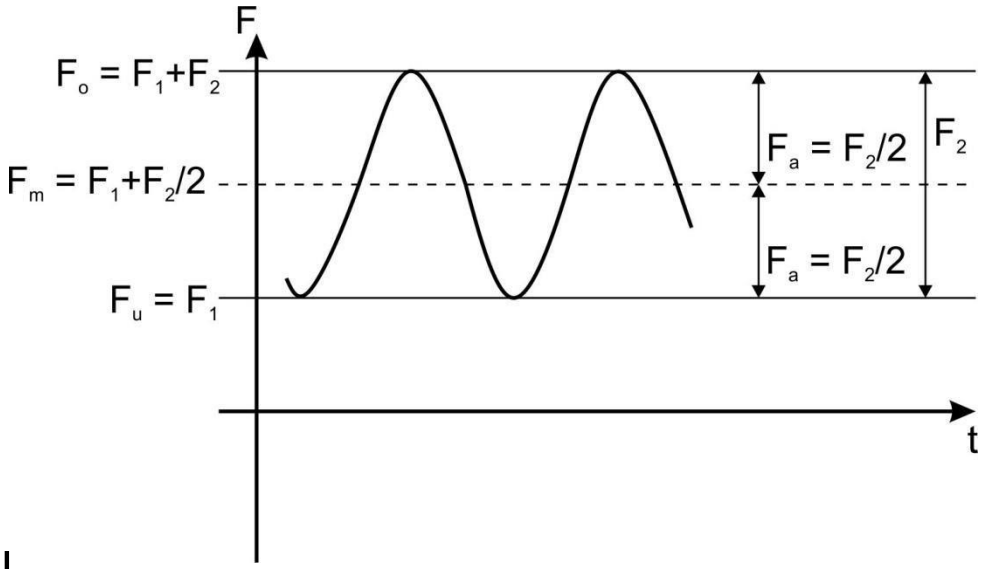
Aus FB: $\sigma_o = \frac{F_o}{A} = \sigma_{o,zul}$

$$A = \frac{F_o}{\sigma_{o,zul}} = \frac{45000\,\text{N}}{246{,}7\,\text{MPa}} = 182{,}41\,\text{mm}^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$



$$d_F = \sqrt{\frac{4}{\pi} A} = \sqrt{\frac{4}{\pi} 182{,}41\text{mm}^2} = 15{,}24\ \text{mm}$$

# 2. Rechnung gegen Schwingungsbruch




FB: $\sigma_a \le \sigma_{a,zul}$

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} \quad ; \quad F_a = \frac{F_2}{2} = 15000\,N$$

$$\sigma_{a,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D} \quad ; \quad \sigma_A = f(\sigma_m) \quad ;$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A} \quad ; \quad F_m = F_1 + \frac{F_2}{2} = 30000\,N$$

$\sigma_A(\sigma_m)$ entweder rechnerisch (Parabelgleichung) oder aus DFS.
Dazu $\sigma_W$(geschliffen) nötig:

$$\sigma_W(\text{geschliffen}) = f \cdot \sigma_W(\text{poliert})$$

$$R_m = 700\ MPa \rightarrow \sigma_W = 290\,MPa$$

$$\text{geschliffen} \rightarrow f = 0{,}92$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_W(\text{geschliffen}) = 0{,}92 \cdot 290MPa = 266{,}8\,MPa$$

# 2. A) Rechnung gegen Schwingungsbruch, $\sigma_A$ aus Parabelgleichung:

$$\sigma_A = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{F_m}{A \cdot R_m}}$$ (zäher Werkstoff)

FB: $$\sigma_a = \frac{F_a}{A} \overset{!}{=} \frac{\sigma_W}{S_D} \sqrt{1 - \frac{F_m}{A \cdot R_m}} = \sigma_{a,zul} \quad (\cdot)^2$$

$$\left(\frac{F_a S_D}{A \sigma_W}\right)^2 = 1 - \frac{F_m}{A \cdot R_m} \quad \cdot A^2$$

$$0 = A^2 - \frac{F_m}{R_m} \cdot A - \left(\frac{F_a S_D}{\sigma_W}\right)^2$$

$$A = \frac{F_m}{2R_m} \pm \sqrt{\left(\frac{F_m}{2R_m}\right)^2 + \left(\frac{F_a S_D}{\sigma_W}\right)^2}$$

$$= \frac{30000}{2 \cdot 700} + \sqrt{\left(\frac{30000}{2 \cdot 700}\right)^2 + \left(\frac{15000 \cdot 2{,}2}{266{,}8}\right)^2}$$

$$= 145{,}52\,\text{mm}^2$$

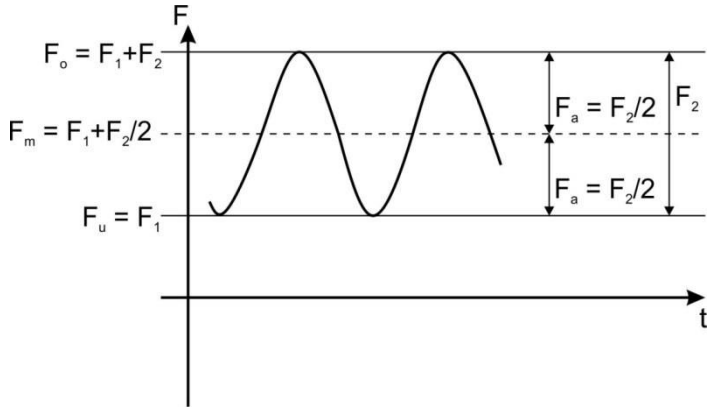
Erforderlicher Durchmesser somit:

$$d \geq 15{,}24\,\text{mm}$$

$$d_D = \sqrt{\frac{4}{\pi} A} = \sqrt{\frac{4}{\pi} 145{,}52} = 13{,}61\,\text{mm}$$

# 2. B) Rechnung gegen Schwingungsbruch, $\sigma_A$ aus DFS

$(R_m = 700\ N/mm^2, R_e = 370\ N/mm^2, \sigma_W = 266{,}8\ N/mm^2)$




$\sigma_m = \frac{F_m}{A}$ nicht bekannt, aber aus FB Verhältnis

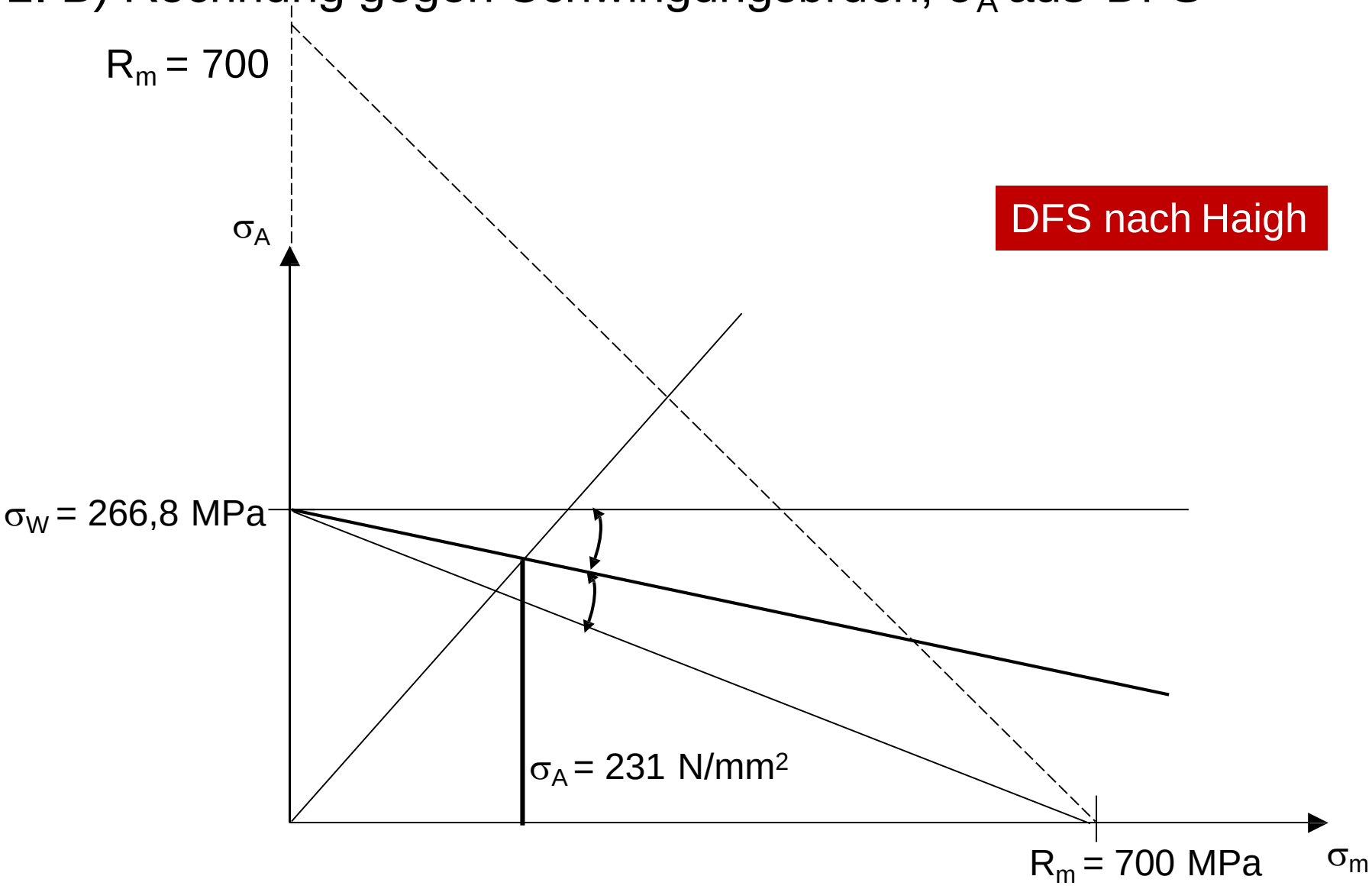
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{a,zul}}{\sigma_m} = \frac{F_a}{F_m} = \frac{15000\ N}{30000 N} = 0{,}5$$

Also DFS der zulässigen Spannungen zeichnen und Verhältnis $\sigma_{azul} / \sigma_m$ = suchen.

$$\sigma_{azul} = \frac{\sigma_A}{S_D} \rightarrow \frac{\sigma_{a,zul}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_A}{S_D \sigma_m} = 0{,}5$$

$\rightarrow \sigma_A = 0{,}5 \cdot S_D \sigma_m = 0{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot \sigma_m = 1{,}1 \cdot \sigma_m$ = Gerade mit Steigung

# 2. B) Rechnung gegen Schwingungsbruch, $\sigma_A$ aus DFS



# 2. B) Rechnung gegen Schwingungsbruch, $\sigma_A$ aus DFS

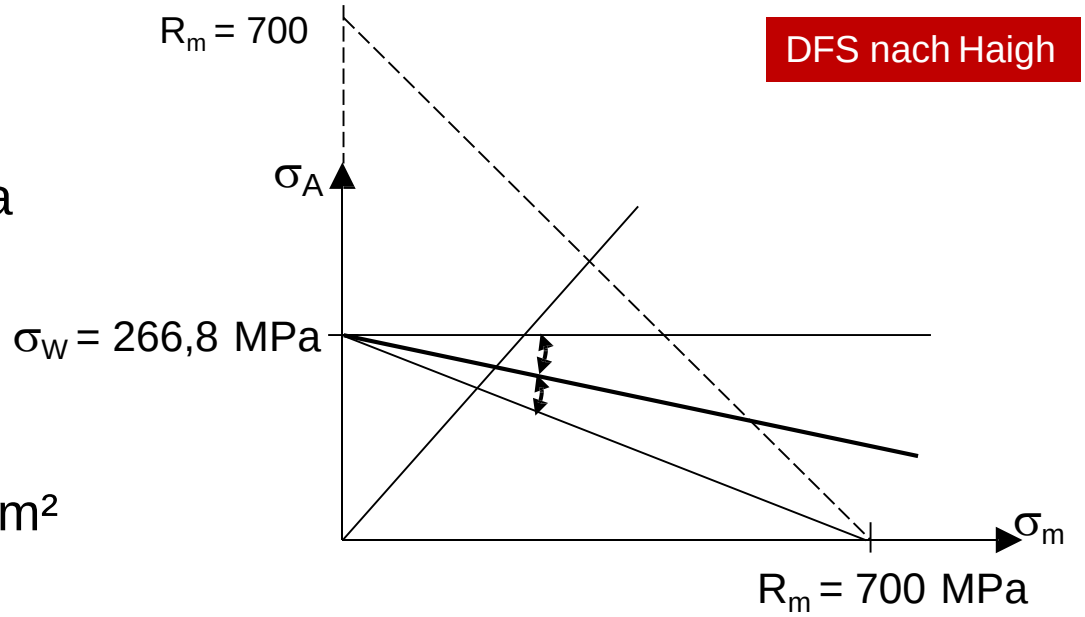
Aus Schaubild: $\sigma_A = 231\text{MPa}$

$$\rightarrow \sigma_{a,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D} = \frac{231\text{MPa}}{2{,}2} = 105\ \text{MPa}$$

FB: $\sigma_a = \frac{F_a}{A} \leq \sigma_{azul}$

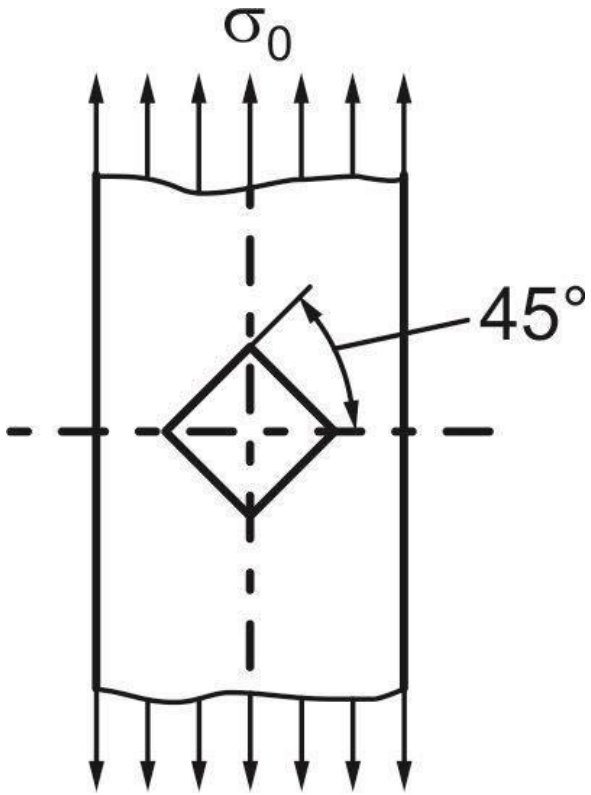
$$\rightarrow A = \frac{F_a}{\sigma_{a,zul}} = \frac{15000\ \text{N}}{105\text{MPa}} = 142{,}86\ \text{mm}^2$$

$$d_D = \sqrt{\frac{4}{\pi} A} = \sqrt{\frac{4}{\pi} 142{,}86\ \text{mm}^2} = 13{,}49\,\text{mm}$$




Erforderlicher Durchmesser somit:

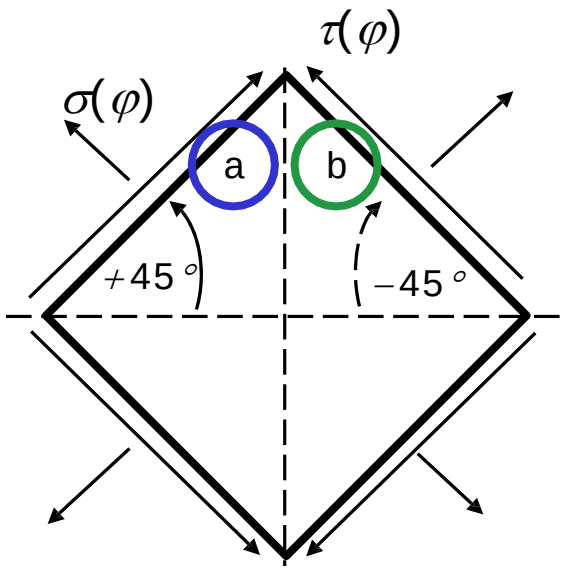
# Aufgabe 17:




Welche **Spannungen** wirken an den Schnitträndern einer quadratischen Scheibe, die gemäß Skizze unter 45° zur Achse eines Blechstreifens liegen, der unter der Spannung $\sigma_0$ steht?

Man konstruiere aus den Schnittspannungen den **Mohrschen Spannungskreis**.

# 1. Berechnung der Spannungen




Seite a: $\varphi = 45°$

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cdot \cos^2\varphi = \sigma_0 \cdot \cos(45°)^2 = \sigma_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot \sin(90°) = \frac{\sigma_0}{2}$$

Seite b: $\varphi = -45°$

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0 \cdot \cos^2\varphi = \sigma_0 \cdot \cos(-45°)^2 = \sigma_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sigma_0 \cdot \sin(-90°) = -\frac{\sigma_0}{2}$$

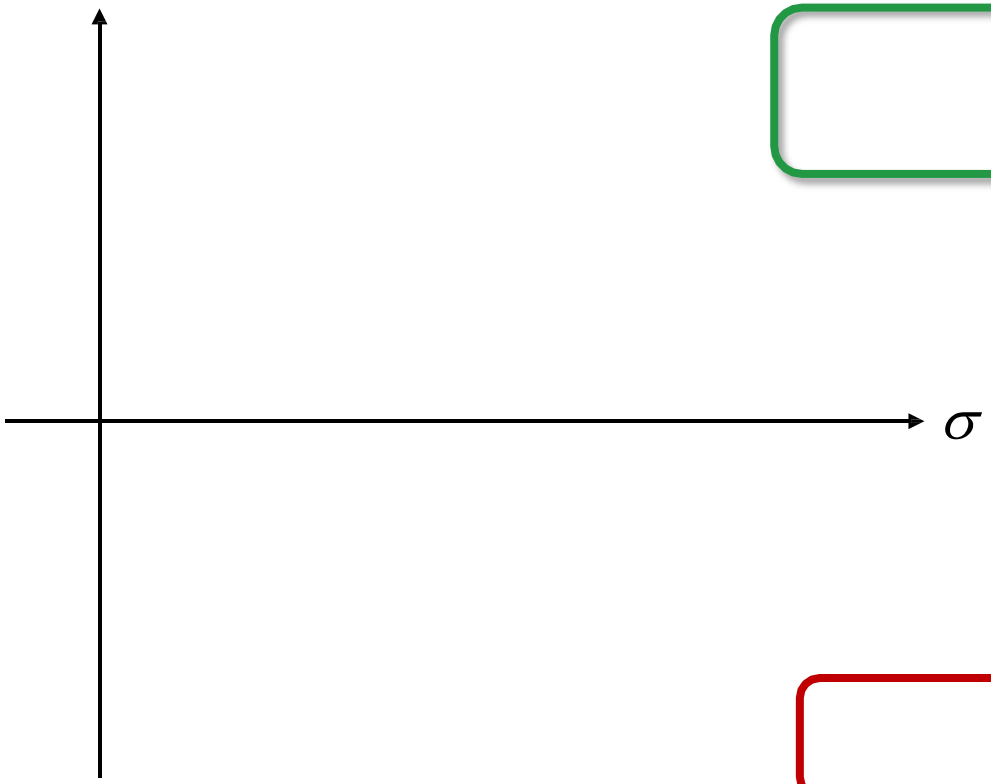
➡ Aus Symmetriegründen sind alle Seiten gleich beansprucht.

