UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Regelungstechnik für die Medizin- und Verfahrenstechnik (RTMV)
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Wintersemester 2025/2026 am 27.02.2026, 12:00 – 14:00 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	insgesamt
Punkte	26.5	9	8	8.5	11	8	9	13	14	12.5	119.5
erreicht											

Notentabelle

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (26.5 Punkte)

a) Ein System, dass nicht asymptotisch stabil ist, ist instabil. (1 Punkt)

☐ wahr ☑ falsch

b) Ein SISO-System hat immer genau einen Eingang, einen Zustand und einen Ausgang. (1 Punkt)

☐ wahr ☑ falsch

c) Die Impulsantwort eines instabilen Systems geht betraglich für $t \to \infty$ gegen ∞. (1 Punkt)

☑ wahr ☐ falsch

d) Ein Baum schwankt im Wind, ohne dabei Äste oder Blätter zu verlieren. Charakterisieren Sie die Stabilität des Systems *Baum* mit Eingang *Windgeschwindigkeit* und Ausgang *Verschiebung eines bestimmten Astes*! (1 Punkt)

☑ asymptotisch stabil ☐ grenzstabil ☐ instabil

e) Mithilfe der Laplacetransformation können Aussagen über den zeitlichen Verlauf des Systemeingangs gemacht werden. (1 Punkt)

☐ wahr ☑ falsch

f) Die Laplacetransformation wird verwendet, um das Frequenzverhalten eines Systems zu bewerten. (1 Punkt)

☑ wahr ☐ falsch

g) Die Laplacetransformation wird verwendet, um das Bodediagramm eines Systems zu erstellen. (1 Punkt)

☑ wahr ☐ falsch

h) Durch Anwendung der Laplacetransformation werden auch nichtlineare Systeme linear. (1 Punkt)

☐ wahr ☑ falsch

i) Welche Größen haben i. Allg. einen aktiven Einfluss auf das Verhalten eines Systems im offenen respektive geschlossenen Regelkreis? (u: Eingangsgröße, y: Ausgangsgröße, ν: Messrauschen, $\underline{z}$: Störgrößen, $\underline{x}$: Zustandsvektor, $\underline{\hat{x}}$: geschätzter Zustandsvektor) (6 Punkte)

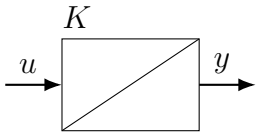
	u	y	ν	z	$\underline{x}$	$\underline{\hat{x}}$
offener Regelkreis	☑	☐	☐	☑	☑	☐
geschlossener Regelkreis	☑	☑	☑	☑	☑	☑
keins von beidem	☐	☐	☐	☐	☐	☐

j) Welche der genannten Größen beeinflusst den Ausgang, aber nicht das Verhalten eines Systems im offenen Regelkreis? (0.5 Punkte)

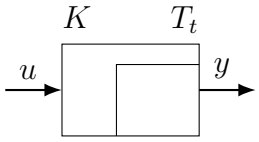
ν im offenen Regelkreis

k) Machen Sie Angaben zur Stabilität der dargestellten Übertragungsglieder! (1.5 Punkte)

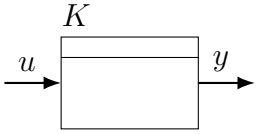
Übertragungsglied 1:



Übertragungsglied 2:



Übertragungsglied 3:



	ÜG 1	ÜG 2	ÜG 3
instabil	☐	☐	☐
grenzstabil	☑	☐	☐
asymptotisch stabil	☐	☑	☑

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

l) Bestimmen Sie die Eigenschaften der folgenden Differentialgleichungen: (3.5 Punkte)

I: $\ddot{y}(t) + 6t\dot{y}(t) - 3y(t) = 3\dot{u}(t) - 15u(t)$

II: $9y^{(3)}(t) - 3\ddot{y}^2(t) + 7y(t) = 18\dot{u}(t)$

III: $y^{(3)}(t) + 3\cos(\dot{y}(t)) = 34\ddot{u}(t) + 17\dot{u}(t) - 3u(t)$

IV: $4y^{(3)}(t) + 9\mathrm{e}^{\ddot{y}(t)} + 4t^9\dot{y}(t) + 13y(t) = u(t)$

V: $5\ddot{y}(t) + 12\dot{y}(t) - 8y(t) = \ddot{u}(t) - 8t\dot{u}(t) + u(t)$

VI: $y^{(3)}(t) + 2\mathrm{e}^t\ddot{y}(t) + 12\dot{y}(t) + t^2y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$

VII: $y^{(25)}(t) + 24y^{(14)}(t) + 19\ddot{y}(t) + 12y(t) = \dot{u}(t) + 14\ddot{u}(t)$

	I	II	III	IV	V	VI	VII
linear bzgl. y, u und deren Ableitungen	☑	☐	☐	☐	☑	☑	☑
zeitinvariant	☐	☑	☑	☐	☐	☐	☑
keins von beidem	☐	☐	☐	☑	☐	☐	☐

m) Geben Sie die Ruhelagen der folgenden Differentialgleichungen an, bei denen $y_0 = 4$ gilt und linearisieren Sie um diese!

a) $y^{(3)}(t) + 3\mathrm{e}^{4\dot{y}(t)} = 9\cos(\ddot{u}(t)) + \dot{u}(t) - 3u(t)$ (1 Punkt)

$u_0 =$ 2 , DGL: $\Delta y^{(3)}(t) + 12\Delta\ddot{y}(t) = \Delta\dot{u}(t) - 3\Delta u(t)$

b) $9y^{(3)}(t) - 7\ddot{y}^2(t) + 3y(t) = 18\dot{u}(t) - 12u(t)$ (1 Punkt)

$u_0 =$ -1 , DGL: $9\Delta y^{(3)}(t) + 3\Delta y(t) = 18\Delta\dot{u}(t) - 12\Delta u(t)$

n) Gegeben sei ein System mit Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{(s-6)(s+7)}{s^2+8s}$.

