RTMV - Formelsammlung zur Prüfung

Hinweis: Diese Formelsammlung muss nach der Prüfung wieder abgegeben werden! Bitte schreiben Sie nicht auf die Formelsammlung!

Eigenschaften der Laplace Transformation

Regel	**Zeitbereich**	**Bildbereich**
Linearität $a,\ b \in \mathbb{R}$	$af_1(t) + bf_2(t)$	$aF_1(s) + bF_2(s)$
Differentation $f(0^-)$ ist der linksseitige Grenzwert der Anfangsbedingungen	$\dot{f}(t)$ $\ddot{f}(t)$ $\dddot{f}(t)$ $f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}$	$s\,F(s) - f(0^-)$ $s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$ $s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\dot{f}(0^-) - \ddot{f}(0^-)$ $s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}\ \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}\Big\vert_{t=0^-}$
Integration	$\int_{0^-}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Verschiebung $f(t) = 0$ für $t < 0;\ t_0 \geq 0$	$f(t - t_0)$	$\mathrm{e}^{-s\cdot t_0}\,F(s)$
Dämpfung $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(t) \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}$	$F(s - \alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Anfangswertsatz	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$
Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$

Tabelle 1: Eigenschaften der Laplace-Transformation

Korrespondenztabelle der Laplace Transformation

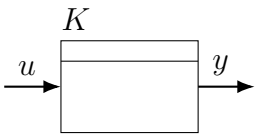
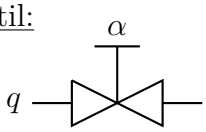
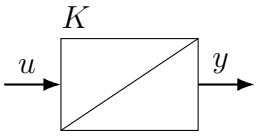
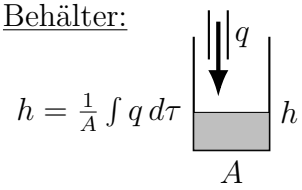
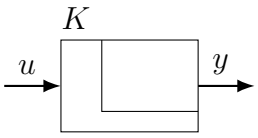
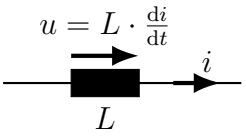
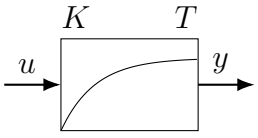
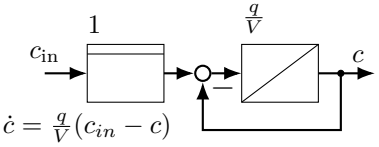
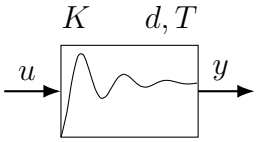
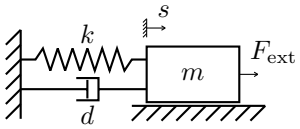
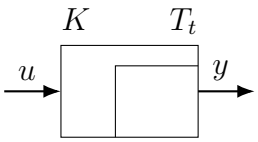
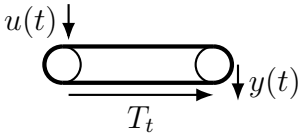
	Zeitbereich $f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	**Bildbereich** $F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
1	$T_0\,\delta(t)$		$T_0 \cdot 1$
2	1 bzw. $\sigma(t)$		$\frac{1}{s}$
3	$\frac{t}{T_1}$		$\frac{1}{s^2\,T_1}$
4	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^2$		$\frac{2}{s^3\,{T_1}^2}$
5	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^n$		$\frac{n!}{s^{n+1}\,{T_1}^n}$
6	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$		$\frac{1}{s+\frac{1}{T_1}}$
7	$\frac{t}{T_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$		$\frac{1}{T_1}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2}$
8	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$		$\frac{2}{{T_1}^2}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^3}$
9	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^n\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$		$\frac{n!}{{T_1}^n}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^{n+1}}$
10	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$		$\frac{1}{s\,(1+sT_1)}$
11	$1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{t}{T_1}\right)^i}{i!}$		$\frac{1}{s\,(1+sT_1)^n}$

Tabelle 2: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation (I)