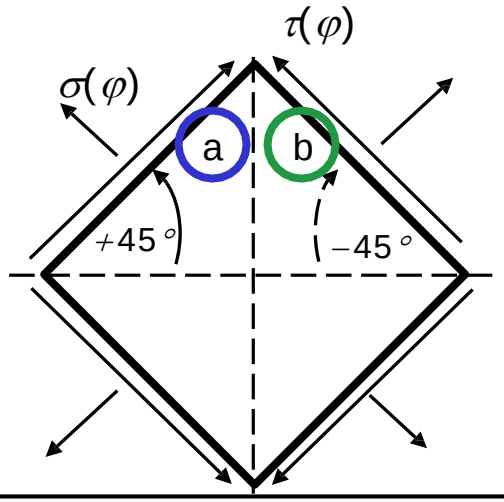
# 2. Mohrscher Spannungskreis

$$\sigma_a = \frac{\sigma_0}{2} \; ; \; \tau_a = +\frac{\sigma_0}{2} \rightarrow A(\sigma_a, \tau_a)$$

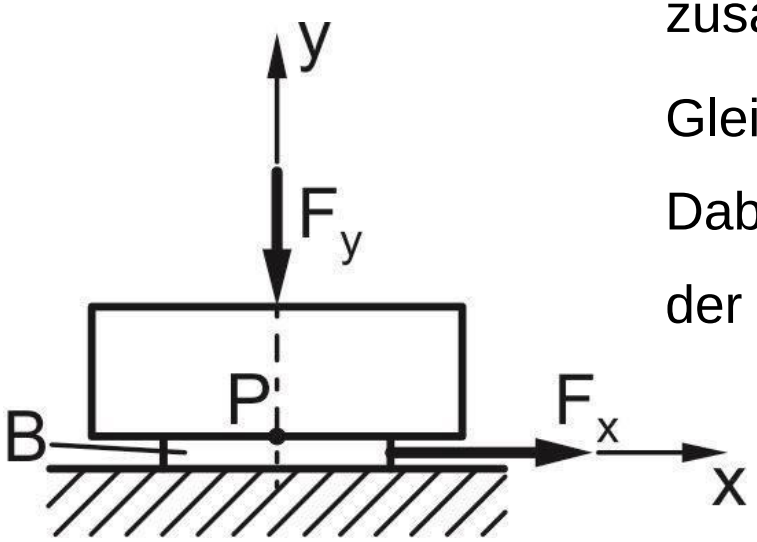
$$\sigma_b = \frac{\sigma_0}{2} \; ; \; \tau_b = -\frac{\sigma_0}{2} \rightarrow B(\sigma_b, \tau_b)$$

$$2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$



# Aufgabe 18:




Eine Blechscheibe B wird gemäß Skizze zwischen zwei Pressplatten mit der **Kraft $F_Y$** zusammengedrückt.

Gleichzeitig wirkt noch die **Zugkraft $F_X$** auf die Scheibe.

Dabei entstehen im Punkt P an der Oberfläche der Scheibe folgende Spannungen:

aus Zug : $\sigma_x = 200\ \text{MPa}$

aus Druck : $\sigma_y = -100\ \text{MPa}$

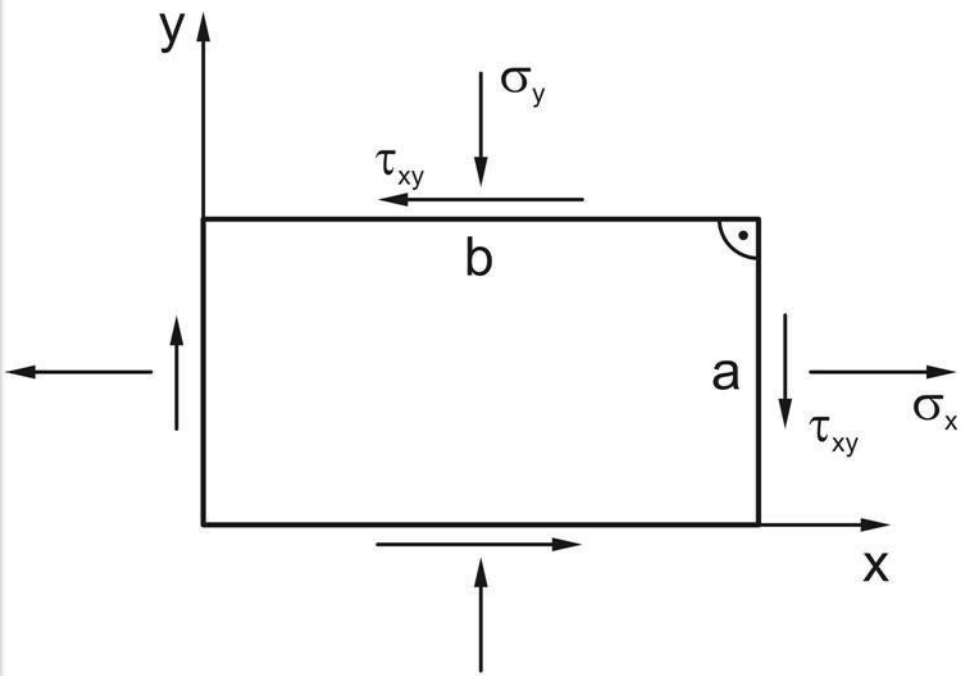
aus Reibung: $\tau_{xy} = 40\ \text{MPa}$

1. Wie groß ist die **größte Zug- bzw. Druckspannung** im Punkt P?
2. Unter welchem **Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zur x-Richtung** treten diese Spannungen auf?

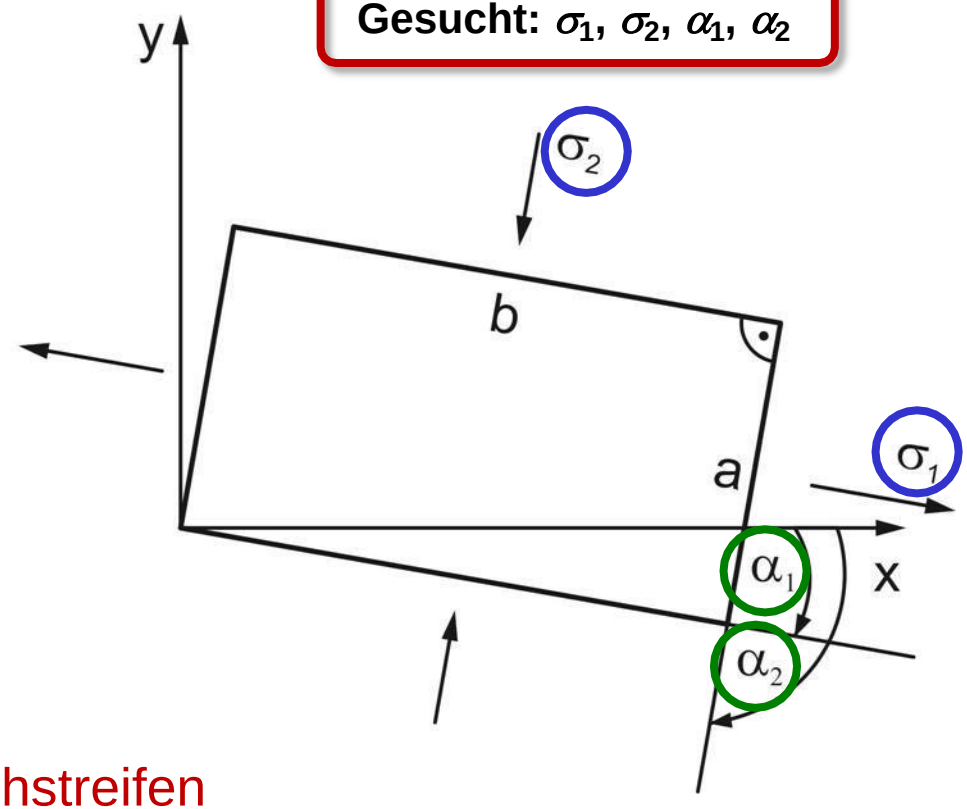
# Beanspruchung in (x,y)-Ebene

**x-y:** (x,y)-Koordinatensystem

**1-2:** HAS (Hauptachsensystem)




**Gesucht:** $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$




Element am Punkt P aus dem Blechstreifen

# 1. Lösung mit Mohrschem Spannungskreis

$(100\,\text{MPa} \mathrel{\hat{=}} 5\,\text{cm})$

$\sigma_x = 200\ \text{MPa}$

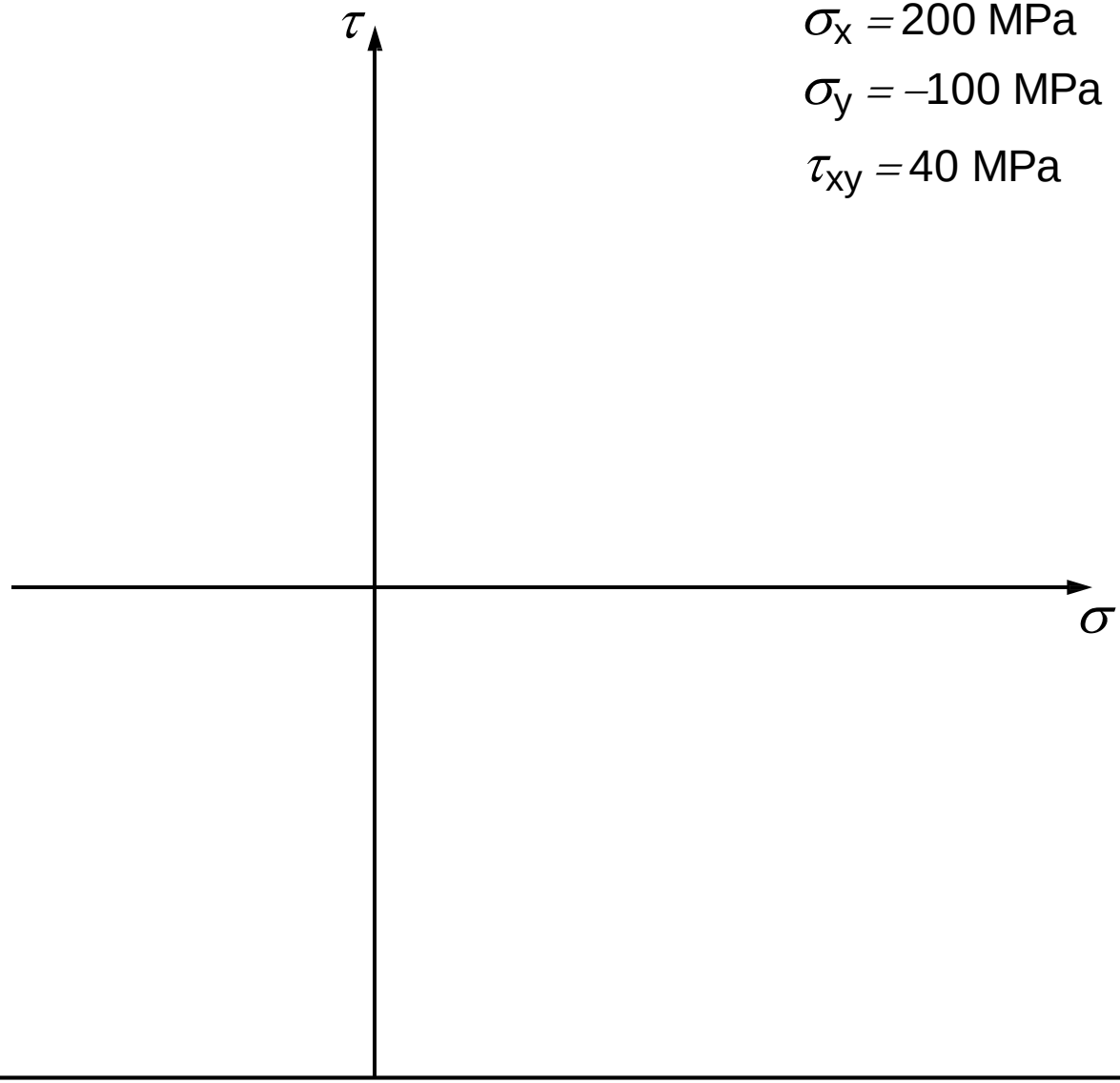
$\sigma_y = -100\ \text{MPa}$

$\tau_{xy} = 40\ \text{MPa}$

Seite a:

Seite b:

$a \perp b \rightarrow$ AB




**Abgelesen:**

$\sigma_1 = +205\,\text{MPa}$

$\sigma_2 = -105\,\text{MPa}$

$2\alpha_1 = (-)15^\circ \rightarrow \alpha_1 = (-)7{,}5^\circ$

$2\alpha_2 = (-)195^\circ \rightarrow \alpha_2 = (-)97{,}5^\circ$

# 2. Rechnerische Lösung

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 + \sqrt{150^2 + 40^2} = +205{,}2\,\text{MPa}$$

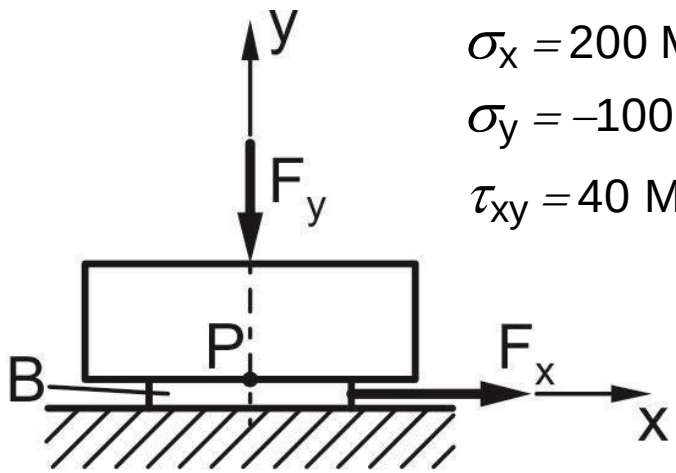
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50 - \sqrt{150^2 + 40^2} = -105{,}2\,\text{MPa}$$

$$\tan(2\alpha_1) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 40}{300} = -0{,}2667$$

$$2\alpha_1 = (-)14{,}93^\circ \rightarrow \alpha_1 = (-)7{,}47^\circ$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - 90^\circ = (-)97{,}47^\circ$$

(„-“: im Uhrzeigersinn)




$\sigma_x = 200$ MPa

$\sigma_y = -100$ MPa

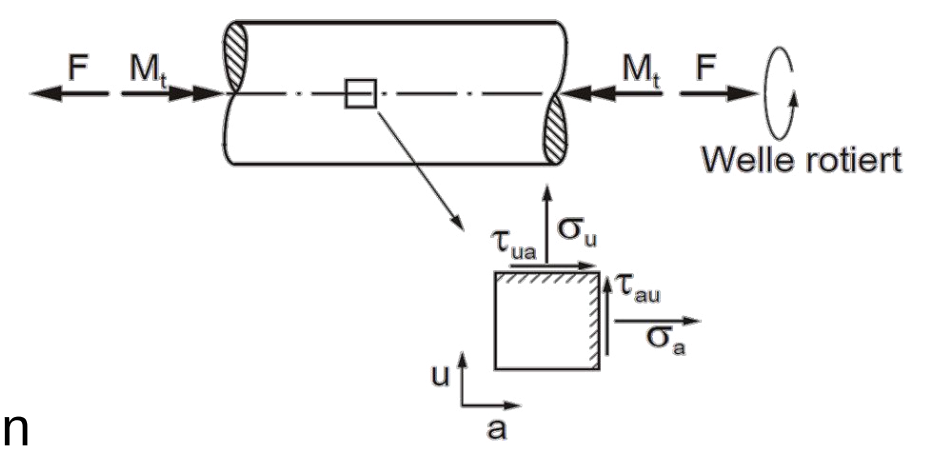
$\tau_{xy} = 40$ MPa

# Aufgabe 19:

Ein Stahlrohr (Außendurchmesser $d_a$ = 100 mm, Wanddicke s = 10 mm) ist durch die **Zugkraft F = 425 kN** und das **Torsionsmoment $M_t$ = 9250 Nm** statisch belastet.

1. Man zeichne den Mohrschen Spannungskreis für die höchstbeanspruchte Stelle.
2. Welches sind die Extremwerte der auftretenden Normalspannungen (= Hauptspannungen) und Schubspannungen?
3. In welchen Schnittflächen treten sie auf?
4. Welche Schnittflächen sind frei von Schubspannungen, welche sind frei von Normalspannungen?

