

Statistische Grundlagen 2016

VL 02: Grundlagen

- Median:** Zahlen der Größe nach ordnen $\rightarrow$ mittlerer Wert ist Median (wenn n ungerade: Durchschnitt der mittleren Werte)
- Stabilität bei Ausreißern

- Quantil $\hat{x}_\alpha$:** Grenze, die α -Anteil der Daten vom Rest abgrenzt
z.B. $\hat{x}_{0.15}$ grenzt unteres $1/4$ von $3/4$ der Daten ab
 α in Zehnteln = „**Dezile**“

- Boxplot:** Werte: 1 2 5 6 7 7 7 8 8 9 9 9 9 10 10 10 10 10
Median 8.5

- Minimum der Quadrate der Abstände:** $\phi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

- Varianz** $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2$

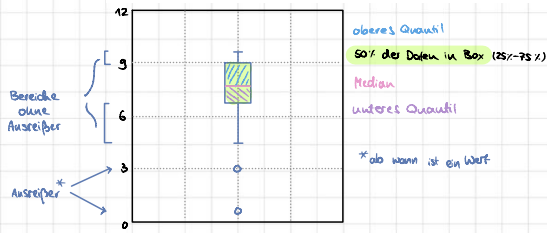
- Standardabweichung:** $s.d.v. = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

- absolute Häufigkeit** $n_i = \sum_{i=1}^k n_i \leftrightarrow$ **relative Häufigkeit** $n_i = \frac{n_i}{n}$

BOXPLOT $\rightarrow$ größte Darstellung d. Verteilung

Ausreißer: $\hat{x}_\alpha$ für $\alpha < 0.05$ bis $\hat{x}_{0.95}$
 • Linie in der Box: Median
 • Whisker: reichen zu den Randwerten (ohne Ausreißer)
 • 5. Minimum

Interquartilsabstand (IQR): $IQR = Q_3 - Q_1$
 • umschließt die mittleren 50% d. Daten
Ausreißer: alles außerhalb von $\cdot Q_1 - 1.5 \cdot IQR$ oder $\cdot Q_3 + 1.5 \cdot IQR$



Anzahl der Freiheitsgrade: warum $n-1$?

Bei Berechnung von $\bar{x}$ braucht man n -Werte $\rightarrow$ das „verbraucht“ 1 Freiheitsgrad. Sobald $\bar{x}$ und $n-1$ Werte feststehen, ist der letzte Wert nicht mehr „frei wählbar“, sondern durch $\bar{x}$ und die anderen Werte schon festgelegt.

- Nominale Skala:** damit kann man nicht rechnen, z.B. Postleitzahlen

- Ordinale Skala:** Objekte nach Kriterium geordnet, z.B. Hausnummern

- Intervallskala:** festgelegter Nullpunkt + Differenzen, z.B. Temperaturskala
 $\rightarrow$ Aussage „doppelt so warm“ macht keinen Sinn

- Verhältnisskala:** Nullpunkt natürlich fixiert, z.B. Masse, Geschwindigkeit
Differenzen + Verhältnisse sinnvoll $\rightarrow$ Aussage „doppelt so schnell“ macht Sinn

- Korrelation:** Zsmhng. zw. statistischen Variablen $\rightarrow$ positive Korrelation: „je mehr, desto mehr“
ermittelt Grad der Stärke der Abhängigkeit $\rightarrow$ negative Korrelation: „je mehr, desto weniger“
! Korrelation $\neq$ Kausalität

Maßgröße, die man berechnen darf	Methode, um Unterschiede festzustellen
Modus = häufigster Wert + Modalwert	—
Modus, Median	Mitteln-Modus-Whitney-Test
Modus, Median, Mittelwert	2-Stichproben t-Test (dafür pos. F-Test nötig)
Modus, Median, Mittelwert	2-Stichproben t-Test (dafür pos. F-Test nötig)

- Hesswertpunkte in Diagramm $\rightarrow$ Linearer Zusammenhang** $y = f(x) = a \cdot x + b$

empirische Varianzen für x und y : $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ $s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

empirische Kovarianz: $c_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ $\Rightarrow a = \frac{c_{x,y}}{s_x^2}$ Steigung der Regressionsgeraden

empirischer Regressionskoeffizient, Pearson: $r_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

mitt. symmetrisch! $a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ z. berechnen $g = a \cdot \bar{x} + b \Leftrightarrow b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}$