(i) Ist das System instabil, grenzstabil oder asymptotisch stabil? (1 Punkt)

☐ instabil ☑ grenzstabil ☐ asymptotisch stabil

(ii) Gegen welchen Wert strebt die Impulsantwort des Systems für $t \to \infty$? (1 Punkt)

$\lim_{t\to\infty} g(t) =$ $-\frac{21}{4} = -5,25$

(iii) Wie viele Zustände hat das System mindestens? (1 Punkt)

☐ 0 ☐ 1 ☑ 2 ☐ 3 ☐ 4

o) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Impulsantworten (Abbildung 1) zu. (2 Punkte)

Übertragungsfunktion	**Impulsantwort**
$G_1(s) = \dfrac{s^3 - 3s^2 - 25s - 21}{4s^4 + 32s^3 + 68s^2 - 8s - 96}$	A
$G_2(s) = 12\dfrac{s + 2}{s^3 + 11s^2 + 39s + 45}$	D
$G_3(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 4s}{s^3 + 15s^2 + 68s + 96}$	C
$G_4(s) = \dfrac{10}{s^2 + 64} - \dfrac{1}{s - 0.4}$	B

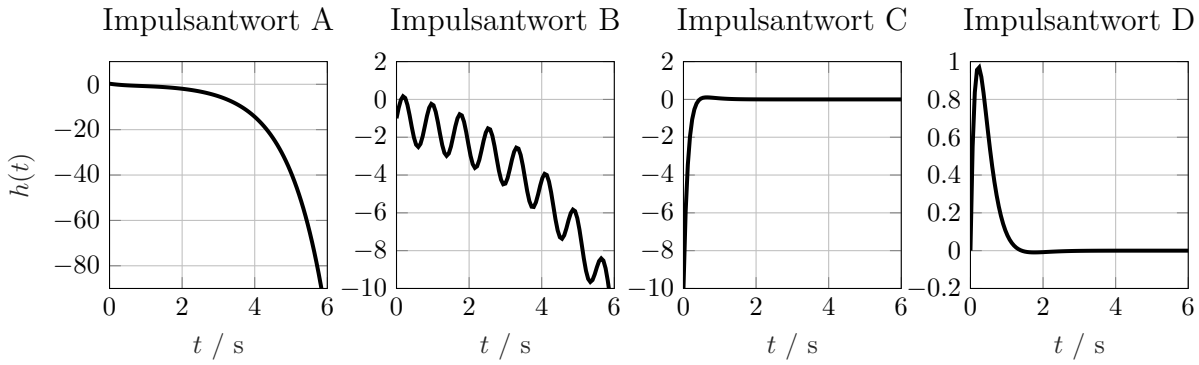


Abbildung 1: Impulsantwort A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s),\ i = 1 \ldots 4$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt ein lineares System, in welchem acht Übertragungsfunktionen miteinander kombiniert sind:

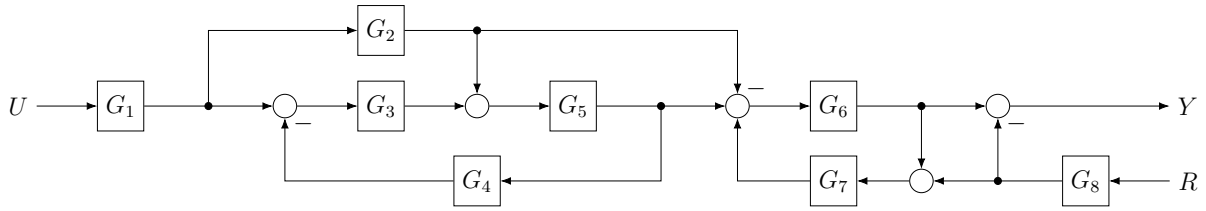


Abbildung 2: Blockschaltbild

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_U(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ des Systems bezüglich dem Eingang U! (4 Punkte)

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_R(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$ des Systems bezüglich dem Eingang R! (3 Punkte)

c) Es seien die folgenden Übertragungsfunktionen gegeben:

$$G_1(s) = K_1 = \text{konst} \qquad G_2(s) = 0$$
$$G_3(s) = \frac{1}{s} \qquad G_4(s) = 0$$
$$G_6(s) = K_2 = \text{konst} \qquad G_7(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Damit vereinfacht sich das Blockschaltbild in Abbildung 2 zu:

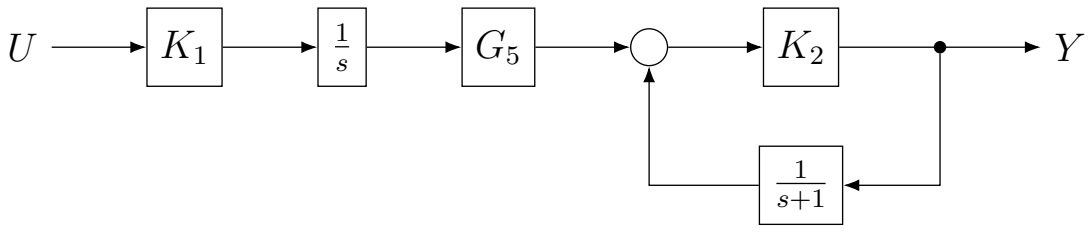


Abbildung 3: Vereinfachtes Blockschaltbild

Welchen relativen Grad r_5 muss die Übertragungsfunktion $G_5(s)$ haben, damit das System bezüglich des Eingang U technisch realisierbar ist? ($R = 0$) (1 Punkt)

r_5 | ≥ -1

Geben Sie außerdem eine Übertragungsfunktion für $G_5(s)$ an, die das System technisch nicht realisierbar macht! (1 Punkt)

$$G_5(s) = \boxed{\frac{(s+1)^3}{s+2}}$$

Hinweis: Der relative Grad r einer Übertragungsfunktion berechnet sich mit

$$r = \text{Grad}\textit{(Nennerpolynom)} - \text{Grad}\textit{(Zählerpolynom)}$$

Lösung Aufgabe 2.