# Hinweise Aufgabe 19

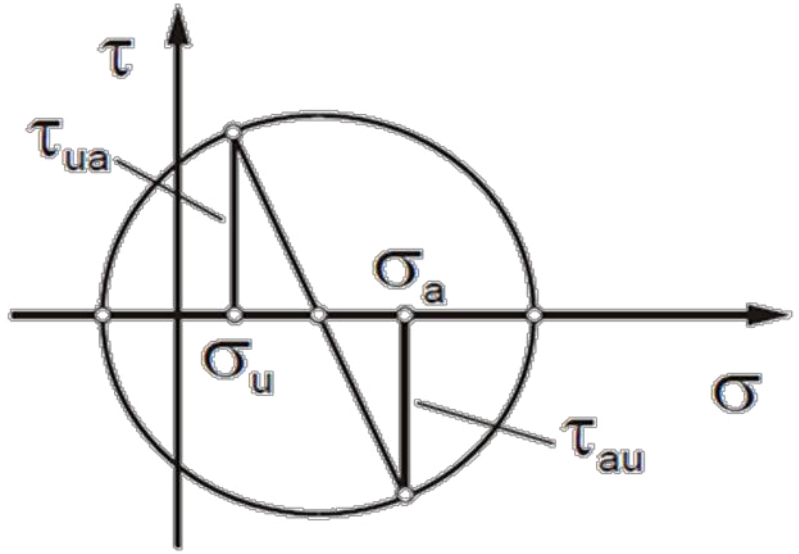



- Höchstbeanspruchte Stelle:
  Oberfläche → Oberflächenelement

- $\sigma_1, \sigma_3, \tau_{min}, \tau_{max}$ aus Mohrschem Spannungskreis ablesen oder rechnen

Eine Schubspannung in der (a,u)-Ebene ist nach der Mohrschen Konvention **positiv**, wenn in **Pfeilrichtung** der Schubspannung das Würfelelement **rechts** liegt.
Liegt das Würfelelement **links**, ist die Schubspannung **negativ**.

(gilt **nicht** im Spannungstensor!)

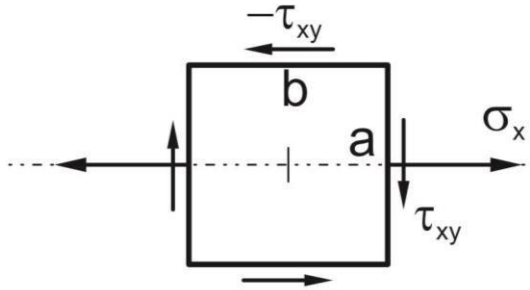


# 1. Man zeichne den Mohrschen Spannungskreis für die höchstbeanspruchte Stelle.

Höchstbeanspruchte Stelle: Oberfläche → Oberflächenelement

$d_a = 100\,mm$

$d_i = d_a - 2s = 80\,mm$




$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi\left(d_a^2 - d_i^2\right)} = \frac{4 \cdot 425000}{\pi\left(100^2 - 80^2\right)} = 150{,}3\,MPa$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t \cdot 16 \cdot d_a}{\pi\left(d_a^4 - d_i^4\right)} = \frac{9250 \cdot 10^3 \cdot 16 \cdot 100}{\pi\left(100^4 - 80^4\right)} = 79{,}8\,MPa$$

a: $\sigma_x$ , $\tau_{xy} \rightarrow A$

b: $0$ , $-\tau_{xy} \rightarrow B$

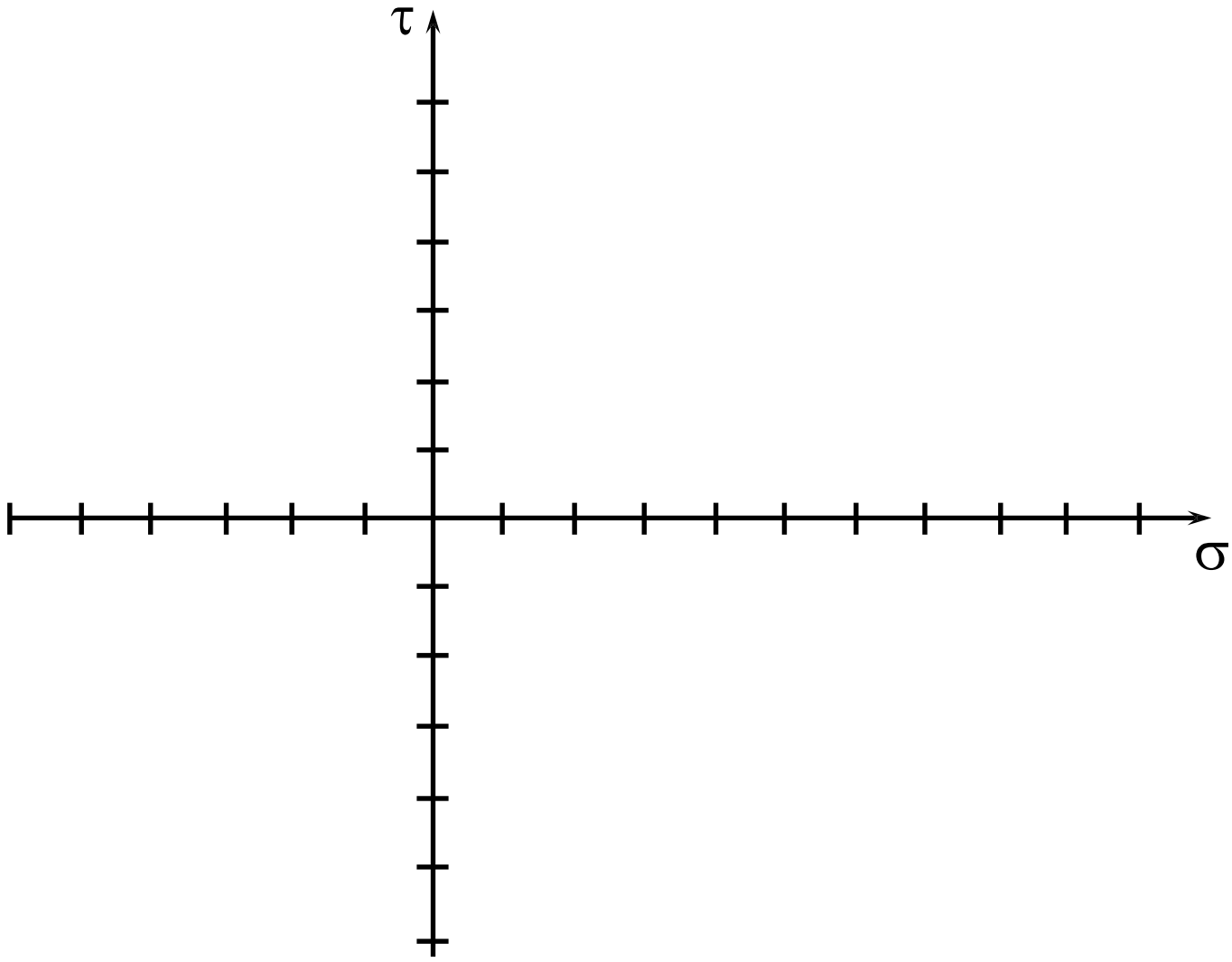
# 1. Man zeichne den Mohrschen Spannungskreis für die höchstbeanspruchte Stelle (Fortsetzung).

$\sigma_x = 150{,}3\,\text{MPa}$

$\tau_{xy} = 79{,}8\,\text{MPa}$

a: $\sigma_x$ , $\tau_{xy} \rightarrow A$

b: $0$ , $-\tau_{xy} \rightarrow B$



## 2. Welches sind die Extremwerte der auftretenden Normalspannungen (= Hauptspannungen) und Schubspannungen?

$\sigma_1 , \sigma_3 , \tau_{max} , \tau_{min}$

- aus Mohrschem Spannungskreis **ablesen**
- oder **rechnen**

$\sigma_1 = 184{,}5\text{MPa}$

$\sigma_3 = -34{,}5\text{MPa}$

$\tau_{max} = +109{,}5\text{MPa}$

$\tau_{min} = -109{,}5\text{MPa}$

# 2. Welches sind die Extremwerte der auftretenden Normalspannungen (= Hauptspannungen) und Schubspannungen (Fortsetzung)?

$\sigma_1, \sigma_3, \tau_{max}, \tau_{min}$

- aus Mohrschem Spannungskreis **ablesen**
- oder **rechnen**

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{150{,}3}{2} + \sqrt{\left(\frac{150{,}3}{2}\right)^2 + 79{,}8^2} = 184{,}5\,\text{MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{150{,}3}{2} - \sqrt{\left(\frac{150{,}3}{2}\right)^2 + 79{,}8^2} = -34{,}5\,\text{MPa}$$

$$\tau_{max} = +\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{184{,}5 - (-34{,}5)}{2} = +109{,}5\,\text{MPa}$$

$$\tau_{min} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = -\frac{184{,}5 - (-34{,}5)}{2} = -109{,}5\,\text{MPa}$$

# 3. In welchen Schnittflächen treten sie auf?

$\sigma_1$ tritt in Schnittflächen auf, die um den Winkel $\varphi_1$ gegen die Schnittflächen von $\sigma_x$ (= Querschnitt) geneigt sind: $\sigma = \sigma_1$ für $\varphi = \varphi_1$

Aus dem Mohrschen Spannungskreis folgt:

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x/2} = \frac{2 \cdot 79{,}8}{150{,}3} = 1{,}061$$

$$2\varphi_1 = 46{,}72° \rightarrow \varphi_1 = (-)23{,}3° \qquad -: \text{im UZS}$$

$\sigma = \sigma_3$ für $\varphi = \varphi_2$: $\quad 2\varphi_2 = 2\varphi_1 + \pi \rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = (-)113{,}3°$

$\tau = \tau_{max}$ für $\varphi = \varphi_{\tau_1}$: $\quad 2\varphi_{\tau_1} = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_1 \rightarrow \varphi_{\tau_1} = \frac{\pi}{4} - \varphi_1 = (+)21{,}7° \qquad +: \text{gegen UZS}$

$\tau = \tau_{min}$ für $\varphi = \varphi_{\tau_2}$: $\quad 2\varphi_{\tau_2} = 2\varphi_{\tau_1} + \pi \rightarrow \varphi_{\tau_2} = \varphi_{\tau_1} + \frac{\pi}{2} = (+)111{,}7°$

4. Welche Schnittflächen sind frei von Schubspannungen, welche sind frei von Normalspannungen?

$\tau = 0$ für $\varphi = \varphi_1 = (-)23{,}3°$ und $\varphi = \varphi_2 = (-)113{,}3°$ } Hauptschnitte

$\sigma = 0$ für $\varphi = \alpha_1$ und $\varphi = \alpha_2$

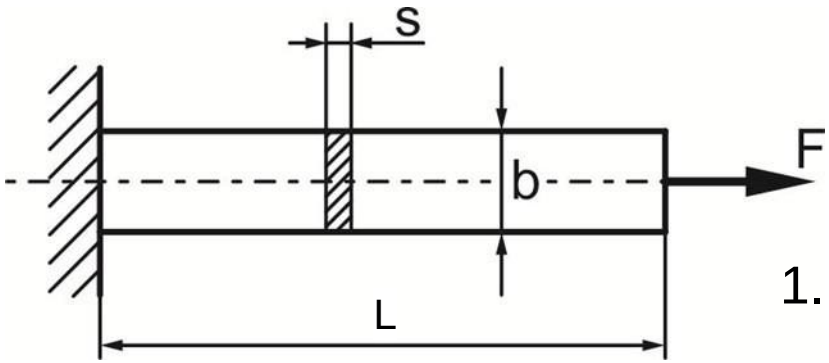
$2\alpha_1 = 2 \cdot 2\varphi_{\tau_1}$ $\quad \alpha_1 = 2\varphi_{\tau_1} = (+)43{,}4°$

$2\alpha_2 = \pi$ $\quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} = (+)90°$

# Aufgabe 20:

Eine einseitig eingespannte Platte aus Duraluminium AlCuMg1
mit der Länge L= 650 mm, der Breite b = 150 mm und der Dicke s = 5 mm wird
in Längsrichtung durch die Kraft F = 112,5 kN belastet (siehe Skizze).

**AlCuMg1:** $R_{p0,2}$ = 250 MPa, $R_m$ = 380 MPa, E = 72000 MPa, $\mu$ = 0,33




1. Um welchen Betrag verlängert sich die Platte?
2. Wie ändert sich die Verlängerung, wenn die Längskanten so geführt sind, dass die Breite b gleich bleibt?

# Hinweise Aufgabe 20:

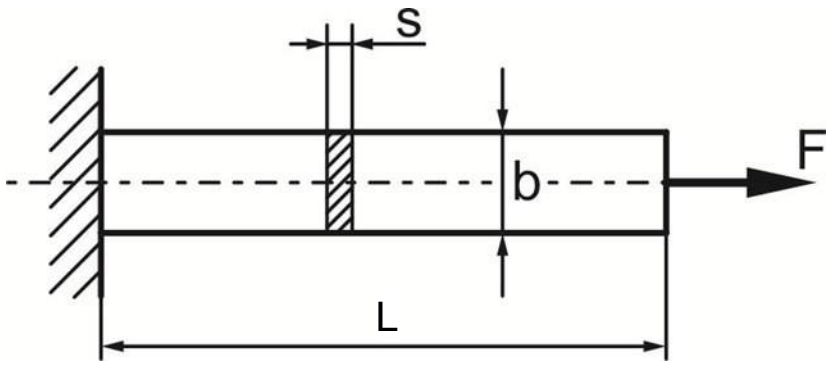
- zu 1. : einachsiger Spannungszustand

  $\sigma_x \neq 0 \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$

- zu 2. : zweiachsiger Spannungszustand

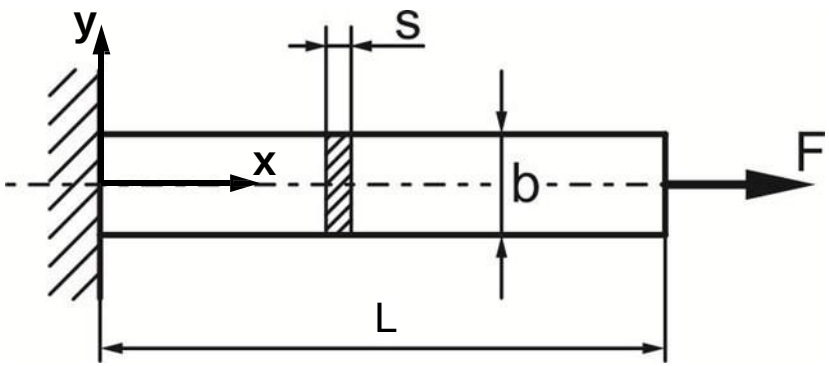
  b = konst. → $\varepsilon_y = 0$ → $\sigma_y \neq 0$

  $\sigma_z = 0$



# 1. Um welchen Betrag verlängert sich die Platte?

1-achsiger Spannungszustand:




$$\Delta L = \varepsilon_x \cdot L$$

mit

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

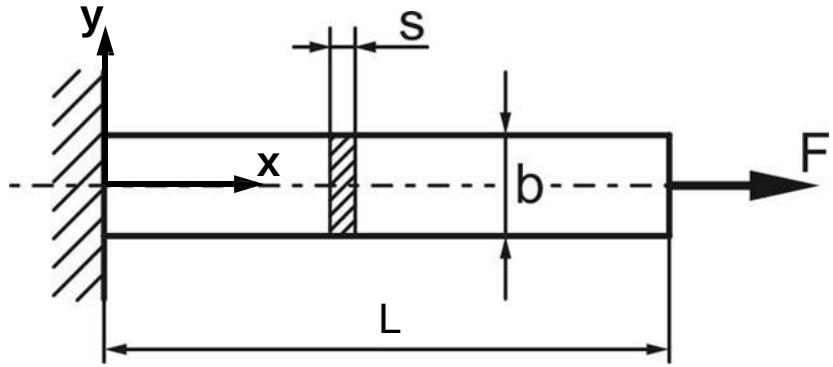
$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{F}{b \cdot s} = \frac{112500}{150 \cdot 5} = 150\,\text{MPa}$$

$$\Delta L_1 = \frac{\sigma_x \cdot L}{E} = \frac{150 \cdot 650}{72000} = 1{,}35\,\text{mm}$$

## 2. Wie ändert sich die Verlängerung, wenn die Längskanten so geführt sind, dass die Breite b gleich bleibt?

2-achsiger Spannungszustand:

b = const. → $\varepsilon_y = 0$ →




Gegeben: $\varepsilon_y, \sigma_x$

Gesucht: $\varepsilon_x \rightarrow \Delta L$

(1) $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)$

(2) $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y) = 0 = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$

aus (2) → $\sigma_y = \mu\sigma_x$ in (1):

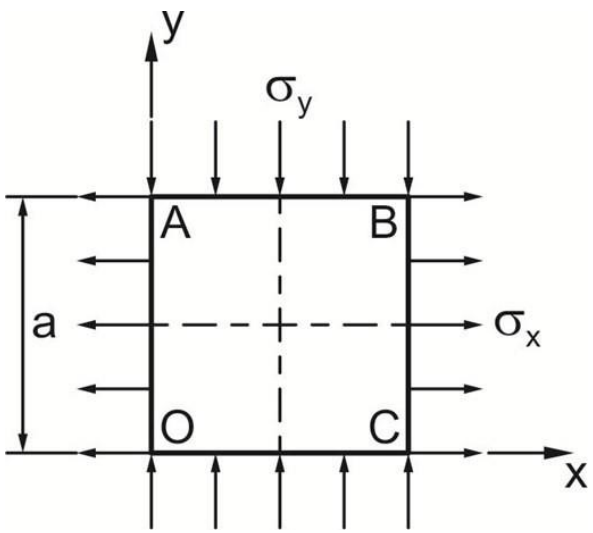
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_x - \mu^2\sigma_x) = (1-\mu^2)\cdot\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\Delta L = \varepsilon_x \cdot L = (1-\mu^2)\cdot\frac{\sigma_x}{E}\cdot L \quad [= (1-\mu^2)\cdot \Delta L_1]$$

$$\Delta L = (1-0{,}33^2)\cdot\frac{150\cdot 650}{72000} = 1{,}21\,\text{mm}$$

Vgl. 1-achsiger Spannungszustand: $\Delta L_1 = 1{,}35\,\text{mm}$

# Aufgabe 21:




Eine quadratische Scheibe aus Stahl S355 mit der Kantenlänge a = 180 mm und der Dicke s = 6 mm ist durch die Spannungen $\sigma_x$ = 125 MPa und $\sigma_y$ = -125 MPa beansprucht (siehe Skizze).