$\gamma = \arccos(r_{x,y})$
 $\gamma = \cos$ des Winkels γ zw. beiden auf ihre Messwerte bezogene Messvektoren
 $\hookrightarrow -1 \leq r_{x,y} \leq 1$: nahe +1: starke pos. Korrelation (Winkelmin. nahe 0°)
 0: keine Korrelation
 nahe -1: starke neg. Korrelation

Kausaler Zusammenhang: Fehlerfreiheit x-Achsenwerte, aber Fehler in y-Achse

Rangkorrelation nach Spearman:

1. Zahlen von klein nach groß ordnen
 2. Durchzahlen, bei größten Wert mit 1 starten
- Wobei 2 mal gleicher Wert: 9; 2,5; 2,5; 4

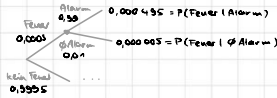
$$r_{\text{Spearman}} = 1 - \frac{6}{n^3 - n} \sum_{i=1}^n d_i^2$$

d_i = Rangdifferenz

$r = 1$: gleiche Reihenfolge
 $r = -1$: gegenläufige Reihenfolge

VL03: Wahrscheinlichkeit u. Stochastische Unabhängigkeit

gekoppelte Wahrscheinlichkeiten als Baumdiagramm, Äste multiplizieren:



Sensitivität: P(Test pos | Resultat pos)

Spezifität: P(Test neg | Resultat neg)

„tatsächlich positiv“: Sensitivität + P(false pos)(1-x) = y

wirkliche positiv

Stochastische Unabhängigkeit: $P(K \cap M) = P(K) \cdot P(M)$

„Sowohl als auch“

VL04: Erwartungswert

Ergodenraum Ω : mögliche Ergebnisse $\rightarrow$ Elemente davon: ω , Wahrscheinlichkeit von ω : $P(\omega)$

Zufallsgröße $X(\omega)$: Zufallsvariable, z.B. zugehörige Kosten $\rightarrow$ jedem X wird ein ω zugeordnet $\rightarrow$ Funktion $\omega \mapsto X(\omega)$

Erwartungswert $E(X) = \mu$, $\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i$ **Wahrscheinlichkeit $\times$ Zufallsgröße** „mittlerer Gewinn“

Varianz:

$$\sigma^2 = \text{Var}(x) = E((x - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Streuung:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{E((x - \mu)^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2}$$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ aber $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$

Klar bzw. gezeigt:

Erwartungswert	Varianz	Standardabweichung σ
$E(a) = a$	$\text{Var}(a) = 0$	$\sigma(a) = 0$
$E(X+a) = E(X) + a$	$\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$	$\sigma(X+a) = \sigma(X)$
$E(ax+by) = aE(X) + bE(Y)$		

Falls X und Y stochastisch unabhängig gilt zusätzlich

Erwartungswert	Varianz	Standardabweichung σ
$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$	$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$	$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$

(kleine, räumliche Unabhängigkeit)

mit den Mittelwerten:

$$E(X) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \mu = \mu; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2; \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma \rightarrow \text{Streuung reduziert sich um } \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Standardfehler:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

VL05: Binomialverteilung

$p = 0.5 \rightarrow$ Pascal'sches Dreieck

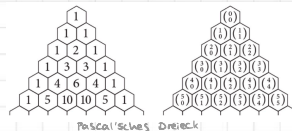
Permutationen: Anordnungsmöglichkeiten = $n!$

Binomialkoeffizient:

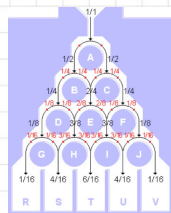
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Möglichkeiten, aus n Elementen deren k auszuwählen

$\rightarrow$ auch in binom. Formeln zu finden: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$



Pascal'sches Dreieck



Pascal'sches Dreieck Versuch

Bernoulli-Experiment: hat genau 2 mögliche Ausgänge

Bernoulli-Kette: n gleiche Bernoulli-Experimente

p = Erfolgswahrsch. im Einzelversuch

$P_n(k)$ = Wahrsch. bei n Versuchen k Erfolge zu haben

$q = 1-p$ = Wahrsch. für Misserfolg im Einzelversuch

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

nicht auf FS

$$E(x) = np$$

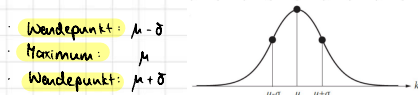
$$\text{Var}(x) = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