a)

$$\begin{aligned}
Y &= Y_6 - G_8 R \\
Y_6 &= G_6 U_6 \\
U_6 &= G_5 U_5 + G_7 U_7 - G_2 U_2 \\
U_7 &= Y_6 + G_8 R \\
&\rightarrow Y_6 = G_6 \left(G_5 U_5 + G_7 \left(Y_6 + G_8 R\right) - G_2 U_2\right) \\
&\Rightarrow Y_6 = \frac{1}{1 - G_6 G_7} \left(G_6 G_5 U_5 - G_6 G_2 U_2 + G_6 G_7 G_8 R\right) \\
U_5 &= G_2 U_2 + G_3 U_3 \\
U_2 &= G_1 U \\
U_3 &= G_1 U - G_4 G_5 U_5 \\
&\rightarrow U_5 = G_2 G_1 U + G_3 \left(G_1 U - G_4 G_5 U_5\right) \\
&\Rightarrow U_5 = \frac{\left(G_2 + G_3\right) G_1}{1 + G_3 G_4 G_5} U \\
&\Rightarrow Y = \frac{G_6 G_1 \left(G_5 \left(G_2 + G_3\right) - G_2 - G_2 G_3 G_4 G_5\right)}{\left(1 - G_6 G_7\right) \left(1 + G_3 G_4 G_5\right)} U + \frac{G_8 \left(2 G_6 G_7 - 1\right)}{1 - G_6 G_7} R
\end{aligned}$$

Übertragungsfunktion bzgl. U:

$$G_U(s) = \frac{G_6 G_1 \left(G_5 \left(G_2 + G_3\right) - G_2 - G_2 G_3 G_4 G_5\right)}{\left(1 - G_6 G_7\right) \left(1 + G_3 G_4 G_5\right)}$$

b) Übertragungsfunktion bzgl. R:

$$G_R(s) = \frac{G_8 \left(2 G_6 G_7 - 1\right)}{1 - G_6 G_7}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

c) Übertragungsfunktion bzgl. U:

$$G_U(s) = K_1 K_2 \frac{1+s}{s\,(1-K_2+s)} G_5$$

- relativer Grad ohne G_5: $\tilde{r} = 2 - 1 = 1$
- relativer Grad mit G_5: $r = \tilde{r} + r_5 \overset{!}{\geq} 0$
- relativer Grad von G_5: $r_5 \geq -\tilde{r} = -1$
- Beispielfunktion: $G_5 = \dfrac{(s+1)^3}{s+2}$

Aufgabe 3. (8 Punkte)

Hinweis: Alle Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte der Gleichung

$$x(t) = 5I_0(3t) + 2t\sin(\alpha t) + t^4 \mathrm{e}^{-2t}, \tag{1}$$

wobei $I_0(at)$ die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0 ist und die Übertragungsfunktion $\mathcal{L}\{I_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ hat. (3 Punkte)

Hinweis: $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$

Gegeben sei im Folgenden ein System Σ_1 mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{2s^2 + 5s + 2} \tag{2}$$

mit verschwindenden Anfangsbedingungen.

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems Σ_1 an! (2 Punkte)

c) Geben Sie die Sprungantwort des Systems Σ_1 an! (1 Punkt)

d) Das System Σ_1 ist (1 Punkt)

☑ asymptotisch stabil ☐ grenzstabil ☐ instabil.

e) Wie würde sich die Übertragungsfunktion bei den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$ und $\dot{y}(0) = -1$ ändern? (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 3.

a)
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{5}{\sqrt{s^2+3^2}} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right) + \frac{4!}{(s+2)^5} \\ &= \frac{5}{\sqrt{s^2+9}} + \frac{4s\alpha}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2} + \frac{24}{(s+2)^5} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{s^2+4s+3}{2s^2+5s+2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}s+1}{s^2+\frac{5}{2}s+1} \\ &\overset{!}{=} \frac{1}{2} + \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+0,5} \end{aligned}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}s + 1 = (A+B)s + 0,5A + 2B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = A + B \\ 1 = 0,5A + 2B \end{cases} \Rightarrow A = 2 - 4B \Rightarrow \frac{3}{4} = 2 - 4B + B \Leftrightarrow B = \frac{5}{12} \Rightarrow A = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow G_1(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(s+2)} + \frac{5}{12(s+0,5)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g_1(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{5}{12}\mathrm{e}^{-0.5t}$$

c) $h_1(t) = \int_0^t g_1(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sigma(t) - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.5t}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \dots$$

d) alle Pole negativ / $\lim_{t\to\infty} g_1(t) = 0$ / $\lim_{t\to\infty} h_1(t) = \text{const.}$ $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

e) gar nicht

Aufgabe 4. (8.5 Punkte)

Hinweis: Alle Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Für eine lineare Differentialgleichung *DGL1* mit Eingangsgröße $u(t)$, Ausgangsgröße $y(t)$, Zustandsvektor $\underline{x}$ und Anfangsbedingungen $\left.\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}\, t^n}\right|_{t=0} = y_0^{(n)} \neq 0$ gilt:

i) Y(s) = G(s)U(s) (1 Punkt)

☐ wahr ☑ falsch

ii) Mit steigendem Grad von *DGL1* in y, wird der/die ... . (1.5 Punkte)

	niedriger	höher	kein Einfluss
Grad des Zählerpolynoms	☐	☐	☑
Grad des Nennerpolynoms	☐	☑	☐
	instabiler	**stabiler**	**kein Einfluss**
Stabilität der Differentialgleichung	☐	☐	☑

iii) Mit steigendem Grad von *DGL1* in u, wird der/die ... . (1.5 Punkte)

	niedriger	höher	kein Einfluss
Grad des Zählerpolynoms	☐	☑	☐
Grad des Nennerpolynoms	☐	☐	☑
	instabiler	**stabiler**	**kein Einfluss**
Stabilität der Differentialgleichung	☐	☐	☑

Im Folgenden wird ein physikalisches System betrachtet, das durch die Differentialgleichung

$$2\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 7y(t) = 2\ddot{u}(t - T_1) + 3u(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 3$ und $\ddot{y}(0) = 3$ sowie den Parameter $T_1 > 0$ beschrieben wird.

b) Die Differentialgleichung ist ... . (1.5 Punkte)