**S355:** $R_e$ = 355 MPa, $R_m$ = 520 MPa, E = 210000 MPa, $\mu$ = 0,3, $A_5$ = 22%

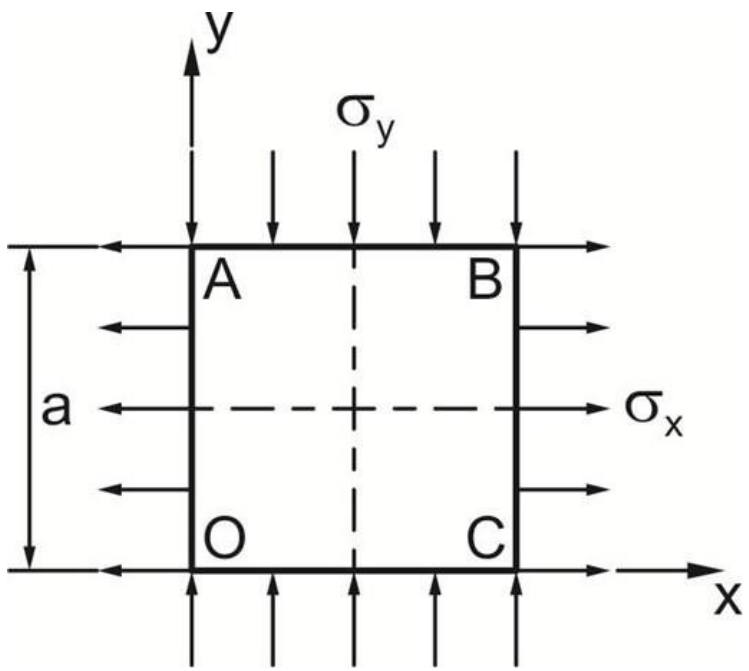
1. Wie groß sind die Kräfte $F_x$ und $F_y$, durch welche die Spannungen $\sigma_x$ und $\sigma_y$ erzeugt werden?
2. Wie groß sind die Längenänderungen der Scheibe in x- und y-Richtung?
3. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Beanspruchung der Scheibe (Maßstab: 100 MPa ≙ 40 mm). Wie lautet die Gleichung dieses Kreises? Wie ist der Spannungszustand in der Scheibe?
4. Welche Spannungen wirken an den diagonalen Schnittflächen OB und AC?
5. Bei welchem Grundbelastungsfall tritt auch eine derartige Belastung auf?

# Hinweise Aufgabe 21:

$$\sigma = F / A \quad \rightarrow \quad F = \sigma \cdot A$$

$$\varepsilon = \Delta L / L \quad \rightarrow \quad \Delta L = \varepsilon \cdot L$$

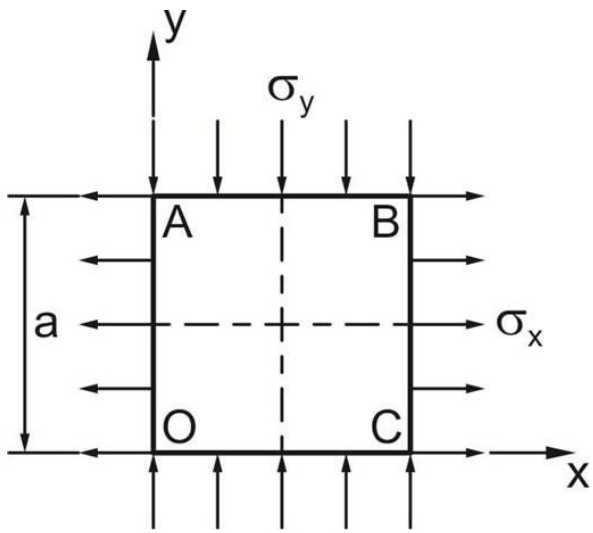
mit L = a



1. Wie groß sind die Kräfte $F_x$ und $F_y$, durch welche die Spannungen $\sigma_x$ und $\sigma_y$ erzeugt werden?

$$F_x = A_x \cdot \sigma_x = a \cdot s \cdot \sigma_x = 180 \cdot 6 \cdot 125 = 135000\,\text{N} = 135\,\text{kN}$$

$$F_y = A_y \cdot \sigma_y = a \cdot s \cdot \sigma_y = -180 \cdot 6 \cdot 125 = -135000\,\text{N} = -135\,\text{kN}$$



# 2. Wie groß sind die Längenänderungen der Scheibe in x- und y-Richtung?

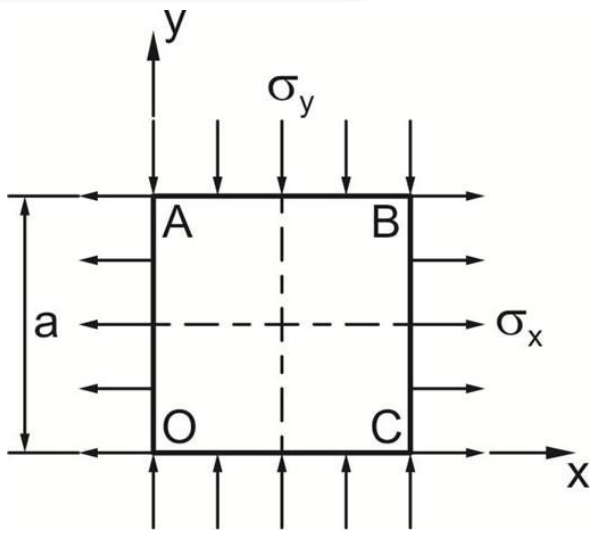
$$\Delta L = \varepsilon \cdot a$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) = \frac{1}{210000}\left(125 + 0{,}3 \cdot 125\right) = +0{,}0007738 = +0{,}07738\,\%$$

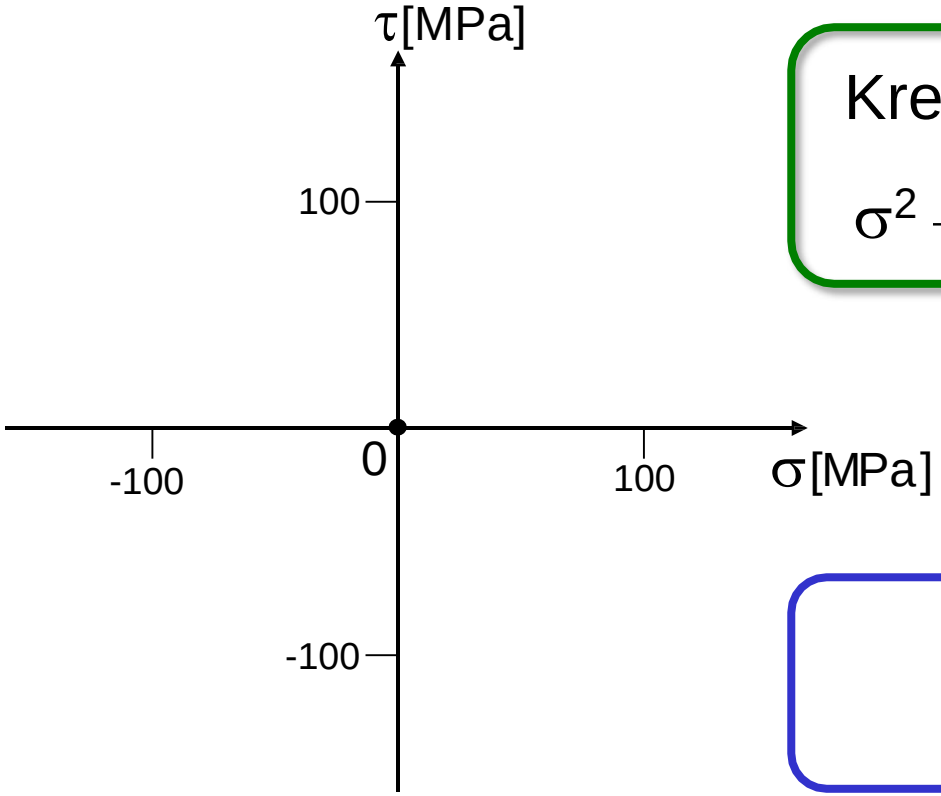
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = \frac{1}{210000}\left(-125 - 0{,}3 \cdot 125\right) = -0{,}0007738 = -0{,}07738\,\%$$

$$\Delta L_x = 0{,}0007738 \cdot 180 = 0{,}139\,\text{mm}$$

$$\Delta L_y = -0{,}0007738 \cdot 180 = -0{,}139\,\text{mm}$$



3. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Beanspruchung der Scheibe (Maßstab: 100 MPa ≙ 40 mm).
Wie lautet die Gleichung dieses Kreises?
Wie ist der Spannungszustand in der Scheibe?

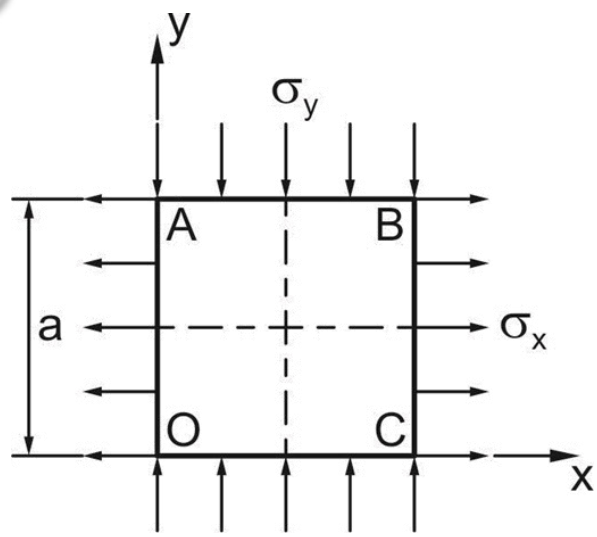



Kreisgleichung:

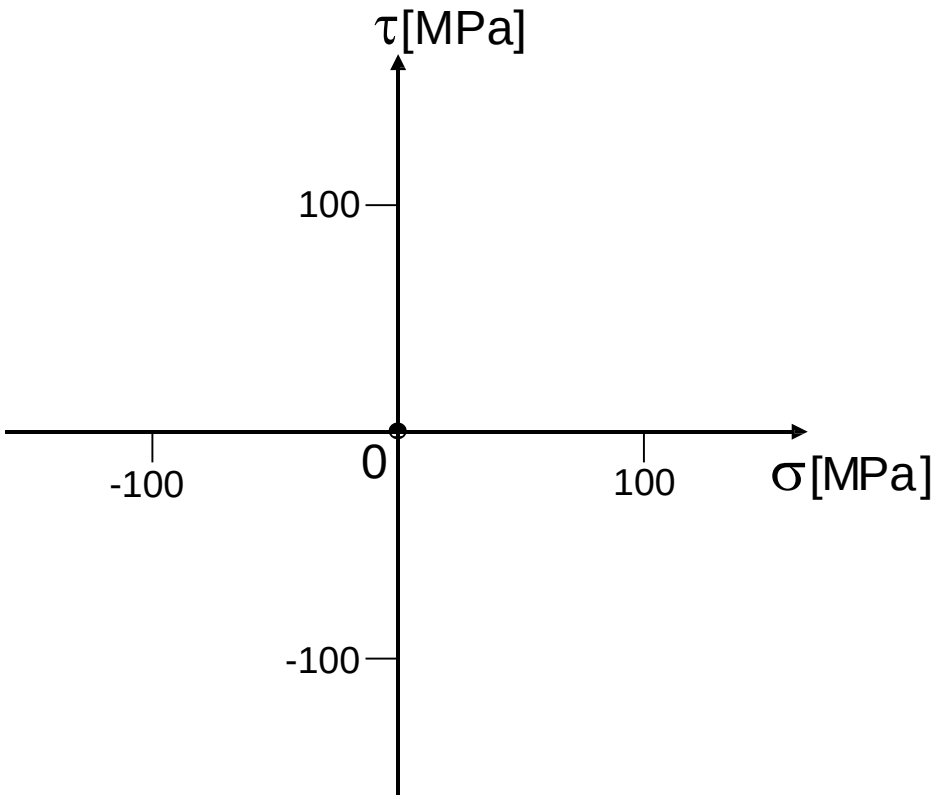
$$\sigma^2 + \tau^2 = (125\,\text{MPa})^2$$

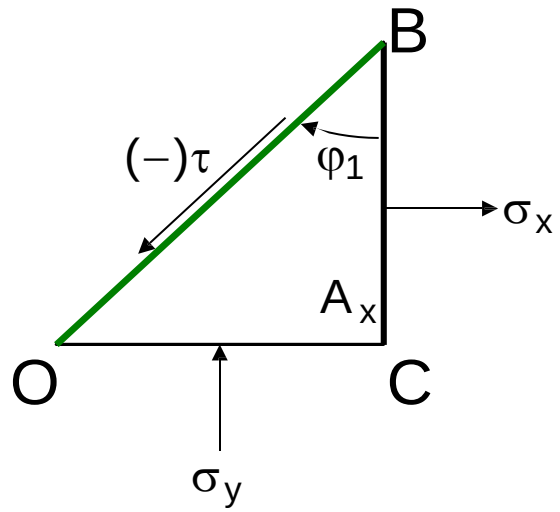
$$\sigma_x = +125\text{MPa}$$

$$\sigma_y = -125\text{MPa}$$



# 4. Welche Spannungen wirken an den diagonalen Schnittflächen OB und AC?

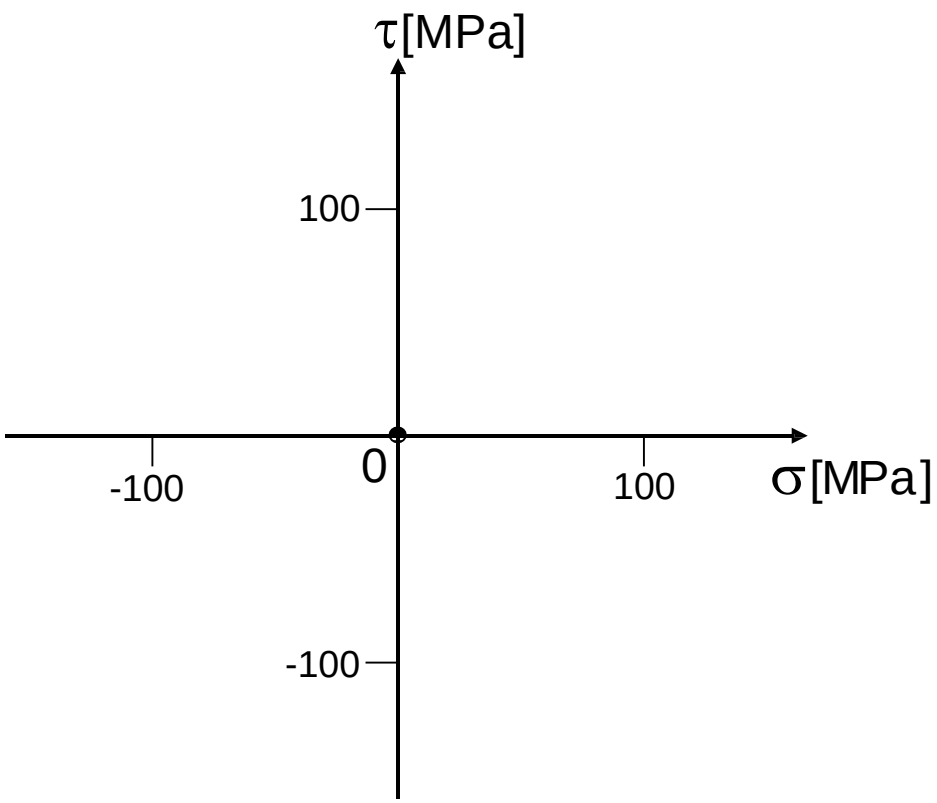


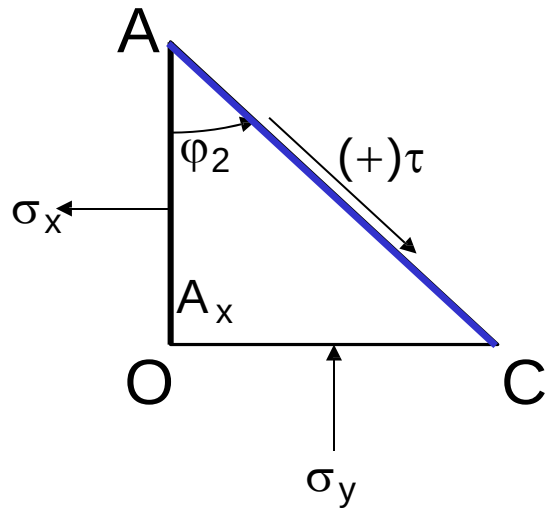




$$\angle(A_x, \overline{OB}) = -45° = \varphi_1$$

Aus Mohrschem Kreis:

# 4. Welche Spannungen wirken an den diagonalen Schnittflächen OB und AC (Fortsetzung)?

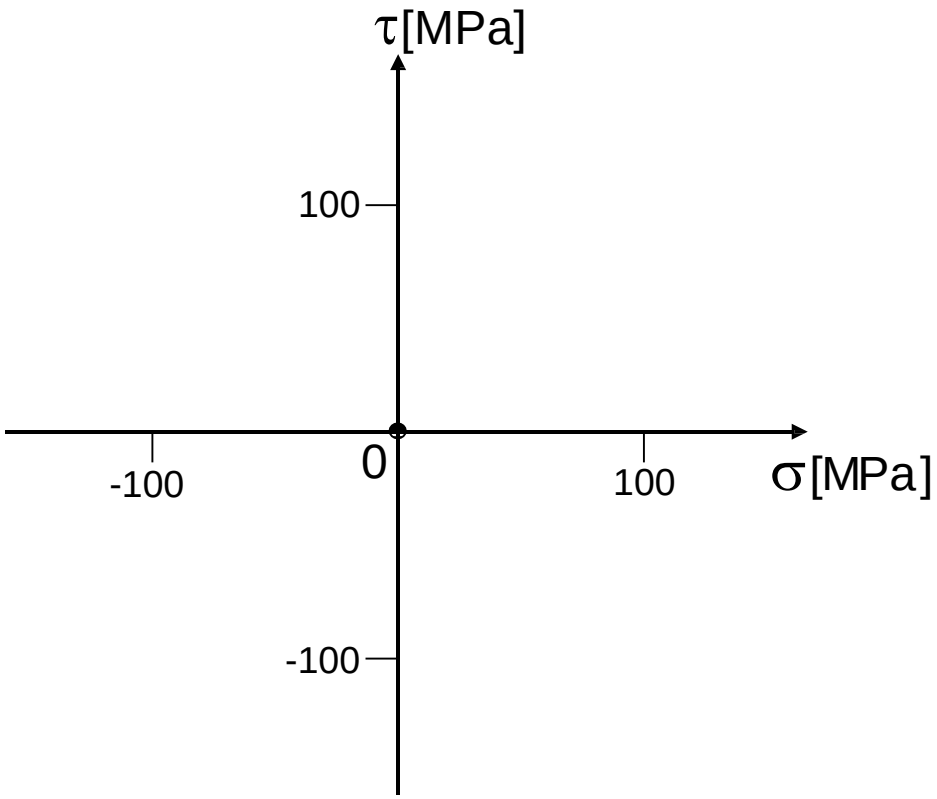



$$\angle(A_x, \overline{AC}) = +45° = \varphi_2$$

Aus Mohrschem Kreis:

5. Bei welchem Grundbelastungsfall tritt auch eine derartige Belastung auf?



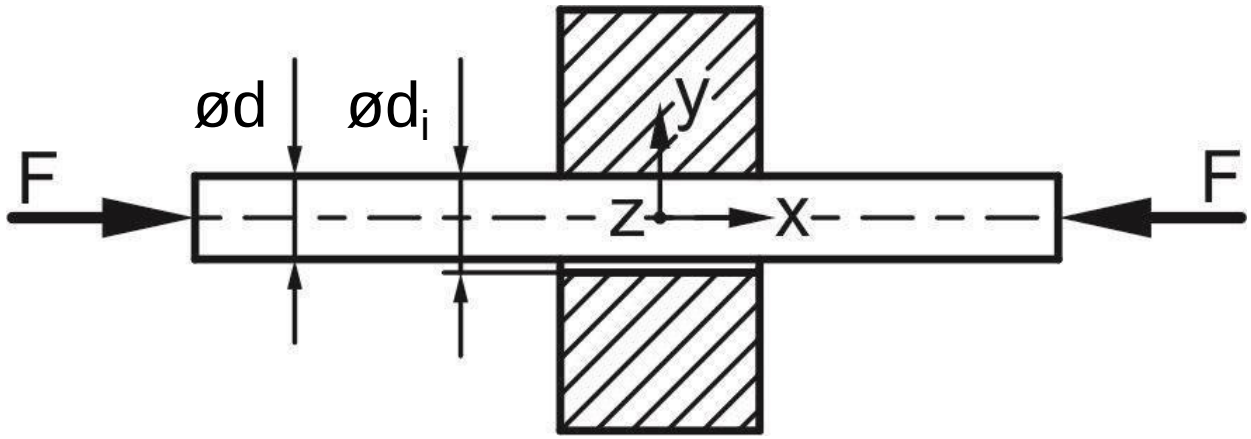
# Aufgabe 22:

Auf einem **polierten Rundstab** aus Walzbronze CuSn6 mit dem Durchmesser d = 40,00 mm gleitet ein Ring mit dem Innendurchmesser $d_i$ = 40,01 mm.