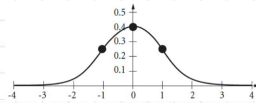
VL06: Normalverteilung

Approximation: $f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \Rightarrow f(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}$

↳ liefert brauchbare Werte für $\sigma^2 = npq > 9$; Integrationsgrenzen $\pm \frac{1}{2}$ können bei großen n weggelassen werden



Standardnormalverteilung: → Maximum wird auf y-Achse geschrieben;
symmetrisch! Wendepunkte auf ± 1 der x-Achse



$\varphi(u) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$
Flächeninhalt bleibt gleich!

Integrationsgrenzen: $u_b = \frac{b + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}$; $u_a = \frac{a - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma} \Rightarrow P = \int_{u_a}^{u_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \Phi(u_b) - \Phi(u_a)$
→ siehe Tabelle!!

$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Intervall	$\mu \pm \sigma$	$\mu \pm 2\sigma$	$\mu \pm 3\sigma$	$\mu \pm 4\sigma$
Anteil	0,68268	0,9545	0,9973	0,99994
in %	68,268%	95,45%	99,73%	99,994%

Anteil	50%	90%	95%	99%
Intervall	$\mu \pm 0,675\sigma$	$\mu \pm 1,645\sigma$	$\mu \pm 1,96\sigma$	$\mu \pm 2,576\sigma$

Vergleich: Binomialverteilung ↔ Normalverteilung
natürliche Zahlen (kontinuierliche) Daten, zB Messwerte → „Wahrscheinlichkeitsdichte“
symmetrisch!!

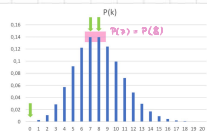
VL07: Poissonverteilung

$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

bei ganzzahligen λ :

$P(\lambda-1) = P(\lambda)$

k	P(k)	Summe	1-Summe
0	0,00000000	0,00000000	0,99999999
1	0,00000000	0,00000000	0,99999999
2	0,00000000	0,00000000	0,99999999
3	0,00000000	0,00000000	0,99999999
4	0,00000000	0,00000000	0,99999999
5	0,00000000	0,00000000	0,99999999
6	0,00000000	0,00000000	0,99999999
7	0,00000000	0,00000000	0,99999999
8	0,00000000	0,00000000	0,99999999
9	0,00000000	0,00000000	0,99999999
10	0,00000000	0,00000000	0,99999999
11	0,00000000	0,00000000	0,99999999



- modelliert Anzahl selten Ereignisse in gegebenem Zeit- oder Raumintervall
- Ereignisse sind unabhängig voneinander (stochastisch unabhängig)

nicht-symmetrisch verteilt, wenn Ereignisse auch unten hin konzentriert, aber auch oben hin nicht
→ Grenzfälle der Normalverteilung mit $n \rightarrow \infty$ und $p = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$ (Fläche unter der Kurve ≈ 1)
→ da $k!$ schneller wächst als λ^k , geht $P(k) \rightarrow 0$ für wachsendes k

bekannte Werte: durchschnittliche Anzahl λ „Erfolge“ pro Zeiteinheit ↔ unbekannte Werte: n = Erfolge + Misserfolge
Erfolgswahrscheinlichkeit p im Einzelversuch kleiner p , da es ja um seltene Ereignisse geht

$\mu = \lambda$; $\sigma = \sqrt{\lambda}$

- unterscheiden: empirische Verteilung: Kurve aus real gemessenen Daten
- angepasste Poisson-Verteilung: theoretische Verteilung, berechnet aus geschätztem λ und Poisson-Formel

VL08: Testen von Hypothesen

- statistisches Test: 1. Hypothese über Wahrscheinlichkeit p aufstellen → Test ist einseitig oder zweiseitig
→ kritischer Wert m , zB „mehr als 10 Erfolge“
- 2. Stichprobe: Berechnet über $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- 3. Hypothese beibehalten oder verwerfen → beibehalten ≠ beweisen; es gibt nur keinen statistischen Grund zum Verwerfen
es heißt hierbei immer eine Irrtumswahrscheinlichkeit übrig (da wird 0-5% = 5% Signifikanzschwelle toleriert)
Bsp: 1. H_0 : Medikament wirkt nicht
2. Ereignis festlegen: Wenn 9 oder mehr Leute (bei $n=10$) gesund werden, wirkt das Medikament.
 $P(E) = 14,9\%$
3. H_0 verwerfen → Irrtumswahrscheinlichkeit = 14,9%