☑ linear in u ☑ linear in y ☑ zeitinvariant

☐ nichtlinear in u ☐ nichtlinear in y ☐ zeitvariant

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

c) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte der Differentialgleichung und geben Sie die Übertragungsfunktion an! Gehen Sie dabei davon aus, dass $\dot{u}(0) = u(0) = 0$! (2 Punkte)

$\mathcal{L}\{\dots\} = \boxed{(2s^3 + s^2 + 3s - 7)\,Y(s) - 4s^2 - 8s - 15 = \left(2s^2 \mathrm{e}^{-T_1 s} + 3\right) U(s)}$

$G(s) = \boxed{\dfrac{2s^2 \mathrm{e}^{-T_1 s} + 3}{2s^3 + s^2 + 3s - 7}}$

d) Wie viele Zustände hat das System mindestens, wenn $T_1 = 0$? (1 Punkt)

$\boxed{3}$

Lösung Aufgabe 4.

c) $2s^3 Y(s) - 4s^2 - 6s - 6 + s^2 Y(s) - 2s - 3 + 3sY(s) - 6 - 7Y(s) = 2s^2 U(s)\mathrm{e}^{-T_1 s} + 3U(s)$

$\Leftrightarrow \left(2s^3 + s^2 + 3s - 7\right) Y(s) - 4s^2 - 8s - 15 = \left(2s^2 \mathrm{e}^{-T_1 s} + 3\right) U(s)$

Aufgabe 5. (11 Punkte)
Gegeben sei das System

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und wählen Sie die dazugehörende Transformationsmatrix $\underline{V}$, die auf eine Diagonalisierung bzw. eine Jordan-Normalform $\underline{D}$ des Systems führt! (3 Punkte)

Eigenwerte $\boxed{-3, -3}$ in Diagonal-/Jordan-Form $\underline{D} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}$

$\square\ \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \boxtimes\ \underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \square\ \underline{V} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \square\ \underline{V} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $e^{\underline{A}t}$! (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Verlauf der Zustände für den Eingang $u(t) = 3t$! (4 Punkte)

d) Ist das System asymptotisch stabil? Bitte begründen Sie Ihre Antwort! (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 5.

a)

- Eigenwerte:

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix}\right) = (s+1)(s+5) + 2 \cdot 2 = (s+3)^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow s_1 = -3,\ s_2 = -3s$$

- Eigenvektor $\underline{v}_1$ zu s_1:

$$(s_1\underline{I} - \underline{A})\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{1,1} + 2v_{1,2} \\ 2v_{1,1} + 2v_{1,2} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow v_{1,2} = -v_{1,1} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \stackrel{\alpha=1}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

- Hauptvektor $\underline{v}_2$ zu s_2:

$$(s_2\underline{I} - \underline{A})\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{1,1} + 2v_{1,2} \\ 2v_{1,1} + 2v_{1,2} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underline{v}_1$$

$$\Rightarrow v_{2,1} = \frac{1}{2}(1 - 2v_{2,2}) = \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \beta \\ \beta \end{bmatrix} \stackrel{\beta=1}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Transitionsmatrix:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{V} e^{\tilde{\underline{A}}t} \underline{V}^{-1} \text{ mit } \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{\underline{A}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ -e^{-3t} & -te^{-3t} + e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-3t} + 2te^{-3t} & 2te^{-3t} \\ -2te^{-3t} & e^{-3t} - 2te^{-3t} \end{bmatrix}$$

c) Zustände $x(t) = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau$

-

$$e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-3t} + 2te^{-3t} & 2te^{-3t} \\ -2te^{-3t} & e^{-3t} - 2te^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} + 4te^{-3t} \\ e^{-3t} - 4te^{-3t} \end{bmatrix}$$

-

$$\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\tau\mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3(t-\tau)} \\ -e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \tau\mathrm{d}\tau$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)}\tau \\ -\frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)}\tau \end{bmatrix} \right]_0^t - \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)} \\ -\frac{1}{3}e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{3}t \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{9}e^{-3(t-\tau)} \\ -\frac{1}{9}e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} \right]_0^t$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{-3t} \\ -\frac{1}{3}t + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

•

$$x(t) = e^{\underline{A}t}\underline{x}_0 + 3\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\tau \mathrm{d}\tau$$
$$= \begin{bmatrix} t - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}e^{-3t} + 4te^{-3t} \\ -t + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} - 4te^{-3t} \end{bmatrix}$$

d) Das System ist stabil. Es hat nur Eigenwerte mit negativem Realteil, siehe a).

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Die Feststellbremse eines Krankenhausbettes soll nur bei Überschreiten einer kritischen Kraft F_{krit} angezogen oder gelöst werden können. Der Mechanismus, der dies realisiert, besteht aus einer Zug/Druck-Feder der Steifigkeit c, die auf einer Seite drehbar an einem festen Punkt und auf der anderen Seite drehbar und seitlich verschiebbar gelagert ist (vgl. Abb. 4). Die Feder ist bei der Länge $l_0 \gg l_S$ entspannt. Die Trägheit des Mechanismus wird zur Punktmasse m im Loslager zusammengefasst.
Im geöffneten Zustand drükt die Feder die Bremse auf (entspricht einer Bewegung des Loslagers nach rechts in Abb. 4). Sobald der Schwellwert $z = 0$ überschritten wird, wird die Bremse auf den Reifen gedrückt (das verschiebbar gelagerte Ende wird von der Feder gegen den dargestellten Anschlag gedrückt). Zusätzlich wird eine Kraft F_N vom Krankenhauspersonal aufgebracht.