Der Stab ist durch eine **axiale Druckkraft F** belastet.

Bei welcher Kraft wird die Gleitbewegung des Ringes blockiert?

**CuSn6:** $R_{p0,2}$ = 250 MPa, $R_m$ = 450 MPa, E = 116000 MPa , $\mu$ = 0,35



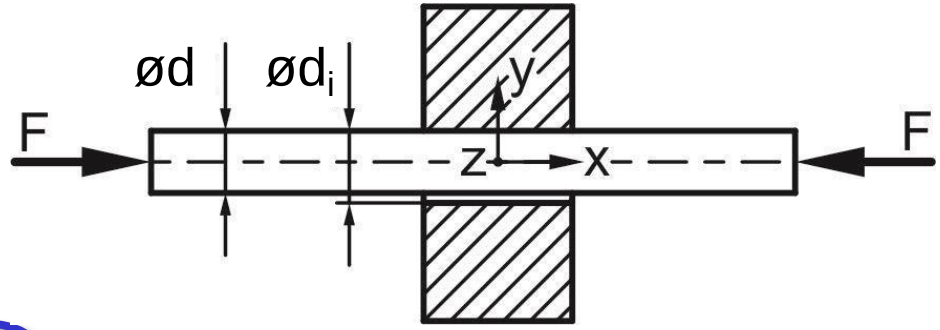
## Hinweise zu Aufgabe 22:

Spannungszustand bis zum Blockieren:

1-achsiger Spannungszustand

# Bei welcher Kraft wird die Gleitbewegung des Ringes blockiert?

$F = 0 \rightarrow$ Spalt $s_0 = d_i - d = 0{,}01$ mm




Blockieren, wenn $d = d_i$ oder $s = 0$ wird
(Reibungseinflüsse werden vernachlässigt)

## Querdehnung des Stabes infolge F:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \; ; \quad 1\text{– achsiger SPZ}: \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} = -\mu\frac{F}{A\cdot E} = -\mu\frac{4\cdot F}{\pi\cdot d^2\cdot E} \quad (1)$$

Der Stab berührt den Ring, wenn $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{s_0}{d}$ ist. (2)

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad s_0 \equiv \Delta l \qquad d \equiv l_0$

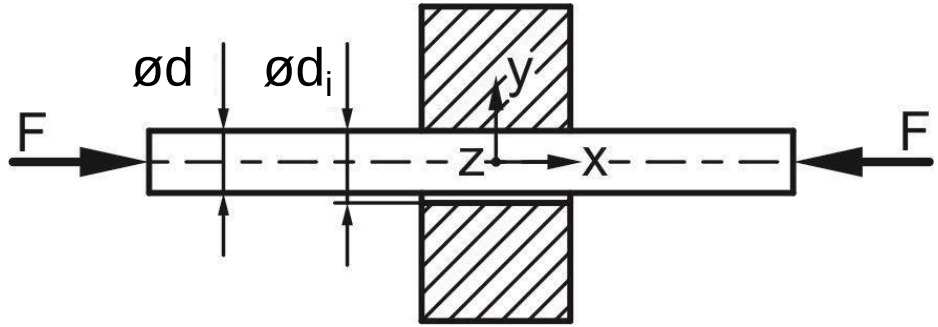
gleichsetzen: (1) = (2)

$$-\mu\frac{4F}{\pi d^2 E} = \frac{s_0}{d} \Rightarrow F = -\frac{\pi d s_0 E}{4\mu} = -\frac{\pi\cdot 40\cdot 0{,}01\cdot 116000}{4\cdot 0{,}35}$$

$$F = -104121\text{N} = -104\text{kN}$$

# Bei welcher Kraft wird die Gleitbewegung des Ringes blockiert (Fortsetzung)?

$$F = -104121\,N = -104\,kN$$




## Kontrolle:

$$R_{p0,2} = 250\ MPa$$

$$\sigma < R_{p0,2}\ ?$$

$$|\sigma| = \frac{4 \cdot F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 104121}{\pi \cdot 40^2} = 82{,}9\ MPa < \sigma_{dF} = R_{p0,2}$$

# Aufgabe 23:

An der **höchstbeanspruchten Stelle der Oberfläche** eines Gehäuses aus S235 wurden unter **statischer Belastung** die Hauptdehnungen $\varepsilon_1 = 0{,}050\ \%$ und $\varepsilon_2 = -0{,}022\ \%$ gemessen.

**S235:** $R_e = 240$ MPa; $R_m = 400$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 26\%$

**EN-GJL-350**: $R_m = 350$ MPa; $E = 100000$ MPa; $\mu = 0{,}25$

1. Wie groß sind die **Hauptspannungen** $\sigma_1$ und $\sigma_2$?
2. Wie groß ist die **größte Schubspannung** $\tau_{max}$?
3. Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**?
4. Wie groß wären die Hauptspannungen und die **Sicherheit gegen Versagen**, wenn das **Gehäuse aus EN-GJL-350** bestünde und die gleichen Dehnungen gemessen würden?

## Hinweise zu Aufgabe 23:

Lastfreie Oberfläche:

maximal 2-achsiger Spannungszustand

→ keine höhere Spannungsmehrachsigkeit möglich

Radius des Mohrschen Spannungskreises $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

FB: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$

RS: $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$ (Fließen) $\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$ (Bruch)

## 1. Wie groß sind die Hauptspannungen $\sigma_1$ und $\sigma_2$?

Lastfreie Oberfläche → (höchstens) zweiachsiger SPZ

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \frac{210000}{1-0{,}3^2}(0{,}050 - 0{,}3 \cdot 0{,}022)\cdot 10^{-2} = 100{,}2\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \frac{210000}{1-0{,}3^2}(-0{,}022 + 0{,}3 \cdot 0{,}050)\cdot 10^{-2} = -16{,}2\,\text{MPa}$$

mittlere Hauptspannung $\sigma_3 = 0$

(nach Vorzeichenkonvention eigentlich: $\sigma_1 = 100{,}2 \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -16{,}2$ )

## 2. Wie groß ist die größte Schubspannung $\tau_{max}$?

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(100{,}2 + 16{,}2) = 58{,}2\,\text{MPa}$$

## 3. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen?

Versagen → Fließen und Bruch (S235: zäher Werkstoff)  FB: $\sigma_v \le \sigma_{zul}$

$$\sigma_v(SH) = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_2 = 100{,}2 - (-16{,}2) = 116{,}4\ \text{MPa}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_v(SH)} = \frac{240}{116{,}4} = 2{,}06 > 1{,}5 \qquad S_B = \frac{R_m}{\sigma_v(SH)} = \frac{400}{116{,}4} = 3{,}43 > 2$$

$$\sigma_v(GEH) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = 109{,}2\ \text{MPa}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_v(GEH)} = \frac{240}{109{,}2} = 2{,}20 > 1{,}5 \qquad S_B = \frac{R_m}{\sigma_v(GEH)} = \frac{400}{109{,}2} = 3{,}66 > 2$$

**Anmerkung:** ***SH konservativ***, da größere (Vergleichs-)Spannungen als erforderlich bestimmt wurden. Damit ist auch der berechnete Sicherheitsfaktor $S_F$ geringer, d. h. der Sicherheitsfaktor ist in Realität größer.

# 3. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen (Fortsetzung)?

| Vergleichsspannungen | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Spannungszustand | | | |
| Hypothese | dreiachsig | zweiachsig | | |
| | $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ | $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0^{+)}$ | $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ | $\sigma_b, \tau_t$ |
| NH | $\sigma_1$ (Zug) bzw. $\sigma_3$ (Druck) | $\sigma_1$ | $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ | $\frac{\sigma_b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$ |
| SH | $\sigma_1 - \sigma_3$ | $\sigma_1$ | $\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}^{++)}$ | $\sqrt{\sigma_b^2 + 4\tau_t^2}$ |
| GEH | $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ | $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$ | $\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$ | $\sqrt{\sigma_b^2 + 3\tau_t^2}$ |

$^{+)}$ Für die Fälle $\sigma_1 > 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$ bzw. $\sigma_1 = 0; \sigma_2 < 0; \sigma_3 < 0$ ergibt sich $\sigma_V$ aus Spalte 1

$^{++)}$ gilt nur für $\sigma_x\sigma_y \leq \tau_{xy}^2$; für $\sigma_x\sigma_y > \tau_{xy}^2$ ist $\sigma_V$ (SH) = $\sigma_V$ (NH)

## 4. Wie groß wären die Hauptspannungen und die Sicherheit gegen Versagen, wenn das Gehäuse aus EN-GJL-350 bestünde und die gleichen Dehnungen gemessen würden?

EN-GJL-350: → E = 100000 MPa, μ = 0,25

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) = \frac{100000}{1-0{,}25^2}(0{,}050 - 0{,}25 \cdot 0{,}022)\cdot 10^{-2} = 47{,}5\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) = \frac{100000}{1-0{,}25^2}(-0{,}022 + 0{,}25 \cdot 0{,}050)\cdot 10^{-2} = -10{,}1\,\text{MPa}$$

Versagen → Bruch (EN-GJL-350: spröder Werkstoff)

FB: $\sigma_v \le \sigma_{zul}$

$\sigma_v(NH) = \sigma_{max} = \sigma_1 = 47{,}5\,\text{MPa}$

$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$ ; $R_m = 350\,\text{MPa}$

→ $S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = \frac{350}{47{,}5} = 7{,}37 > 4$ (ausreichend)

# Aufgabe 24:

Auf eine vertikale **Turbinenwelle** mit dem Durchmesser d = 90 mm aus dem Stahl C45V wirkt im Betrieb ein **statisches Torsionsmoment** von $M_t$ = 19750 Nm und eine **statische Zugkraft** von F = 1350 kN.

**C45V:** $R_e$ = 490 MPa; $R_m$ = 710 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 16%

**30CrMoV9**: $R_{p0,2}$ = 1050 MPa, $R_m$ = 1450 MPa, E = 210000 MPa, μ = 0,3, $A_5$ = 6%

1. Wie groß ist die **Sicherheit gegen Versagen**?
2. Um ein höheres Torsionsmoment aufnehmen zu können, wird eine **vergütete Welle** aus 30CrMoV9 eingebaut.
   Auf welchen Betrag kann dadurch das Torsionsmoment **bei gleicher Zugkraft** und **gleicher Sicherheit** gesteigert werden?

## Hinweise zu Aufgabe 24:

1. Zug + Torsion:

   mehrachsiger Spannungszustand (2D)

   → Vergleichsspannung:

   → C45: duktiler Werkstoff (GEH, SH)

   FB: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$

2. Berechnung 30CrMoV9:

   Rechnung gegen Fließen oder Bruch ?

   → kleinere Spannung bei gleicher Sicherheit

# 1. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen?

Zug + Torsion → mehrachsiger SPZ → $\sigma_v$
C45: zäher Werkstoff → GEH (SH)

FB: $\sigma_v \le \sigma_{zul}$

$$\sigma_v(GEH) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_t^2}$$

$$\text{Zug:} \quad \sigma = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1350000}{\pi \cdot 90^2} = 212{,}2 \text{ MPa}$$

$$\text{Torsion:} \quad \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 19750000}{\pi \cdot 90^3} = 138{,}0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v(GEH) = \sqrt{212{,}2^2 + 3 \cdot 138{,}0^2} = 319{,}6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zul,F} = \frac{R_e}{S_F} \quad ; \quad R_e = 490 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zul,B} = \frac{R_m}{S_B} \quad ; \quad R_m = 710 \text{ MPa}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} = \frac{490}{319{,}6} = 1{,}53 > 1{,}5 \quad (1{,}2 \text{ bis } 2)$$

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = \frac{710}{319{,}6} = 2{,}22 > 2 \quad (2 \text{ bis } 3)$$

## 2. Auf welchen Betrag kann das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft und gleicher Sicherheit gesteigert werden?

**Neuer Werkstoff: 30CrMoV9 ($R_{p0,2}$ = 1050 MPa, $R_m$ = 1450 MPa, $A_5$ = 6%)**

Rechnung gegen Fließen oder Bruch? (andere Kennwerte als bei 1.)

Was ergibt bei **gleicher** Sicherheit [wie bei 1.] die kleinere zulässige Spannung?

$$\text{gegen Fließen:} \quad \sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F} = \frac{1050}{1{,}53} = 686{,}3 \text{ MPa}$$

$$\text{gegen Bruch:} \quad \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} = \frac{1450}{2{,}22} = 653{,}2 \text{ MPa}$$

**Zulässige Spannung gegen Bruch ist maßgebend!**

30CrMoV9 zäh oder spröd?

→ Im Zweifel Rechnung mit GEH (gegen Fließen und Bruch) und NH (Bruch)

## 2. Auf welchen Betrag kann das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft und gleicher Sicherheit gesteigert werden (Fortsetzung)?

**Neuer Werkstoff: 30CrMoV9 ($R_{p0,2}$ = 1050 MPa, $R_m$ = 1450 MPa, $A_5$ = 6%)**

**Versagen durch (Duktil-)Bruch:** $\sigma_v(\text{GEH}) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_t^2}$

$$\sigma = \frac{F}{A} = 212{,}2\ \text{MPa}$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} \quad ; \quad W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} 90^3 = 143139\ \text{mm}^3$$

FB: $\sigma_v \le \sigma_{zul}$

mit $\sigma_{zul} = 653{,}2\ \text{MPa}$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} = \sigma_{zul}$$

Nach $M_t$ aufgelöst ergibt sich:

$$M_t = W_t \sqrt{\frac{1}{3}\left(\sigma_{zul}^2 - \sigma^2\right)} = 143139 \sqrt{\frac{1}{3}\left(653{,}2^2 - 212{,}2^2\right)}$$

$$M_t = 51053450\ \text{Nmm} = 51053\ \text{Nm}$$

## 2. Auf welchen Betrag kann das Torsionsmoment bei gleicher Zugkraft und gleicher Sicherheit gesteigert werden (Fortsetzung)?

**Neuer Werkstoff: 30CrMoV9 ($R_{p0,2}$ = 1050 MPa, $R_m$ = 1450 MPa, $A_5$ = 6%)**

**Versagen durch (Spröd-)Bruch:**

$$\sigma_v(\mathrm{NH}) = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau_t^2} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$

(aus Tabelle bzw. Mohrschem Kreis)

FB: $\sigma_v \le \sigma_{zul}$

mit $\sigma_{zul} = 653{,}2\,\mathrm{MPa}$

$$\frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2} = \sigma_{zul}$$

Nach $M_t$ aufgelöst ergibt sich:

$$M_t = W_t\sqrt{\left(\sigma_{zul} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}$$

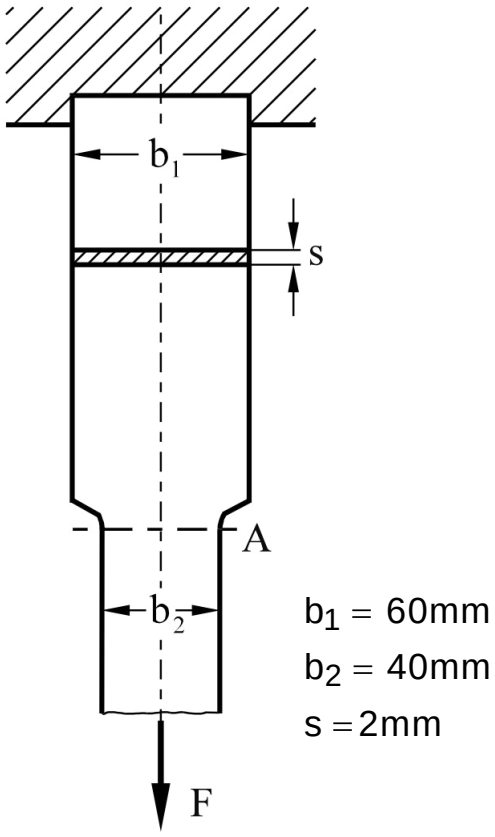
$$M_t = 143139\sqrt{\left(653{,}2 - \frac{212{,}2}{2}\right)^2 - \left(\frac{212{,}2}{2}\right)^2}$$

$$M_t = 76824609\,\mathrm{Nmm} = 76825\,\mathrm{Nm}$$

**Also maßgebend: $M_{tzul}$ = 51053 Nm = 51,05 kNm**

aus Rechnung duktiles Versagen durch Bruch

# Aufgabe 25




$b_1 = 60mm$

$b_2 = 40mm$

$s = 2mm$

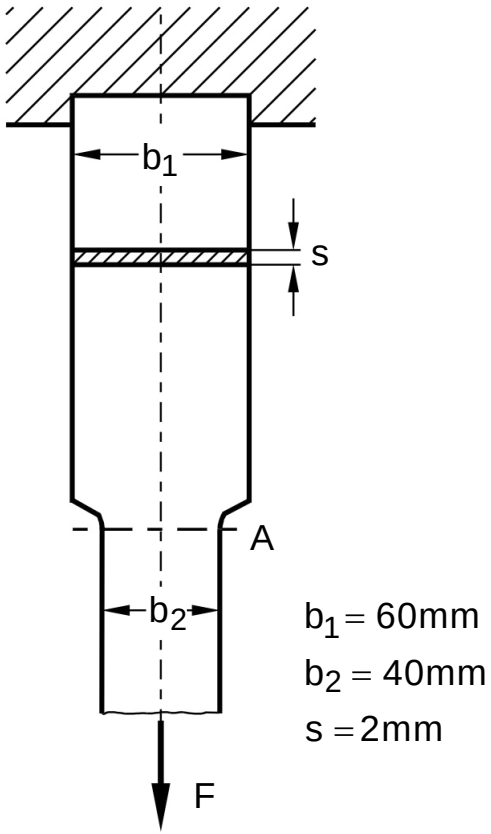
Ein kaltgewalztes Stahlband aus C35 ist am oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende durch die statische Kraft F belastet (siehe Skizze).