Fehlermöglichkeiten:

		Wirklichkeit	
		H_0 wahr	H_0 falsch
Entsch. aus Test	H_0 verworfen	Fehler 1. Art α	richtige Ent. $1-\beta$
	H_0 behalten	richtige Ent. $1-\alpha$	Fehler 2. Art β

$$\alpha \downarrow \rightarrow \beta \uparrow$$

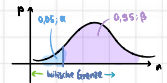
α, β = Wahrscheinlichkeiten

$\rightarrow H_0$ fälschlicherweise verworfen

$\rightarrow H_0$ fälschlicherweise behalten

α ist die Fläche unter der H_0 -Verteilung, die links der kritischen Grenze liegt (also im Verwerfungsbereich).

β ist die Fläche unter der H_1 -Verteilung, die rechts der kritischen Grenze liegt (also im Beibehaltungsbereich).



et. Grenze nach α verschieben, β wird kleiner ($\beta \downarrow$)

oder Grenze nach β verschieben ($\beta \uparrow$)

Zweiseitige Tests: Verwerfungsbereich ist Schnittmenge von mehreren Ergebnissen

z.B. H_0 : ich würfle eine 3 $\rightarrow E = \{0, 1, 2\} \cup \{4, 5\}$

wenn $\alpha = 5\%$, dann auf jeder Seite $2,5\% \rightarrow$ bei Normalverf. Tabelle u-Wert zu $97,5$ nehmen

Bsp. Fragestellung: „Größtmöglicher Verwerfungsbereich mit $\alpha \leq 5\%$ bei $n = 20$.“

$\rightarrow x$ suchen, sodass: $\alpha = 2 \sum_{k=0}^x \binom{20}{k} \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{20-k} \leq 0,05$

Zsmf. Hypothesentest:

1. Signifikanzniveau festlegen / von Aufgabe bekommen
2. Entscheiden, ob einseitig oder zweiseitig zu testen ist
3. Unter Annahme von H_0 den Verwerfungsbereich berechnen
($\rightarrow$ binomialverteilung oder Approximation durch Normalverteilung)
4. Daten des Experiments betrachten / Experiment durchführen

VL09: Studentische t-Verteilung

$\rightarrow$ Glaubwürdigkeit von Mittelwert μ_0 u. Streuung von Stichproben überprüfen
Grundgesamtheit u. Mittelwert sind wieder gegeben

• ist μ_0 als Mittelwert wahrscheinlich?

μ bzw. μ_0	$\bar{x}$
„wahrer Wert“	empirischer Mittelwert
bezgl. Grundgesamtheit	bezgl. Stichprobe
ist unbekannt	aus Messdaten berechnet
fix	veränderlich je nach Stichprobe

$\hookrightarrow$ mit t-Test checken, ob $\bar{x}$ plausibel mit angenommenem μ ist

1. Nullhypothese zu Zahl für μ_0 aufstellen, μ_0 und $\bar{x}$ sollen sich nur um $\leq$ Signifikanzniveau unterscheiden

1. $\bar{x}$, s_x , $SE_x = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ berechnen

$$2. t_{\text{Exp}} = \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{SE_x}$$

3. in Tabelle der t-Verteilung nachschauen $\rightarrow t_{\text{krit}}$
dabei gilt: Freiheitsgrade FG bzw. $v = n - 1$

FG	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001
6	0,718	1,440	1,943	2,441	3,143	3,707	5,208	5,959	9,082
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,885

4. Bedingung: $t_{\text{Exp}} < t_{\text{krit}} \rightarrow H_0$ beibehalten
bei $t_{\text{Exp}} \geq t_{\text{krit}} \rightarrow H_0$ verwerfen

Vertrauensintervall um $\bar{x}$: $\bar{x} \pm t_{\text{krit}} \cdot SE_x = [\bar{x} - t_{\text{krit}} \cdot SE_x ; \bar{x} + t_{\text{krit}} \cdot SE_x]$