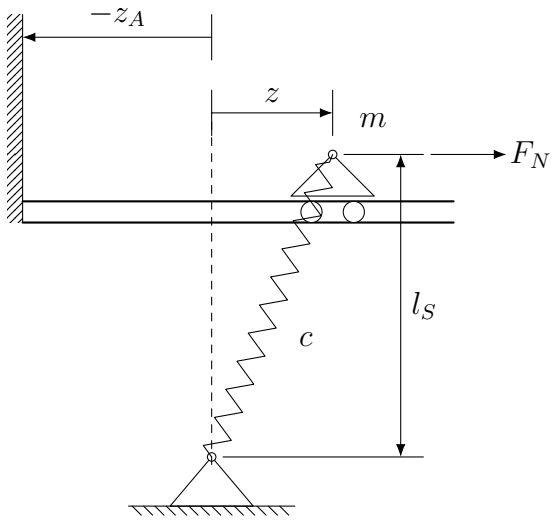


Abbildung 4: Bremsmechanismus eines Krankenhausbettes (schematisch).

Betrachten Sie den Mechanismus entsprechend Abb. 4 als ein ebenes System! Für die Modellierung muss der Anschlag nicht berücksichtigt werden. Das Modell ist damit nur im Bereich $z > z_A$ gültig.

Hinweis: Aufgabenteil b) ist unabhängig von den anderen Aufgabenteilen lösbar.

a) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Federkraft in Abhängigkeit der Auslenkung z auf, indem Sie (2 Punkte)
   1. die Länge der Feder in Abhängigkeit der Auslenkung z,
   2. den Anteil der Federkraft in z-Richtung bestimmen und
   3. das Kräftegleichgewicht aufstellen (Impulssatz)!

b) Benennen Sie die Eingangs- und Ausgangsgröße des Systems! (1 Punkt)

$$\text{Eingang } u = \boxed{F_N}, \qquad \text{Ausgang } y = \boxed{z}$$

c) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Bremsmechanismus ohne Anfangsbedingungen an! (1 Punkt)

$$\dot{\underline{x}} = \boxed{\begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{c}{m} x_1 \left(\frac{l_0}{\sqrt{x_1^2 + l_S^2}} - 1 \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} u \end{bmatrix}}$$

$$y = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}}$$

d) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Bremsmechanismus bei verschwindendem Eingang ($u = 0$)! (1 Punkt)

e) Linearisieren Sie das System um eine Ruhelage! Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des linearisierten Systems an! (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

a) $l(z) = \sqrt{z^2 + l_S^2}$

$$F(z) = c\,(l_0 - l(z)) = c\left(l_0 - \sqrt{z^2 + l_S^2}\right)$$

$$F_z(z) = \frac{z}{l(z)} F(z) = cz \frac{l_0 - l(z)}{l(z)} = cz\left(\frac{l_0}{l(z)} - 1\right) = cz\left(\frac{l_0}{\sqrt{z^2 + l_S^2}} - 1\right)$$

Kräftegleichgewicht:

$$m\ddot{z} = cz\left(\frac{l_0}{\sqrt{z^2 + l_S^2}} - 1\right) + F_N$$

d) $0 = cz_0\left(\frac{l_0}{\sqrt{z_0^2 + l_S^2}} - 1\right)$

$$\Rightarrow z_{0,1} = 0 \quad \vee \quad \frac{l_0}{\sqrt{z_{0,2}^2 + l_S^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow z_{0,2}^2 = l_0^2 - l_S^2 \Leftrightarrow z_{0,2} = \pm\sqrt{l_0^2 - l_s^2}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

$$
\begin{aligned}
\text{e)} \quad m\Delta\ddot{z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(cz\left(\frac{l_0}{\sqrt{z^2+l_S^2}}-1\right)\right)\Bigg|_{z=0}\Delta z + \Delta F_N \\
&= \left(c\left(\frac{l_0}{\sqrt{z^2+l_S^2}}-1\right)+cz(\dots)\right)\Bigg|_{z=0}\Delta z + \Delta F_N = c\left(\frac{l_0}{l_S}-1\right)\Delta z + \Delta F_N \\
\Rightarrow \Delta\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{m}\left(\frac{l_0}{l_S}-1\right) & 0 \end{bmatrix}\Delta\underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}\Delta u
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7. (9 Punkte)

Hinweis: Aufgabenteil b) ist unabhängig lösbar.
Gegeben sei das System

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_2^2 + u \\ \sin(x_3) - \cos(x_2) + x_2 u \\ x_1 - x_2 \sin(x_3) + u^2 \end{bmatrix}$$
$$y = x_1 + 2\cos(x_3) x_2$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) $\underline{x}_\mathrm{R}$ des gegebenen Systems mit $u_\mathrm{R} = 0$! (5 Punkte)

b) Linearisieren Sie das System um den Arbeitspunkt $\underline{x}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \end{bmatrix}^\top$, $u_s = \frac{1}{2}$ und geben Sie es in der Form

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A}\Delta\underline{x} + \underline{b}\Delta u$$
$$\Delta y = \underline{c}^\top \Delta\underline{x} + d\Delta u$$

an. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

a) Ruhelagen

- $\dot{x}_1 = 0$:

$$x_1 x_2 - x_2^2 = 0 \qquad \begin{aligned} &\rightarrow (x_1 - x_2) x_2 = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{oder} \\ &\quad\ x_2 = 0 \end{aligned}$$

- $\dot{x}_2 = 0$:

$$\sin(x_3) - \cos(x_2) = 0 \qquad \begin{aligned} &\rightarrow \sin(x_3) = \cos(x_2) \\ &\Rightarrow \sin(x_3) = \cos(x_2) = \cos(x_1) \quad \text{oder} \\ &\quad \sin(x_3) = 0 \rightarrow x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\tilde{k}\pi, \tilde{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- $\dot{x}_3 = 0$:

$$x_1 - x_2 \sin(x_3) = 0$$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1(1 - \cos(x_1)) = 0 \rightarrow x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{oder} \\ &\quad\ x_1 = 0 \end{aligned}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

- Unendliche viele Ruhelagen mit $k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi \\ x_2 &= 2k\pi \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2\tilde{k}\pi \end{aligned}$$

c) Zustandsraumdarstellung: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u)$, $y = \underline{h}(\underline{x})$
Jacobi-Matrizen:

- $\underline{A} = \left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & u + \sin(x_2) & \cos(x_3) \\ 1 & -\sin(x_3) & -x_2\cos(x_3) \end{bmatrix}\Bigg|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\underline{b} = \left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial u}\right|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ 2u \end{bmatrix}\Bigg|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\underline{C} = \left.\dfrac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 1 & 2\cos(x_3) & -2x_2\sin(x_3) \end{bmatrix}\Big|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$
- $\underline{D} = \left.\dfrac{\partial \underline{h}}{\partial u}\right|_{\underline{x}_s, u_s} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
- $\rightarrow \quad \Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A}\Delta\underline{x} + \underline{b}\Delta u$
  $\rightarrow \quad \Delta y = \underline{c}^\top \Delta\underline{x} + d\Delta u$

Aufgabe 8. (13 Punkte)

Hinweis: Aufgabenteil c) ist unabhängig von Aufgabenteil b) lösbar. Aufgabenteil d) und e) sind unabhängig von den anderen Aufgabenteilen lösbar.
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{(5s-5)\,(s+100)}{(2s^2+4s+50)\,(s+1)}\,.$$

a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Polstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polpaar). (2 Punkte)

$$G(s) = \boxed{\frac{5}{2}\frac{(s-1)\,(s+100)}{(s^2+2s+25)\,(s+1)}}$$

b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplituden- und Phasengang des Systems. Lösen Sie die Betragsstriche des Amplitudengangs vollständig auf. Lösen Sie analog den Phasengang auf. arctan-Terme müssen nicht weiter vereinfacht werden. (4 Punkte)
Hinweis: Das Argument einer komplexen Zahl $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ist $\arg(z) = \operatorname{atan2}(x, y)$ *mit*

$$\operatorname{atan2}(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & x < 0,\ y \geq 0 \\ \pm\pi & x < 0,\ y = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi & x < 0,\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x = 0,\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (5 Punkte)

Im Folgenden wird ein anderes, lineares, zeitinvariantes System $\tilde{G}(s)$ betrachtet, dessen Bode-Diagramm in Abbildung 5 gegeben ist. Das System $\tilde{G}(s)$ wird mit einem Totzeitglied $G_T(s) = e^{-5s}$ in Reihe verschaltet. Das Gesamtsystems ergibt sich zu $G_{\text{ges}}(s) = G_T(s) \cdot \tilde{G}(s)$.

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

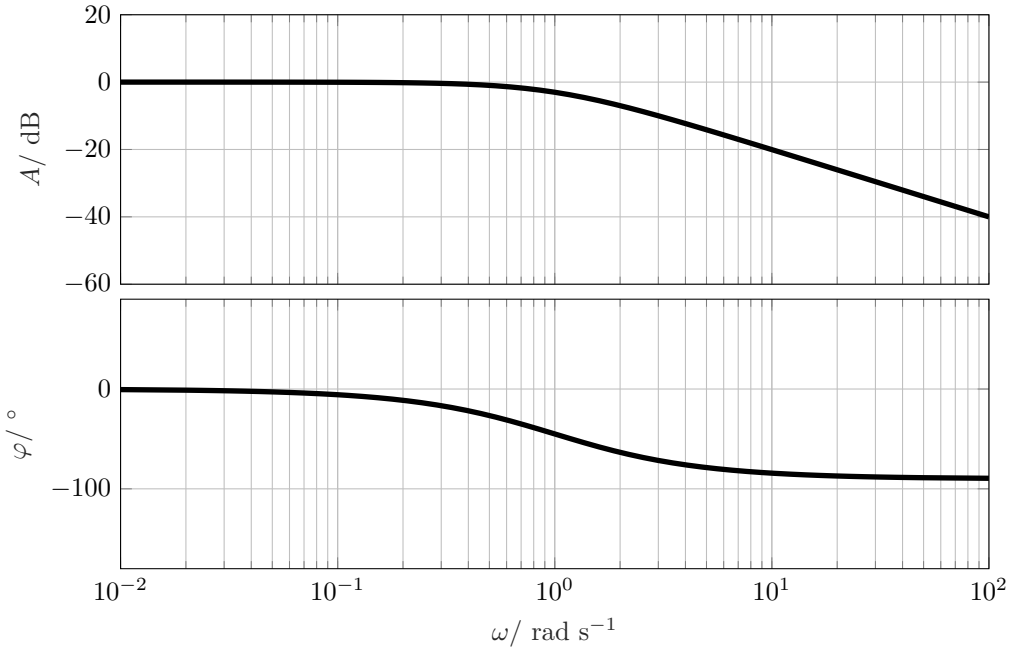


Abbildung 5: Bode-Diagramm einer anderen Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$.

d) Wie ergibt sich das Bode-Diagramm des Amplitudengangs des Gesamtsystems $G_{\text{ges}}(s) = G_T(s) \cdot \tilde{G}(s)$ aus dem gegebenen Bode-Diagramm? Erläutern Sie! (1 Punkt)

e) Der Phasengang $\tilde{\varphi}(\omega)$ des Systems $\tilde{G}(s)$ sei bekannt. Wie berechnet sich mit diesem der Phasengang $\varphi_{\text{ges}}(\omega)$ des Gesamtsystems $G_{\text{ges}}(s) = G_T(s) \cdot \tilde{G}(s)$? (1 Punkt)

$$\varphi_{\text{ges}}(\omega) = \boxed{\tilde{\varphi}(\omega) - 5\omega}$$

Lösung Aufgabe 8.