Bei der **Kraft F = 9600 N** wurde an der höchstbeanspruchten Stelle A am Querschnittsübergang in Achsrichtung die **Dehnung ε = 0,1143 %** gemessen.

**C35:** $R_e$ = 430 MPa; $R_m$ = 630 MPa; E = 210000 MPa; μ = 0,3; $A_5$ = 11%

1. Wie groß ist die Formzahl $\alpha_k$ des Querschnittübergangs?
2. Wie groß ist die Sicherheit gegen Fließbeginn?
3. Bei welcher Kraft beginnt der Stab zu fließen?
4. Bei welcher Kraft ist (annähernd) eine plastische Dehnung von 0,3 % an der höchstbeanspruchten Stelle erreicht?
5. Bei welcher Last wird im kritischen Querschnitt vollplastischer Zustand erreicht?

# 1. Wie groß ist die Formzahl $\alpha_k$ des Querschnittübergangs?




$b_1 = 60\text{mm}$

$b_2 = 40\text{mm}$

$s = 2\text{mm}$

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A} = \frac{F}{b_2 \cdot s} = \frac{9600}{40 \cdot 2} = 120\ \text{MPa}$$

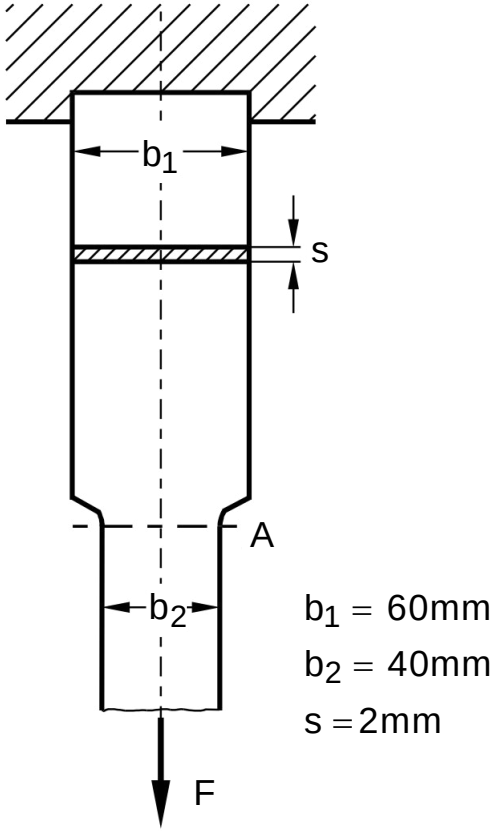
Bei A Spannungszustand einachsig: $\sigma_{max} = E\,\varepsilon_A$

$$\sigma_{max} = 210000 \cdot 0{,}001143 = 240{,}0\ \text{MPa}$$

(Beanspruchung elastisch, da $\sigma_{max} < R_e = 430$ MPa)

$$\alpha_k = \frac{240}{120} = 2$$

## 2. Wie groß ist die Sicherheit gegen Fließbeginn?




$b_1 = 60\text{mm}$

$b_2 = 40\text{mm}$

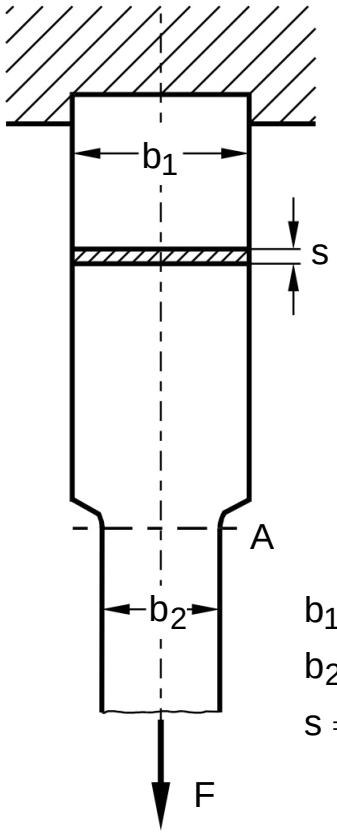
$s = 2\text{mm}$

FB: $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$

Fließen: $\sigma_{zul} = \dfrac{R_e}{S_F}$

aus FB: $S_F = \dfrac{R_e}{\sigma_{max}} = \dfrac{430}{240} = 1{,}79 \quad (S_F = 1{,}2 \div 2)$

## 3. Bei welcher Kraft beginnt der Stab zu fließen?




$b_1 = 60\text{mm}$

$b_2 = 40\text{mm}$

$s = 2\text{mm}$

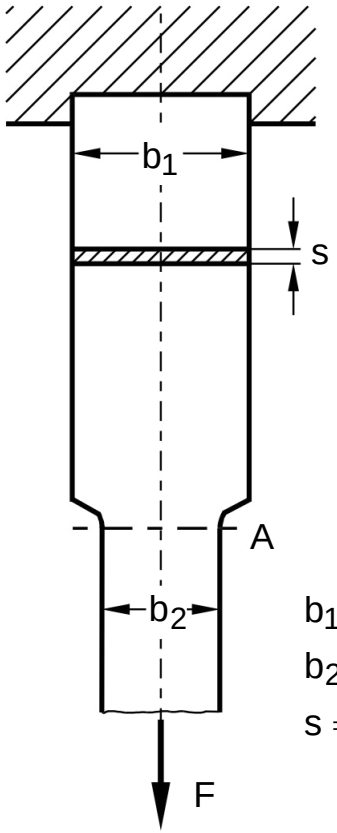
$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{F}{b_2 \cdot s}$$

Fließbeginn bei $\sigma_{max} = R_e$

$$F_F = \frac{R_e \cdot b_2 \cdot s}{\alpha_k} = \frac{430 \cdot 40 \cdot 2}{2} = 17200\,\text{N}$$

$$= F_{1)} \cdot S_F = 9600 \cdot 1{,}79 = 17184\,\text{N})$$

4. Bei welcher Kraft ist (annähernd) eine plastische Dehnung von 0,3 % an der höchstbeanspruchten Stelle erreicht?




$b_1 = 60\text{mm}$

$b_2 = 40\text{mm}$

$s = 2\text{mm}$

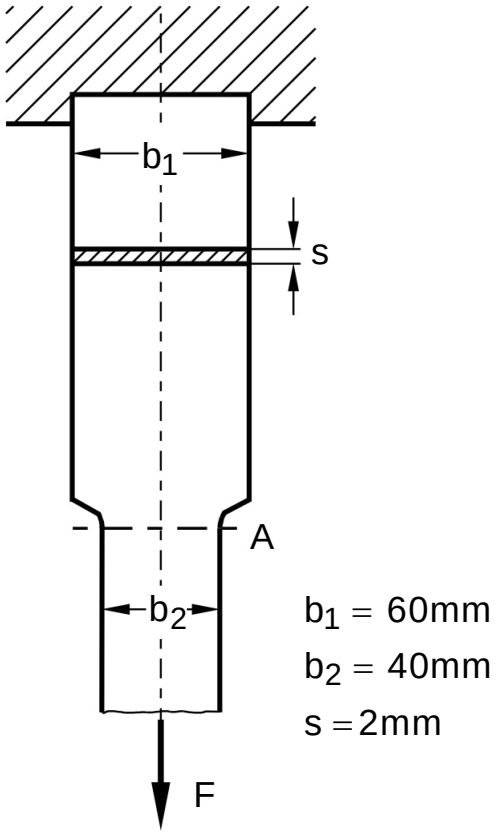
$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F$$

$$n_{pl} \approx \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_F}}; \quad \varepsilon_{pl} = 0{,}3\,\%; \quad \varepsilon_F = \frac{R_e}{E} = \frac{430}{210000} = 0{,}00205$$

$$n_{0{,}3} \approx \sqrt{1 + \frac{0{,}003}{0{,}00205}} = 1{,}57$$

$$F_{0{,}3} = 1{,}57 \cdot 17200 = 27004\,\text{N}$$

## 5. Bei welcher Last wird im kritischen Querschnitt vollplastischer Zustand erreicht?




$b_1 = 60\text{mm}$

$b_2 = 40\text{mm}$

$s = 2\text{mm}$

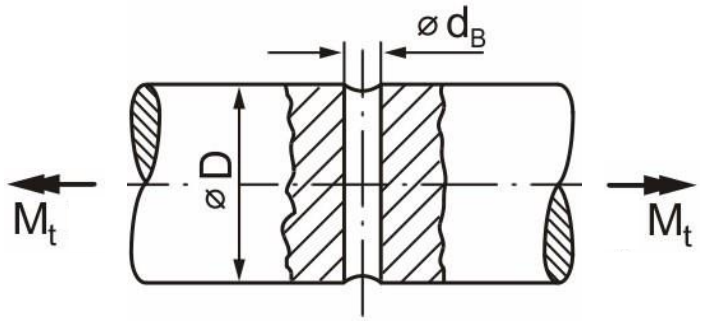
$$F = F_{vpl} = R_e \cdot A = R_e \cdot b_2 \cdot s = 430 \cdot 40 \cdot 2 = 34400\,\text{N}$$

$$\left(\text{oder}: F_{vpl} = \alpha_k \cdot F_F = 2 \cdot 17200 = 34400\,\text{N}\right)$$

# Aufgabe 26:

Ein **Rundstab** aus EN-GJL-400 mit D = 30 mm Durchmesser und einer **Querbohrung** von $d_B$ = 6 mm Durchmesser ist auf **Torsion** beansprucht.
Wie groß ist das **zulässige Torsionsmoment** bei

1. statischer Beanspruchung?
2. wechselnder Beanspruchung?




**EN-GJL-400:** $R_m$ = 400 MPa; E = 110000 MPa

**Hinweise:**

Das bezogene Spannungsgefälle beträgt $\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{3}{\rho}$

Torsionswechselfestigkeit für die vorliegende Oberfläche ist $\tau_{tW} = 80\text{MPa}$

zu 1) FB: $\tau_{max} \leq \tau_{zul}$ (statische Beanspruchung)

zu 2) FB: $\tau_{amax} \leq \tau_{azul}$ (wechselnde Beanspruchung)

# 1. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei statischer Beanspruchung?

FB:

Linke Seite:

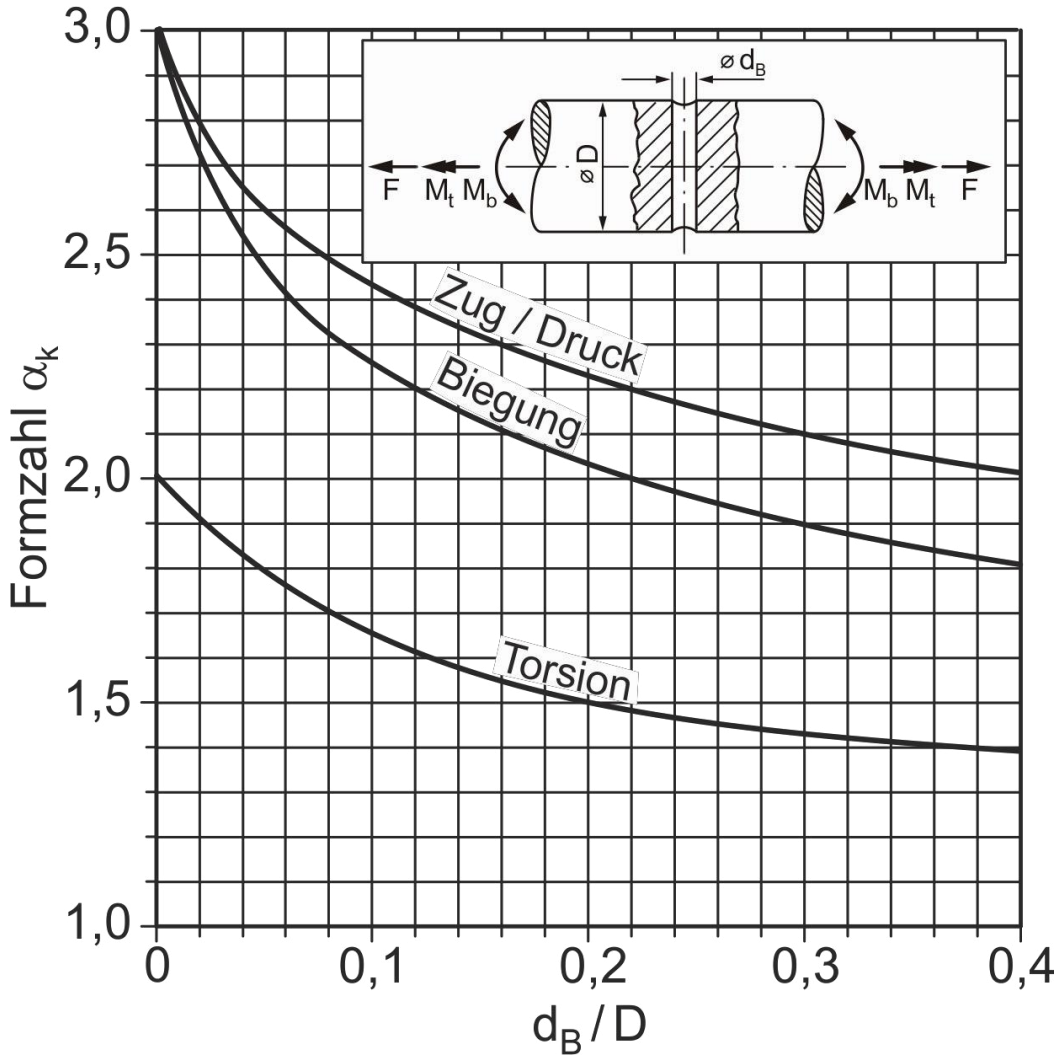
$$\tau_{max} = \alpha_k \cdot \tau_n$$

Anhang Bild14: $\frac{d_B}{D} = \frac{6}{30} = 0{,}2$

$$\rightarrow \alpha_k = 1{,}50$$

$$\tau_n = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}}$$

$W_t$ aus Bild A 14



# 1. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei statischer Beanspruchung?

FB:

Rechte Seite:

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$$

$$\tau_{tB} \approx R_m = 400\ \text{MPa}$$

$$S_B = 4 \quad \text{gewählt}$$

| Werk-stoff | Versagens-art | Maßgebender Werkstoff-kennwert (K) | Sicherheits-beiwert (S) | Typischer Sicherheits-beiwert |
|---|---|---|---|---|
| zäh | Fließen | $R_e$ ($R_{p0,2}$) | $S_F = 1,2 – 2$ | $S_F = 1,5$ |
| zäh | Bruch | $R_m$ | $S_B = 2 – 3$ | $S_B = 2$ |
| spröd | Bruch | $R_m$ | $S_B = 4 – 9$ | $S_B = 4$ |

| | Bezeichnung alt | Bezeichnung neu | $R_m$ [MPa] | $\sigma_{bB}$ [MPa] | $\sigma_{dB}$ [MPa] |
|---|---|---|---|---|---|
| **Gusseisen mit lamellarem Graphit** DIN 1691 (bleibt erhalten) | GG-25 | GG25 (EN-GJL-250) | 210 – 330 | 390 – 460 | 700 – 1000 |
| | GG-30 | GG30 (EN-GJL-300) | 260 – 330 | 450 – 480 | 850 – 1200 |
| | GG-35 | GG35 (EN-GJL-350) | 310 – 380 | 510 – 540 | 950 – 1400 |
| | GG-40 | GG40 (EN-GJL-400) | 360 – 400 | 570 – 600 | 1100 – 1400 |

# 1. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei statischer Beanspruchung?

FB:

$$\tau_{max} = \alpha_k \cdot \tau_n = \alpha_k \cdot \frac{M_t}{\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{tB}}{S_B}$$

Gleichsetzen ergibt:

$$M_t = \frac{\left(\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}\right) \cdot \tau_{tB}}{\alpha_k \cdot S_B} = \frac{\left(\frac{\pi 30^3}{16} - \frac{6 \cdot 30^2}{6}\right) \cdot 400}{1{,}5 \cdot 4} = 293429\ \text{Nmm} = 293{,}4\ \text{Nm}$$

## 2. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei wechselnder Beanspruchung?

FB:

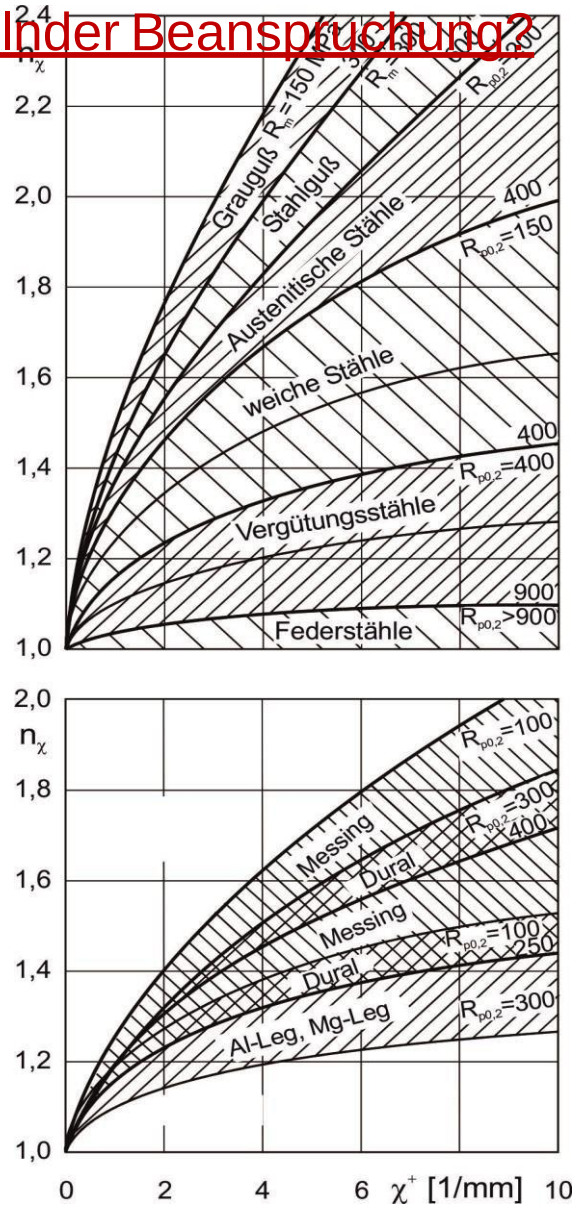
linke Seite: $\tau_{amax} = \beta_k \cdot \tau_{an}$

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} \; ; \quad \rho = \frac{d_B}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \tau_{an} = \frac{M_{ta}}{\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}}$$

$$\chi^+ = \frac{2}{D} + \frac{3}{\rho} = \frac{2}{30} + \frac{3}{3} = 1{,}067\,\mathrm{mm}^{-1}$$

Bild A 4: $\left.\begin{array}{l} \chi^+ = 1{,}067\,\mathrm{mm}^{-1} \\ R_m = 400\mathrm{MPa} \end{array}\right\} \rightarrow n_\chi = 1{,}4$

$$\rightarrow \beta_k = \frac{\alpha_k}{n_\chi} = \frac{1{,}50}{1{,}4} = 1{,}071$$ (kerb**un**empfindlich)



## 2. Wie groß ist das zulässige Torsionsmoment bei wechselnder Beanspruchung?

FB:

linke Seite:

$$\tau_{amax} = \beta_k \cdot \tau_{an}$$

$$\tau_{an} = \frac{M_{ta}}{\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}}$$

rechte Seite:

$$\tau_{azul} = \frac{\tau_{tW}}{S_D}$$

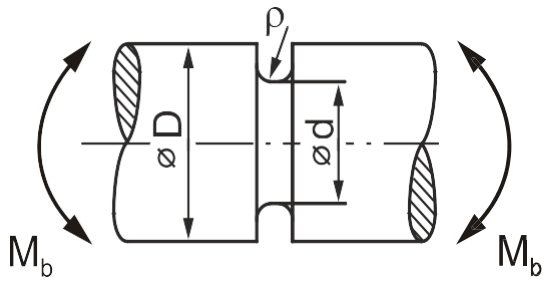
$$\tau_{tW} = 80\ \text{MPa}$$

$S_D = 2{,}0$ gewählt

Gleichsetzen ergibt:

$$M_{ta} = \frac{\left(\frac{\pi D^3}{16} - \frac{d_B D^2}{6}\right) \cdot \tau_{tW}}{\beta_k \cdot S_D} = \frac{\left(\frac{\pi 30^3}{16} - \frac{6 \cdot 30^2}{6}\right) \cdot 80}{1{,}071 \cdot 2{,}0} = 164386\ \text{Nmm} = 164{,}4\ \text{Nm}$$

# Aufgabe 27:




Eine **Welle** aus Vergütungsstahl 42CrMo4 mit 30 mm Durchmesser enthält eine **halbkreisförmige Eindrehung** auf 25 mm Durchmesser. Die Oberfläche ist **poliert**. Die Welle ist auf **Biegung** durch das Moment $M_b = 185$ Nm beansprucht.

1. Wie groß ist die maximale Spannung bei stillstehender Welle?
2. Wie groß ist die Sicherheit im Betrieb bei umlaufender Welle? Reicht sie aus?

**42CrMo4:** $R_e = 900$ MPa; $R_m = 1100$ MPa; $E = 210000$ MPa; $\mu = 0{,}3$; $A_5 = 11\%$

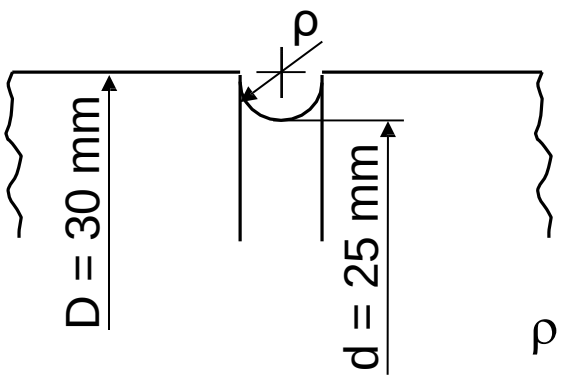
**Hinweise:**

Aufgabe 27 ist wie Aufgabe 26 eine Aufgabe zum Üben der Formzahl $\alpha_k$ bzw. der Kerbwirkungszahl $\beta_k$

zu 1) Stillstehende Welle → statische Beanspruchung → $\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$

zu 2) Umlaufende Welle → Wechselbiegung (Betriebsbeanspruchung) → $\beta_k$

# 1. Wie groß ist die maximale Spannung bei stillstehender Welle?



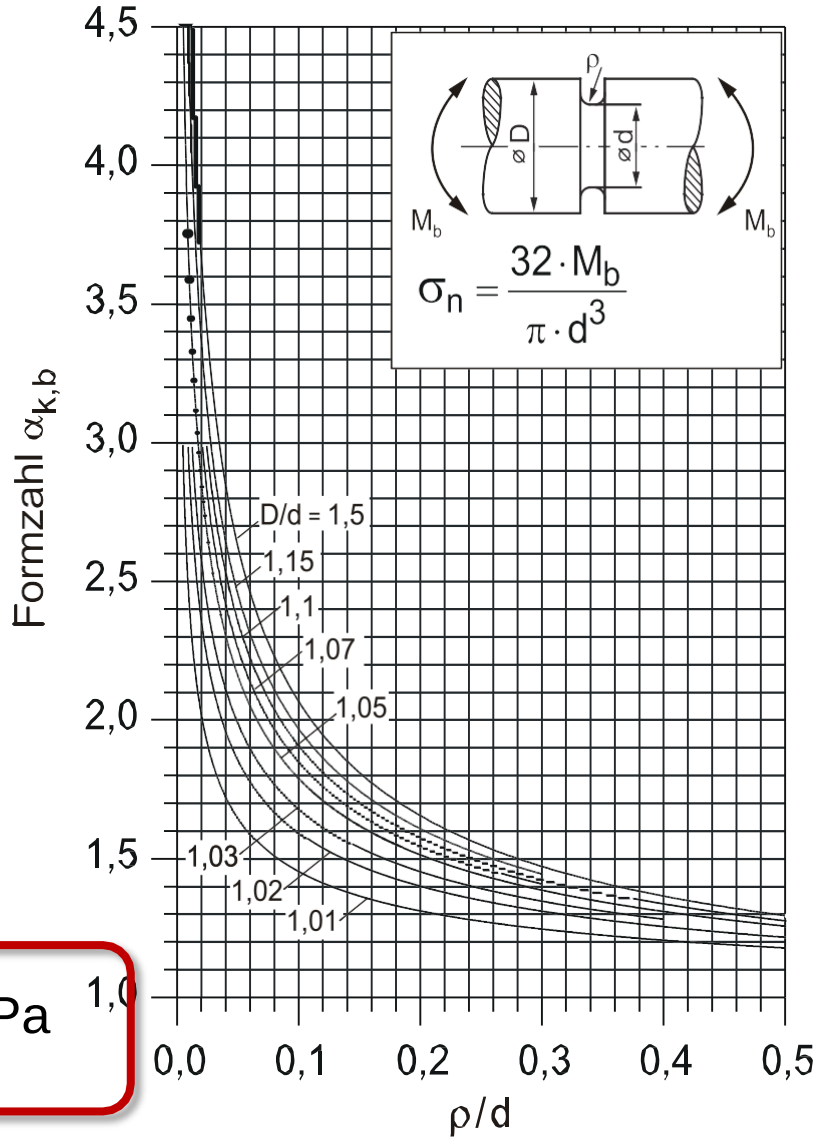

$$\rho = \frac{D - d}{2} = \frac{30 - 25}{2} = 2{,}5\,\text{mm}$$

$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$$

$$\sigma_n = \frac{M_b}{W_b} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi d^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{d} &= \frac{30}{25} = 1{,}2 \\ \frac{\rho}{d} &= \frac{2{,}5}{25} = 0{,}1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha_k \approx 2{,}0$$

$$\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \frac{32 \cdot M_b}{\pi d^3} = 2{,}0 \cdot \frac{32 \cdot 185000}{\pi \cdot 25^3} = 241{,}2\,\text{MPa}$$



## 2. Wie groß ist die Sicherheit im Betrieb bei umlaufender Welle? Reicht sie aus?

Betriebsbeanspruchung: Wechselbiegung

FB: $\sigma_{amax} \leq \sigma_{azul}$

$$\sigma_{amax} = \beta_k \cdot \sigma_{an}$$

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{1 + \frac{55}{R_e}\sqrt{\frac{C}{\rho}}} = \frac{2{,}0}{1 + \frac{55}{900}\sqrt{\frac{2}{2{,}5}}} = 1{,}896$$

$R_e = 900\,\text{MPa}$

$C = 2$ (Biegung)

$\rho = 2{,}5\,\text{mm}$

$$\sigma_{an} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{32 \cdot M_b}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{azul} = \frac{\sigma_{bW}}{S_D}$$

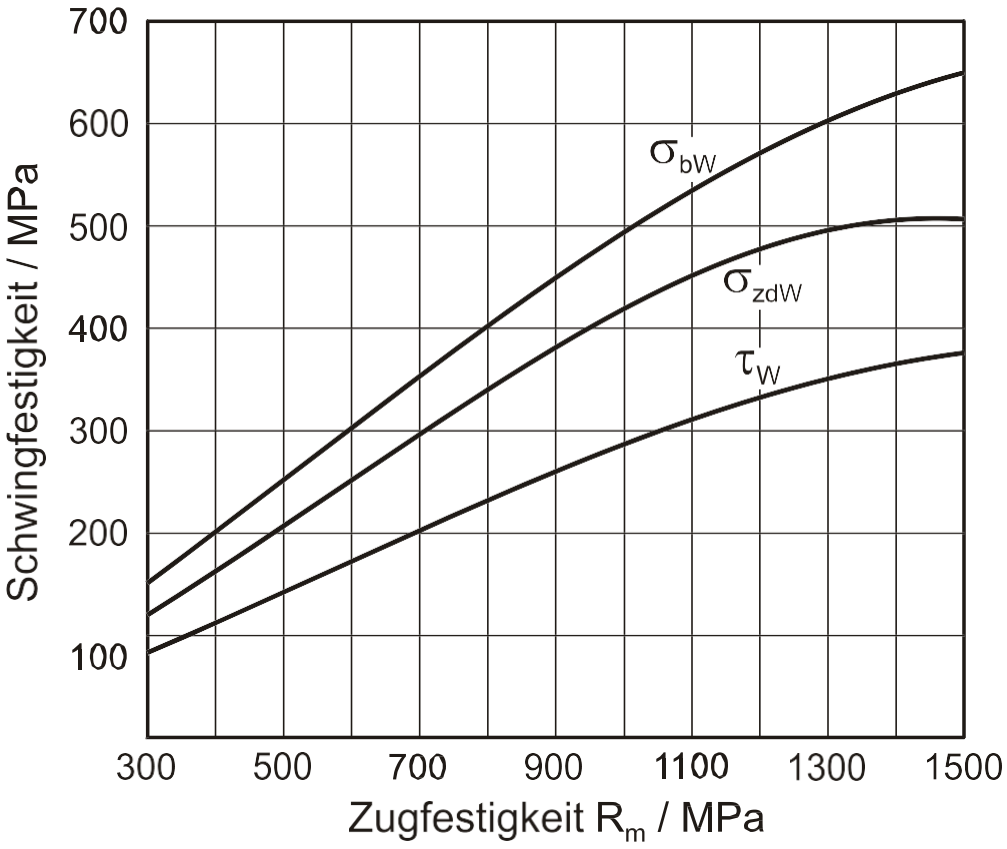
$$\sigma_{bW} = f \cdot \sigma_{bW,pol}$$

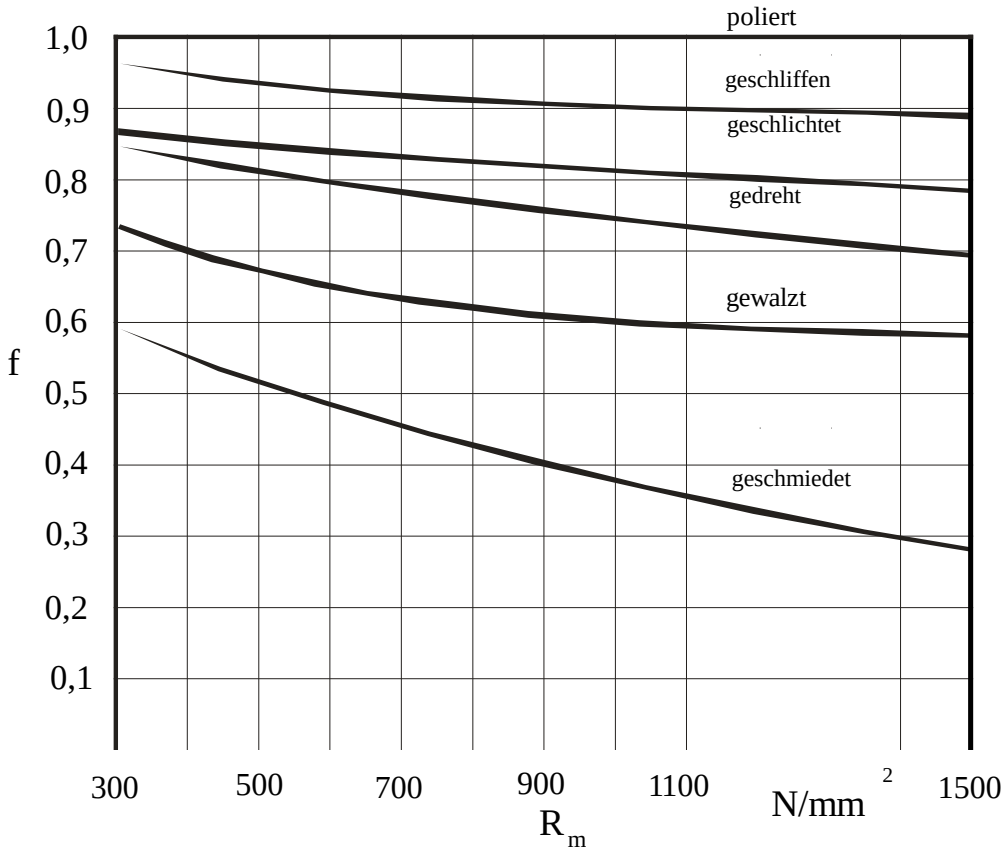
Oberfläche poliert: $f = 1$

$R_m = 1100\,\text{MPa}$

$\rightarrow \sigma_{bW,pol} = 530\,\text{MPa}$

# 2. Wie groß ist die Sicherheit im Betrieb bei umlaufender Welle? Reicht sie aus?



## 2. Wie groß ist die Sicherheit im Betrieb bei umlaufender Welle? Reicht sie aus?

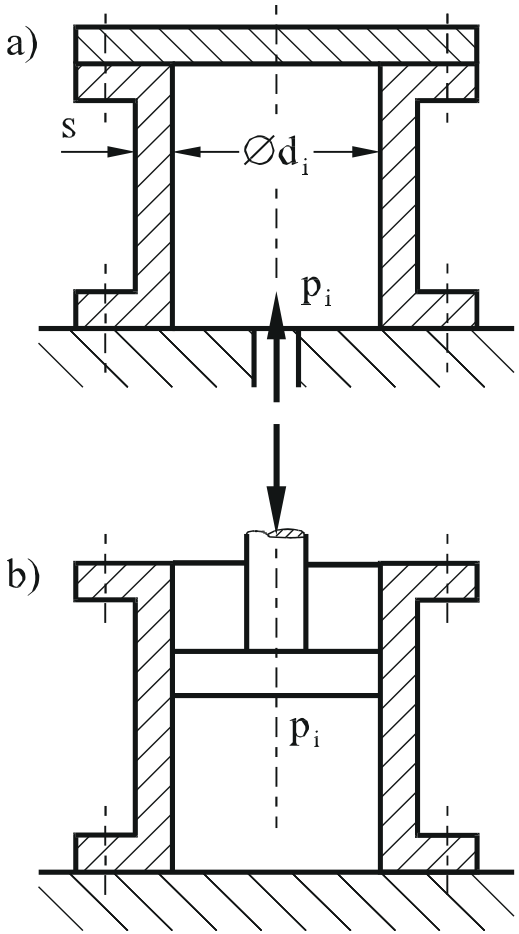
Betriebsbeanspruchung: Wechselbiegung

Gleichsetzen ergibt:

$$S_D = \frac{\pi d^3 \cdot \sigma_{bW}}{32 \cdot \beta_k \cdot M_b} = \frac{\pi \cdot 25^3 \cdot 530}{32 \cdot 1{,}896 \cdot 185000} = 2{,}32$$

# Aufgabe 30:

Ein **Zylinder** mit dem Innendurchmesser $d_i$=120 mm und der Wanddicke s=10 mm soll in eine hydraulische Anlage eingebaut werden (siehe Skizze a).