	Zeitbereich $f(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	**Bildbereich** $F(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
12	$\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\right)^n$	$\dfrac{1}{s\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+s\frac{T_1}{i}\right)}$
13	$\frac{t}{T_1}-1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$	$\dfrac{1}{s^2\,T_1\,(1+s\,T_1)}$
14	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_2}}\quad$ mit $\quad T_1\neq T_2$	$\dfrac{T_1-T_2}{(1+s\,T_1)(1+s\,T_2)}$
15	$1-\varsigma\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}+(\varsigma-1)\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_2}}$ $T_1\neq T_2\qquad\varsigma=\dfrac{T_1}{T_1-T_2}$	$\dfrac{1}{s\,(1+s\,T_1)(1+s\,T_2)}$
16	$\sin(\omega\,t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
17	$\cos(\omega\,t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
18	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\,\sin(\omega\,t)$	$\dfrac{\omega}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2+\omega^2}$
19	$\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\,\cos(\omega\,t)$	$\dfrac{s+\frac{1}{T_1}}{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)^2+\omega^2}$
20	$\dfrac{\mathrm{e}^{-D\frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1-D^2}}\,\sin\!\left(\sqrt{1-D^2}\,\frac{t}{T_0}\right),\ D<1$	$\dfrac{T_0}{{T_0}^2\,s^2+2DT_0\,s+1}$
21	$1-\dfrac{\mathrm{e}^{-D\frac{t}{T_0}}}{\sqrt{1-D^2}}\,\cos\!\left(\sqrt{1-D^2}\,\frac{t}{T_0}-\psi\right)$ $\psi=\arctan\!\left(\dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}}\right)$ $=\arccos\!\left(\sqrt{1-D^2}\right)$ $=\arcsin(D)$	$\dfrac{T_0}{s\,\left({T_0}^2\,s^2+2DT_0\,s+1\right)}$

Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation (II)

Übertragungsglieder

	Strukturbild	Beispiel
Proportionalglied $y = K \cdot u$ $Y(s) = K \cdot U(s)$		Ventil: 
Integrator $y = K \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$ $Y(s) = \frac{K}{s} \cdot U(s)$		Behälter:  $h = \frac{1}{A} \int q \, d\tau$
Differenzierer $y = K \cdot \dot{u}$ $Y(s) = K \cdot s \cdot U(s)$		Induktivität: 
PT_1-Glied $\dot{y} \cdot T + y = K \cdot u$ $Y(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot U(s)$		Reaktor-Verdünnung:  $\dot{c} = \frac{q}{V}(c_{in} - c)$
PT_2-Glied $T^2 \cdot \ddot{y} + 2dT \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$ $Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dTs + 1} \cdot U(s)$		Feder-Masse-Dämpfer:  $m\ddot{s} + d\dot{s} + ks = F_{\text{ext}}$
Totzeitglied $y = K \cdot u(t - T_t)$ $Y(s) = K \cdot e^{-T_t s}$		Förderband: 

Nach: Föllinger, O.: Regelungstechnik, Hüthig 2008 (in Anlehnung an DIN 19226).

Faltung

Die Faltung zweier Funktionen ist definiert als:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Werden zwei Funktionen $f_1(t), f_2(t)$ im Zeitbereich gefaltet, so entspricht das nach dem *Faltungssatz* einer Multiplikation der zugehörigen Laplace-Transformierten $F_1(s), F_2(s)$ im Frequenzbereich.

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Dezibel (dB)

Im Allgemeinen wird der Amplitudengang in Dezibel (dB) aufgetragen, wobei der in Dezibel angegebene Betrag $|G|_{\mathrm{dB}}$ mit

$$|G|_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} |G|$$

berechnet werden kann.

Parameterwahl PID

Verfahren	**Regler**	**Parameter**
Approximation der Regelstrecke Σ_S durch $\mathrm{PT_1T_t}$-Glied	P	$K_P = \frac{T}{k_s\, T_t}$
	PI	$K_P = \frac{0{,}9T}{k_s\, T_t}$, $K_I = \frac{0{,}27T}{k_s\, T_t^2}$
	PID	$K_P = \frac{1{,}2T}{k_s\, T_t}$, $K_I = \frac{0{,}6T}{k_s\, T_t^2}$, $K_D = \frac{0{,}6T}{k_s}$
Überkritische Verstärkung k_{krit} und Periodendauer T_{krit}	P	$K_P = 0,5\; k_{\mathrm{krit}}$
	PI	$K_P = 0,45\; k_{\mathrm{krit}}$, $K_I = 0,53 \frac{k_{\mathrm{krit}}}{T_{\mathrm{krit}}}$
	PID	$K_P = 0,6\; k_{\mathrm{krit}}$, $K_I = 1,2 \frac{k_{\mathrm{krit}}}{T_{\mathrm{krit}}}$, $K_D = 0,072\; k_{\mathrm{krit}}\; T_{\mathrm{krit}}$

Tabelle 4: Parameterwahl nach *Ziegler* und *Nichols*

Stabilitätskriterium

Es wird folgende Übertragungsfunktion eines Systems betrachtet:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}, N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$

Vorzeichenbedingung:
(notwendige Bedingung für die asymptotische Stabilität eines Systems)
Sind alle Koeffizienten a_i reell und positiv, so ist die *Vorzeichenbedingung* erfüllt.
Im Fall, dass alle a_i negativ sind, kann man $Z(s)$ und $N(s)$ mit -1 multiplizieren.
Existieren Koeffizienten mit unterschiedlichem Vorzeichen, $sgn\ a_i \neq sgn\ a_j$, so ist das System nicht asymptotisch stabil.