b) Mit $s = j\omega$ ergibt sich der Frequenzgang

$$G(j\omega) = \frac{5}{2} \frac{(j\omega - 1)\,(j\omega + 100)}{(-\omega^2 + 2j\omega + 25)\,(j\omega + 1)}$$

der Amplitudengang

$$A(\omega) = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\omega^2 + 100^2}}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

und der Phasengang

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \arg\left(\frac{5}{2}\right) + \arg\left(j\omega - 1\right) + \arg\left(j\omega + 100\right) - \arg\left(25 - \omega^2 + 2j\omega\right) - \arg\left(j\omega + 1\right) \\ &= 0 + \arctan\left(\frac{\omega}{-1}\right) + \pi + \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{1}\right) - \operatorname{atan2}\left(25 - \omega^2, 2\omega\right) \\ &= -2\arctan\left(\omega\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right) - \arctan\left(\frac{2\omega}{25 - \omega^2}\right) + \begin{cases}\pi & 0 < \omega < 5 \\ 0 & 5 < \omega\end{cases}.\end{aligned}$$

c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt

$$c = \frac{5}{2},\ r = 0,\ \omega_{min} = 1,\ G^*(0) = -4$$

$$A_{\mathrm{dB}}(\omega_{min}) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{5}{2}\left(-4\right)\right| \cdot (1)^0\right) = 20\,\mathrm{dB}$$

$$c \cdot G^*(0) = -10 < 0 \Rightarrow \varphi(0) = -180^\circ$$

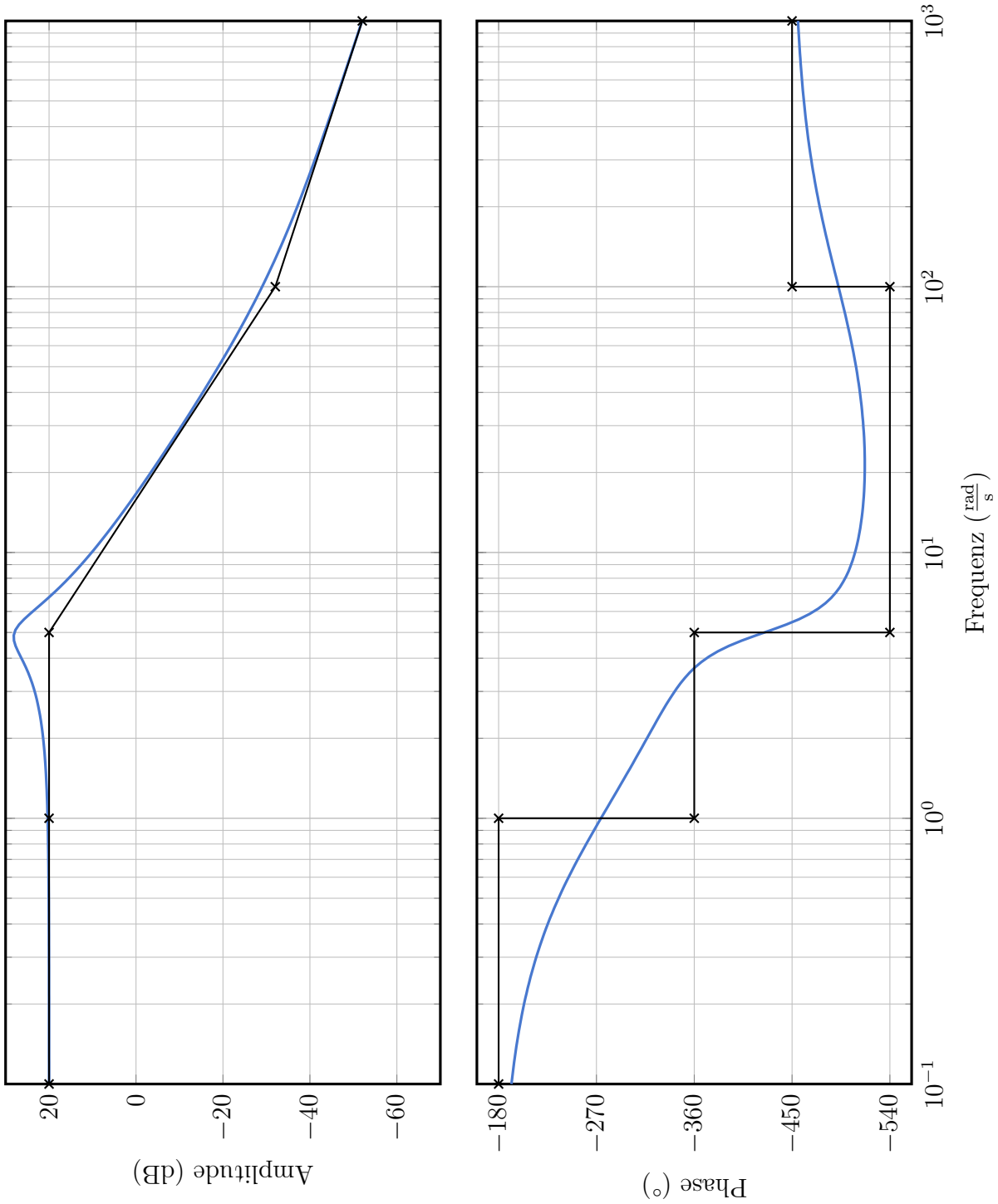
$$n_1 = p_1 = 1,\ q_2 = 5,\ n_3 = 100.$$

d) Der Amplitudengang bleibt unverändert, da

$$\begin{aligned}|G_{\mathrm{ges}}(j\omega)| &= |\tilde{G}(j\omega)||G_T(j\omega)| \\ &= |\tilde{G}(j\omega)|\end{aligned}$$

und der Betrag des Totzeitglieds $|G_T(j\omega)| = 1$ ist.

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart



Aufgabe 9. (14 Punkte)

Gegeben sei folgende Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \text{für } t > 0\,; \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t).$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems. (2 Punkte)

b) Ist das System stabil? Begründen Sie! (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix $\underline{Q}_B$ des Systems. (2 Punkte)

d) Ist das System beobachtbar? Begründen Sie! (1 Punkt)

e) Da die Systemzustände nicht vollständig gemessen werden können, soll nun ein Luenberger-Beobachter implementiert werden, um die Zustände zu schätzen. Legen Sie die Beobachtermatrix $\underline{L}$ mit Hilfe der Ackermann-Formel so aus, dass die Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -3$ liegen. (5 Punkte)

f) Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsmatrix $\underline{P}_S$ des Systems. (2 Punkte)

g) Ist das System steuerbar? Begründen Sie! (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 9.

a) Eigenwerte des Systems:

$$\begin{aligned} \det\left(\lambda \underline{I} - \underline{A}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda(\lambda + 2) + 1 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

b) Ja, das System ist stabil, da alle Eigenwerte einen negativen Realteil haben.

c) Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^\top \\ \underline{c}^\top \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

mit

$$\underline{c}^\top \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Ja, weil $\underline{Q}_B$ nicht singulär ist und vollen Rang hat.

e) Die Pole der Fehlerdynamik $\lambda_1 = -$ und $\lambda_2 = -3$ führen zum gewünschten charakteristischen Polynom

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

Das charakteristische Polynom der Fehlerdynamik mit Beobachtermatrix $\underline{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda \underline{I} - (\underline{A} - \underline{L}\underline{c}^\top)\right) &= \det\left(\lambda \underline{I} - \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \det\left(\lambda \underline{I} - \begin{bmatrix} -2 - l_1 & 1 \\ -1 - l_2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 + l_1 & -1 \\ 1 + l_2 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= \lambda\left(\lambda + 2 + l_1\right) + 1 + l_2) \\
&= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + 1 + l_2
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt zu

$$\begin{aligned}
2 + l_1 &\stackrel{!}{=} 5 & \Rightarrow l_1 &= 3 \\
1 + l_2 &\stackrel{!}{=} 6 & \Rightarrow l_2 &= 5
\end{aligned}$$

Die Ackermann-Formel für den Beobachterentwurf ergibt sich über die Dualität zu

$$\underline{L} = \left(\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{t}^\top \\ \underline{t}^\top \underline{A}^\top \\ \underline{t}^\top \left(\underline{A}^\top\right)^2 \end{bmatrix} \right)^\top$$

mit $\underline{t}$ als letzte Spalte der Beobachtbarkeitsmatrix. Die Ackermann-Formel führt bei Einsetzen analog zu

$$\underline{L} = \left(\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right)^{\top} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

f) Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{P}_S = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{Ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit

$$\underline{Ab} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

g) Ja, weil $\underline{S}_P$ nicht singulär ist und vollen Rang hat.

Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Institut für Systemdynamik
Universität Stuttgart

Aufgabe 10. (12.5 Punkte)

Gegeben sei die Regelstrecke $G_S(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)}$. Für diese Strecke soll entsprechend Abb. 6

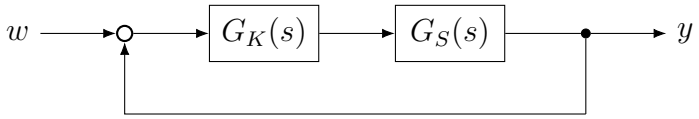


Abbildung 6: Regelkreis.

ein Regler entworfen werden.

a) Ist die Regelstrecke G_S asymptotisch stabil? Begründen Sie! (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie die Gesamtübertragungsfunktion G_{wy} des geschlossenen Kreises und verwenden Sie hierfür den allgemeinen Regler $G_K(s) = \frac{Z(G_K)}{N(G_K)}$. (3 Punkte)

c) Kann die Regelstrecke mit einem Proportionalregler $G_K(s) = K_P$ stabilisiert werden? Im Falle einer Stabilisierbarkeit sei auch die Bedingung für K_P anzugeben; andernfalls eine Begründung, warum sich die Regelstrecke nicht mit einem Proportionalregler stabilisieren lässt. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie für einen PD-Regler der Form $K_2(s) = K_r(2s + 1)$ den maximalen Bereich $K_{\min} < K_r < K_{\max}$, sodass der geschlossene Kreis asymptotisch stabil ist. Ist der Regler $K_2(s)$ realisierbar? Begründen Sie! (4.5 Punkte)

e) Nennen Sie allgemein die Vor- und Nachteile eines PI-Reglers. (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 10.

a) Die Polstellen der Regelstrecke sind $s_1 = -2$ und $s_2 = 2$. Da die Regelstrecke einen Pol mit positivem Realteil hat (s_2) ist sie instabil und somit nicht asymptotisch stabil.

b)

$$\begin{aligned} Y &= G_K G_S U, \quad U = W - Y \\ Y &= G_K G_S (W - Y) \\ Y (1 + G_K G_S) &= G_K G_S W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{G_K(s)G_S(s)}{1 + G_K(s)G_S(s)} \\ &= \frac{\frac{Z(G_K)}{N(G_K)} \frac{s+1}{(s-2)(s+2)}}{1 + \frac{Z(G_K)}{N(G_K)} \frac{s+1}{(s-2)(s+2)}} \\ &= \frac{Z(G_K)(s+1)}{N(G_K)(s-2)(s+2) + Z(G_K)(s+1)} \end{aligned}$$

c) $G_K(s) = K_P = \frac{Z(G_K)}{N(G_K)} \Rightarrow Z(G_K) = K_P, N(G_K) = 1$

$$G_{wy}(s) = \frac{K_P(s+1)}{(s-2)(s+2) + K_P(s+1)}$$

Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}(s-2)(s+2) + K_P(s+1) &= 0\\ s^2 - 4 + K_P s + K_P &= 0\\ s^2 + K_P s + K_P - 4 &= 0\end{aligned}$$

Mit dem Hurwitzkriterium folgt für asymptotische Stabilität aus dem charakteristischen Polynom

$$\left.\begin{aligned}P &> 0\\ P - 4 &> 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow P > 4$$

d) $G_K(s) = K_r(2s+1)$ Die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}&(s-2)(s+2) + K_r(2s+1)(s+1)\\ &s^2 - 4 + 2K_r s^2 + 2K_r s + K_r s + K_r\\ &(1+2K_r)s + (2K_r + K_r)s + K_r - 4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} a_2 > 0 & a_1 > 0 & a_0 > 0\\ 1 + 2K_r > 0 & K_r > 0 & K_r - 4 > 0\\ K_r > -\frac{1}{2} & K_r > 0 & K_r > 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow K_r > 4 \qquad (K_{\min} = 4, K_{\max} = \infty)$$

Der PD-Regler ist nicht realisierbar, da der Zählergrad größer ist als der Nennergrad.

e)
+ Beseitigt stationäre Fehler
+ Gute Genauigkeit
– kann Schwingungen verstärken
– verlangsamt die Dynamik
– Gefahr von Überschwingen
– Integrator-Windup möglich