**GS38:** $R_e$=190 MPa; $R_m$=380 MPa; $A_5$=25 %; E=210000MPa; μ=0,3

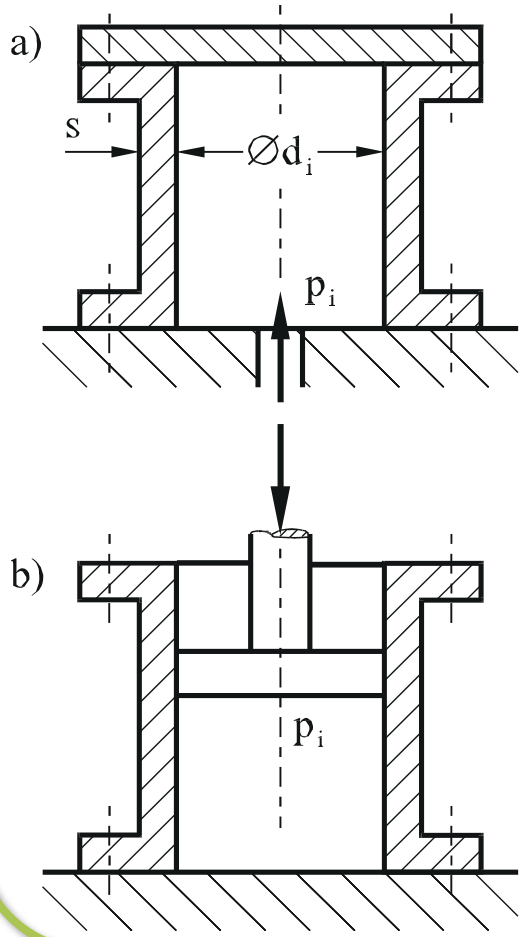
**EN-GJL-200:** $R_m$=200 MPa; E=100000MPa; μ=0,25

1. Welcher **statische Innendruck $p_i$** kann in dem Zylinder zugelassen werden, wenn er
   (a) aus GS38
   (b) aus EN-GJL-200
   gefertigt ist? Wie groß ist dabei jeweils die **Aufweitung** des mittleren Zylinderdurchmessers?

2. Wie groß werden die **Spannungen** und die mittlere **Durchmesseraufweitung** bei dem Zylinder aus GS38, wenn der **Deckel** an der oberen Zylinderöffnung **entfernt** und der unter 1. errechnete Druck durch einen beweglichen Kolben gemäß Skizze b) erzeugt wird?

# Hinweise zu Aufgabe 30:

Ein **Zylinder** mit dem Innendurchmesser $d_i$=120 mm und der Wanddicke s=10 mm soll in eine hydraulische Anlage eingebaut werden (siehe Skizze a).

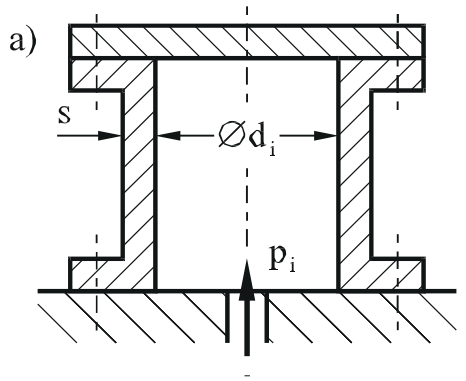



Diese Aufgabe ist eine Aufgabe zum Üben der Verhältnisse an Druckzylindern:

- Spannungen
- Kesselformel
- Sicherheiten bei zähen / spröden Werkstoffen
- Durchmesseränderung durch Innendruck:
  → Umfangsspannung
- Umrechnung von bar in MPa

# 1. Welcher statische Innendruck $p_i$ kann in dem Zylinder zugelassenwerden?

FB:




Außendurchmesser: $d_a = d_i + 2 \cdot s = 120 + 2 \cdot 10 = 140mm$

Dünnwandiger Hohlzylinder: $\frac{d_a}{d_i} = \frac{140}{120} = 1{,}16 < 1{,}2$ ✓

$$\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s} = \sigma_1$$

$$\sigma_l = \frac{p \cdot d_i}{4s} = \sigma_2$$

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} = \sigma_3$$

→ Mehrachsiger Spannungszustand → Vergleichsspannung $\sigma_v$

## Schubspannungshypothese:

$$\sigma_v\,(SH) = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_u - \sigma_r = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} - \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p \cdot (d_i + s)}{2 \cdot s} = \frac{p \cdot d_m}{2 \cdot s}$$

(→ Kesselformel)

1. Welcher statische Innendruck $p_i$ kann in dem Zylinder zugelassen werden?

**GS-38:** $R_e$=190 MPa; $R_m$=380 MPa; $A_5$=25 %; E=210000MPa; μ=0,3

→ Zäher Werkstoff → SH oder GEH

FB:

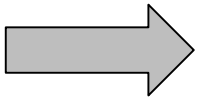
Schubspannungshypothese: $\sigma_v(SH) = \frac{p \cdot d_m}{2 \cdot s}$

zulässige Spannung: $\sigma_{zul} = \min\left\{\begin{array}{l} \frac{R_e}{S_F} = \frac{190}{1{,}5} = 126{,}67\,MPa \\ \frac{R_m}{S_B} = \frac{380}{2} = 190\,MPa \end{array}\right\} = 126{,}67\,MPa$

→ $p = \frac{2 \cdot s \cdot \sigma_{zul}}{d_m} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 126{,}67}{130} = 19{,}5\,MPa = 195\,bar$

1. Welcher statische Innendruck $p_i$ kann in dem Zylinder zugelassen werden?

**EN-GJL-200:** $R_m$=200 MPa; E=100000MPa; μ=0,25

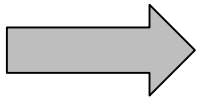


Spröder Werkstoff → NH

FB:

Normalspannungshypothese: $\sigma_v\,(NH) = \sigma_1 = \sigma_{\overline{u}}$ $\dfrac{p \cdot d_i}{2 \cdot s}$

zulässige Spannung: $\sigma_{zul} = \dfrac{R_m}{S_B} = \dfrac{200}{4} = 50MPa$



$$p = \frac{2 \cdot s \cdot \sigma_{zul}}{d_i} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 50}{120} = 8{,}3MPa = 83bar$$

## 1. Wie groß ist die Aufweitung des mittleren Durchmessers?

Vergrößerung Umfang: $\varepsilon_u = \frac{\Delta U}{U_0}$ mit $\left.\begin{array}{l} \Delta U = \Delta(\pi \cdot d_m) = \pi \cdot \Delta d_m \\ U_0 = \pi \cdot d_m \end{array}\right\} \varepsilon u = \frac{\pi \cdot \Delta d_m}{\pi \cdot d_m} = \frac{\Delta d_m}{d_m}$

Mehrachsiger SZ: $\varepsilon_u = \frac{1}{E}[\sigma_u - \mu(\sigma_l + \sigma_r)] = \frac{1}{E}\left[\frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} - \mu\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} - \mu\left(-\frac{p}{2}\right)\right]$

**GS-38:** $\varepsilon_u = \frac{1}{210000} \cdot \frac{19,5}{2}\left[\frac{120}{10}\left(1 - \frac{0,3}{2}\right) + 0,3\right] = 4,88 \cdot 10^{-4}$

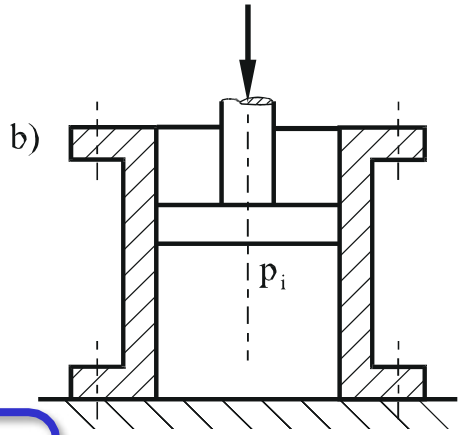
$\Delta d_m = \varepsilon_u \cdot d_m = 4,88 \cdot 10^{-4} \cdot 130 = 0,0634 mm$

**EN-GJL-200:** $\varepsilon_u = \frac{1}{100000} \cdot \frac{8,3}{2}\left[\frac{120}{10}\left(1 - \frac{0,25}{2}\right) + 0,25\right] = 4,46 \cdot 10^{-4}$

$\Delta d_m = \varepsilon_u \cdot d_m = 4,46 \cdot 10^{-4} \cdot 130 = 0,0580 mm$

2. Wie groß werden die **Spannungen** und die **mittlere Durchmesseraufweitung** wenn der Deckel an der oberen Zylinderöffnung entfernt und durch einen beweglichen Kolben ersetzt wird?

Werkstoff: **GS-38** Druck: **195bar** (wie Aufgabenteil 1)




$$\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2s} = \frac{19{,}5 \cdot 120}{2 \cdot 10} = 117\,\text{MPa}$$

$$\sigma_l = 0$$

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} = -\frac{19{,}5}{2} = -9{,}75\,\text{MPa}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E}\left[\sigma_u - \mu\sigma_r\right] = \frac{1}{E}\left[\frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} - \mu\left(-\frac{p}{2}\right)\right] = \frac{1}{E}\cdot\frac{p}{2}\left[\frac{d_i}{s} + \mu\right] = \frac{1}{210000}\cdot\frac{19{,}5}{2}\left[\frac{120}{10} + 0{,}3\right] = 5{,}71 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta d_m = \varepsilon_u \cdot d_m = 5{,}71 \cdot 10^{-4} \cdot 130 = 0{,}0742\,\text{mm}$$

(Teil 1. 0,0634mm)

# Aufgabe 33:

An einem Konstruktionsteil ist eine **Dehnschraube** aus dem Werkstoff S235 zu überprüfen. Der gefährdete Querschnitt liegt im zylindrischen Teil des Schraubenbolzens und hat den Durchmesser d = 10 mm.
Folgende Lastfälle sind zu untersuchen:

**S235:** $R_e$=240 MPa; $R_m$=370 MPa; $\sigma_{W,pol}$ = 150 MPa; E = 210000 MPa; $\mu$ = 0,3

1. Im unbelasteten Zustand der Konstruktion ist der Schraubenbolzen durch eine **statische Zugkraft** von $F_1$ = 1260 N **vorgespannt**. Welche **Versagensmöglichkeit** ist hierfür in Betracht zu ziehen? Wie groß ist die **Sicherheit** gegen ein solches Versagen?

2. Beim Anziehen der Schraube entsteht ein **Torsionsmoment**, das zusammen mit der Zugkraft $F_1$ (die als konstant angenommen werden darf) den Bolzen beansprucht. Bei welchem Moment $M_t$ beginnt der Werkstoff unter dieser Beanspruchung zu **fließen**?

3. Im Betriebszustand tritt zusätzlich zu $F_1$ noch eine **schwellende Belastung** mit dem Höchstwert $F_2$ = 7850 N auf. Bestimmen Sie die **Sicherheit** gegen Fließen und Schwingungsbruch (Oberfläche poliert). Sind diese Sicherheitsbeiwerte **ausreichend**?

# Hinweise zu Aufgabe 33:

An einem Konstruktionsteil ist eine **Dehnschraube** aus dem Werkstoff S235 zu überprüfen. Der gefährdete Querschnitt liegt im zylindrischen Teil des Schraubenbolzens und hat den Durchmesser d = 10 mm.

zu 1) Zug → statische Beanspruchung
Versagensmöglichkeit: Fließen/Bruch → $\sigma \leq \sigma_{zul}$

zu 2) Zug und Torsion → mehrachsiger Spannungszustand
Fließen → $\sigma_v = R_e$

zu 3) Rechnung gegen Fließen **und** gegen Schwingungsbruch

$\sigma_o \leq \sigma_{ozul}$ $\sigma_a \leq \sigma_{azul}$

1. Wie groß ist die Sicherheit gegen Versagen bei einer statischen Vorspannkraft von $F_1 = 1260$ N?

**Zäher Werkstoff → Versagen durch Fließen oder Bruch**

FB:

$$\sigma = \frac{F_1}{A} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1260}{\pi \cdot 10^2} = 16{,}04\,\text{MPa}$$

Gegen Fließen: $\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$ ⇒ $S_F = \frac{R_e}{\sigma} = \frac{240}{16{,}04} = 14{,}95 > 1{,}5$

Gegen Bruch: $\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$ ⇒ $S_B = \frac{R_m}{\sigma} = \frac{370}{16{,}04} = 23{,}07 > 2$

## 2. Bei welchem Moment $M_t$ zusätzlich zur Kraft $F_1$ beginnt der Werkstoff zu fließen?

Kraft $F_1$ → Zug: $\sigma = \frac{F_1}{A} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 1260}{\pi \cdot 10^2} = 16{,}04\,\text{MPa}$

Moment $M_t$ → Torsion $\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$; $W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{\pi}{16} 10^3 = 196{,}35\,\text{mm}^3$

Zug und Torsion → Mehrachsiger Spannungszustand → Vergleichsspannung

GEH: $\sigma_v(\text{GEH}) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_t^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\left(\frac{M_t}{W_t}\right)^2}$

Fließbedingung:

$$M_{t,F} = W_t \sqrt{\frac{1}{3}\left(R_e^2 - \sigma^2\right)} = 196{,}35 \sqrt{\frac{1}{3}\left(240^2 - 16{,}04^2\right)} = 27146{,}22\,\text{Nmm} = 27{,}15\,\text{Nm}$$

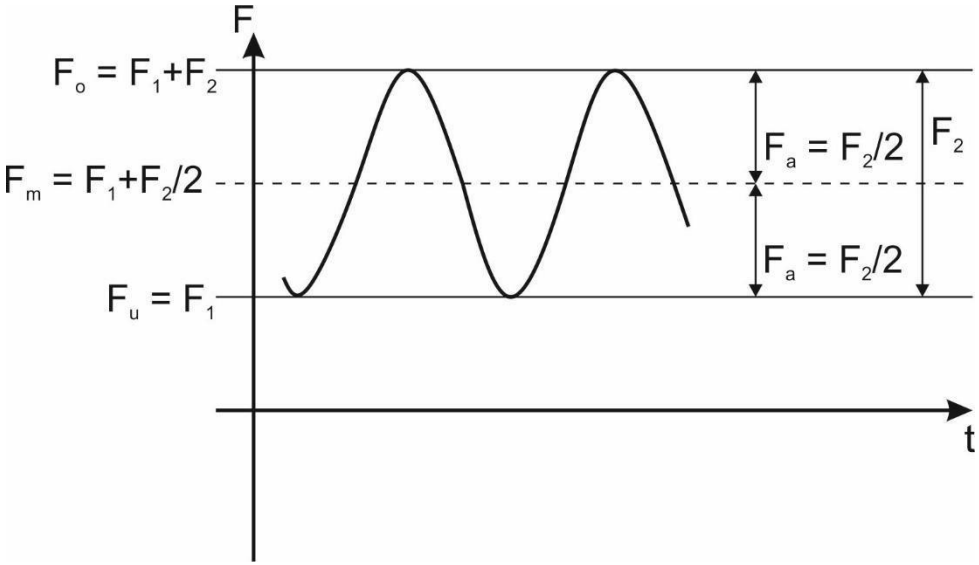
## 3. Sicherheit gegen Fließen und Schwingungsbruch wenn der statischen Kraft $F_1$ die schwellende Kraft $F_2$ = 7850 N überlagert ist.

Rechnung gegen Fließen:

FB:

$$\sigma_o = \frac{F_1 + F_2}{A} = \frac{4(F_1 + F_2)}{\pi d^2}$$

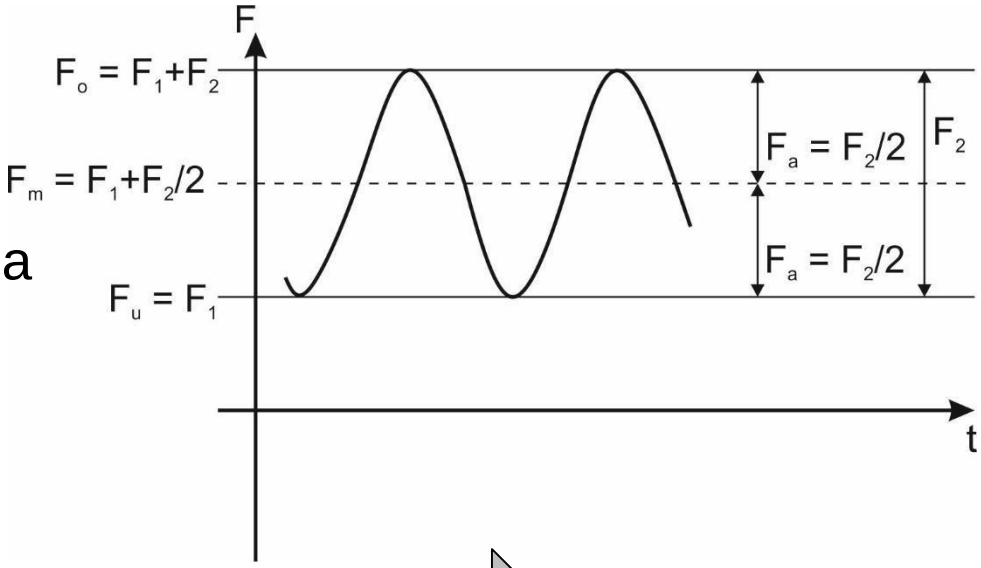
$$= \frac{4(1260 + 7850)}{\pi 10^2} = 115{,}99 \text{MPa}$$




$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F} \Rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_o} = \frac{240}{115{,}99} = 2{,}07 > 1{,}5$$

## 3. Sicherheit gegen Fließen und Schwingungsbruch wenn der statischen Kraft $F_1$ die schwellende Kraft $F_2$ = 7850 N überlagert ist.

Rechnung gegen Schwingungsbruch:




FB:

$$\sigma_a = \frac{F_2/2}{A} = \frac{2 \cdot F_2}{\pi d^2} = \frac{2 \cdot 7850}{\pi 10^2} = 49{,}97\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{a,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D} \qquad \sigma_A = \sigma_W \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

Wechselfestigkeit: $\sigma_{W,pol} = 150\,\text{MPa}$ poliert: $f = 1$ ⇒ $\sigma_W = 150\,\text{MPa}$

Mittelspannung: $\sigma_m = \sigma_o - \sigma_a = 115{,}99 - 49{,}97 = 66{,}02\,\text{MPa}$

Ertragbare Amplitude: $\sigma_A = 150\sqrt{1 - \frac{66{,}02}{370}} = 135{,}96\,\text{MPa}$

Sicherheit: $S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} = \frac{135{,}96}{49{,}97} = 2{,}72 > 2$