Man bildet die $n \times n$-Hurwitzmatrix:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die *nordwestlichen Unterdeterminanten* $|H_i|$, $(1 \leq i \leq n)$ erhält man, indem man die Determinanten der in der linken oberen Ecke stehenden $i \times i$-Matrizen bildet:

$$\begin{aligned} |H_1| &= a_1 \\ |H_2| &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \\ |H_3| &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ |H_n| &= \det H \end{aligned}$$

Hurwitzkriterium:
Alle Pole von $G(s)$ liegen genau dann in der linken offenen Halbebene (d.h. das System ist asymptotisch stabil), wenn alle nordwestlichen Unterdeterminanten (Hauptminoren) $|H_1|, \ldots, |H_n|$ positiv sind und die Vorzeichenbedingung erfüllt ist.

Jacobi-Matrix

Für eine vektorielle Funktion

$$\underline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \end{pmatrix}$$

wird

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial \underline{f}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{pmatrix}$$

als Jacobi-Matrix (oder auch Ableitungsmatrix, Funktionalmatrix) bezüglich $\underline{x}$ respektive u bezeichnet.

Es liegt ein LTI-System in Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{b}\,u(t)\\ y(t) &= \underline{c}^\top\,\underline{x}(t),\end{aligned}$$

mit $d = 0$ vor.

Steuerbarkeit

Das LTI-System mit n Zustandsgrößen ist steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{S}_S = \begin{bmatrix}\underline{b} & \underline{A}\underline{b} & \underline{A}^2\underline{b} & \dots & \underline{A}^{n-1}\underline{b}\end{bmatrix}$$

vollen Rang, also Rang n besitzt.

Beobachtbarkeit

Das LTI-System mit n Zustandsgrößen ist beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{P}_O = \begin{bmatrix}\underline{c}^\top\\ \underline{c}^\top\underline{A}\\ \underline{c}^\top\underline{A}^2\\ \vdots\\ \underline{c}^\top\underline{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$

vollen Rang, also Rang n besitzt.

Ackermann-Formel

Formel von Ackermann
Gegeben sei eine steuerbare Regelstrecke $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$ und das für eine Zustandsregelung gewünschte charakteristische Polynom

$$p^*(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0.$$

- Liegt die Strecke in Regelungsnormalform vor, so kann die Reglermatrix $\underline{K}$ durch

  $$\underline{K} = \begin{pmatrix} p_0 - a_0 & p_1 - a_1 & \ldots & p_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

  berechnet werden.

- Ist die Strecke nicht in Regelungsnormalform gegeben, so hat man die Reglermatrix

  $$\underline{K} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \ldots & p_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{t}^\top \\ \underline{t}^\top \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{t}^\top \underline{A}^{n-1} \\ \underline{t}^\top \underline{A}^n \end{pmatrix}$$

  zu wählen, wobei $\underline{t}^\top$ die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

  $$\underline{S}_S^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{b} & \underline{Ab} & \underline{A}^2\underline{b} & \ldots & \underline{A}^{n-1}\underline{b} \end{pmatrix}^{-1}$$

  ist.

Transitionsmatrix

Liegt die Systemmatrix $\underline{A}$ als Diagonalmatrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vor, so ist die Transitionsmatrix

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Ist dies nicht der Fall, kann $\mathrm{e}^{\underline{A}t}$ über eine Ähnlichkeitstransformation mithilfe der Eigenvektormatrix bzw. der Hauptvektormatrix $\underline{V}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{A}} &= \underline{V}^{-1}\, \underline{A}\, \underline{V} \\ \mathrm{e}^{\underline{A}t} &= \underline{V}\, \mathrm{e}^{\underline{\tilde{A}}t}\, \underline{V}^{-1} \\ &= \underline{V} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{V}^{-1} \end{aligned}$$

Bei einem Eigenwert λ_1 mit algebraischer Vielfachheit p_1 gilt:

$$\mathrm{e}^{\underline{A}t} = \underline{V} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & t\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(p_1-1)!}t^{(p_1-1)}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(p_1-2)!}t^{(p_1-2)}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_{p_1+1} t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underline{V}^{-1}.$$