$\hookrightarrow$ kritische Schwänke für Signifikanzniveau α mit v FG, auch $t_{\alpha, v}$ genannt

$\alpha \downarrow \rightarrow$ Vertrauensintervall wird größer
Sichere Aussagen sind unschärf. kleineres α
Schärfere Aussagen sind unsicher! größeres α

• Vergleich von 2 Mittelwerten μ_x und μ_y : $\bar{x}$ und $\bar{y}$ berechnen, da μ_x und μ_y ja unbekannt sind

Fallunterscheidung

Stichproben sind unabhängig und evtl. nicht gleich groß

$\hookrightarrow$ Stichproben sind gleich groß, je 1 Wert der einen und anderen Stichprobe haben

2-Stichproben t-Test

$$t_{\text{Exp}} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{SE_{\bar{x} - \bar{y}}}$$

$$\text{und } v = n_x + n_y - 2$$

Standardfehler für $|\bar{x} - \bar{y}|$
wobei $\bar{x} = \bar{y}$

$$SE_{\bar{x} - \bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n_x} \cdot \frac{1}{n_y} \cdot \frac{s_x^2(n_x - 1) + s_y^2(n_y - 1)}{n_x + n_y - 2}}$$

= gepaarte Stichprobe z.B. vorher-Nachher-Vgl. der gleichen Personengruppe

Paardifferenzen werden untersucht $\rightarrow$ diese bilden neue Stichprobe $\rightarrow$ 1-Stichproben t-Test

$$t_{\text{Exp}} = \frac{\bar{d}}{SE_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

gepaarter t-Test

Varianzquotiententest (F-Test): Bedingung: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ (gleiche Varianzen der Stichproben)

$F_{exp} = \frac{s_x^2}{s_y^2}$ größerer Wert in Zähler
Ergebnis soll möglichst noch um 1 sein

dann $v_x = n_x - 1$ und $v_y = n_y - 1$ berechnen $\rightarrow F_{krit}$ aus t-Verteilungstabelle über v_x, v_y

Bedingung positiver F-Test (H_0 beibehalten): $F_{exp} < F_{krit}$

Kompakt:

1. Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% unterscheiden sich die Varianzen der automatischen und der manuellen Pipette nicht signifikant.
2. Berechnung von F_{exp} mit der entsprechenden Formel.
3. Vergleich von F_{exp} mit F_{krit}
4. a) $F_{exp} < F_{krit} \Rightarrow$ Nullhypothese beibehalten
b) $F_{exp} \geq F_{krit} \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen

Varianzen $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, damit ist das t-Test nicht durchführbar
 $\rightarrow$ keine Aussage zu Uge der Mittelwerte

VL 10: Wilcoxon-Mann-Whitney-Test, Korrelations-Analyse

Wilcoxon-Mann-Whitney-Test: $\rightarrow$ 2 Datensätze vergleichen, die aus Ordinalskala stammen

$\rightarrow$ Intervalle nicht klar definiert (keine Metrik)

z.B. Rangliste bei Weltkampf, Zufriedenheitswerte, Schulnote } kein Mittelwert berechenbar!
(Sinnvoller z.B. Median)

anwendbar für Rangfolgen ohne Messwerte ODER Stichproben mit Messwerten ohne Bezug zur Grundgesamtheit

Vorgehen:

1. Rangliste erstellen bei 2x gleichem Wert:

Gruppe	A	A	B	A
Wert	21	23	23	26
Rang	1	2,5	2,5	4

2. Rangsummen R_1, R_2 berechnen (alle Werte summieren)

$\rightarrow R_1 =$ alle Ränge addieren
die die Werte von A belegen

3. $U_{exp} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$

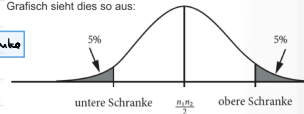
hierbei $n_1 \geq n_2$ wählen!! nicht-symmetrische Formel, n_1 wird „bevorzugt“

4. kritische untere Schranke aus Tabelle

kritische obere Schranke: n_1, n_2 - kritische untere Schranke = kritische obere Schranke

5. $U_{exp} < \text{obere Schranke} \rightarrow H_0$ beibehalten

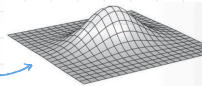
Grafisch sieht dies so aus:



Korrelations-Analyse: $\rightarrow$ Wie kann man aus Korrelationskoeffizienten einer Stichprobe Aussagen über Korrelation der Grundgesamtheit treffen?

nach Pearson (Korr. Koeff. setzt normalverteilte Messwerte aus Intervallskala voraus)

- Messwerte in x-y-Koordinatensystem einzeichnen
- implizite Annahme einer „bivariat-normalverteilten Grundgesamtheit“ (= x und y-Werte jeweils normalverteilt)
- Test sehr empfindlich auf Abweichungen von der Normalverteilung!



1. H_0 über Korrelation zur Grundgesamtheit aufstellen
2. r_{xy} berechnen
3. r_{krit} aus Tabelle
4. $r_{xy} < r_{krit}$, um H_0 zu beibehalten

nach Spearman: Ansatz über Rangdifferenzen, keine Normalverteilung vorausgesetzt

1. H_0 zu Korrelation aufstellen
2. $r_{spearman}$ berechnen
3. r_{krit} aus Tabelle
4. $r_{spearman} < r_{krit}$ H_0 beibehalten

→ Statistik aus 2 Teilen, die sich einander gegenüberstellen ohne eine Schnittmenge zu bilden

Chi-Quadrat-Test:

- Vierfeldertafel („Kontingenztafel“/ Kreuztafel“) aus 2 dichotomen Kriterien

↓
gute Approximation
für Fisher-Test (H.U.)

- Randhäufigkeiten = Summe Zeile bzw. Spalte

↳ = zugängliche erwartungsbasierte Schätzwerte für die tatsächlichen, nicht zugänglichen Anteile

- Rekonstruktion der einzelnen Werte durch Randhäufigkeiten:

	Gruppe A	Gruppe B	Randhäufigk.
Bedingung 1	W	X	132
Bedingung 2	Y	Z	31
Randhäufigk.	104	62	163

Gesamtsumme

$$w = \frac{132}{163} \cdot 104 \approx 81,791 \quad x = \frac{132}{163} \cdot 62 \approx 50,209$$

$$y = \frac{31}{163} \cdot 104 \approx 19,209 \quad z = \frac{31}{163} \cdot 62 \approx 11,791$$

Rand-Rand
Gesamt

→ wenn man diese berechneten Werte mit den tatsächlichen Werten vergleicht, sieht man dass die Abweichungen sich gegenseitig aufheben

Abweichung	Frau	Mann
Nichtraucherin	7,209	-7,209
Raucherin	-7,209	7,209

- wenn Randhäufigkeiten gegeben → nur 1 Freiheitsgrad (eine der Kennzahlen legt automatisch die 3 anderen fest.)
↳ man wählt hier gar nichts, das ist nur wichtig um später χ^2_{krit} aus der richtigen Spalte abzulesen

Test Durchführung:

1. Abweichungen berechnen u. tatsächliches Werte quadrieren (Vorzzeicheneliminierung)
2. Division durch jeweiligen Erwartungswert $\frac{(\text{Abweichung})^2}{\text{Erwartungswert}}$
3. Alle 4 Werte Addieren → Testgröße χ^2 (sollte nahe 0 sein)
4. χ^2_{krit} aus Tabelle ablesen
5. Bedingung $\chi^2 < \chi^2_{krit} \rightarrow H_0$ beibehalten

oder einfach diese Formel ...

mit allgemeiner Tabelle:

	A	$\bar{A}$	total
B	a	b	a + b
$\bar{B}$	c	d	c + d
total	a + c	b + d	n = a + b + c + d

Testgröße $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

χ^2 eig nur für große Stichproben mit $n \geq 30$ und Randhäufigkeiten ≥ 10

↳ Bedingungen nicht erfüllt → Test von Fisher

exakter Test von Fisher:

man verwendet Binomialkoeffizienten, z.B. $\binom{n}{a+b}$ oder $\binom{a+b}{a}$ und berechnet damit die Testgröße

für Vierfeldertafel

Bsp.:

	bestanden	nicht bestanden	Randhäufigkeiten
Privatschule A	2	4	6
Lernstudio B	7	4	11
Randhäufigkeiten	9	8	17

H_0 : „Beide Bildungseinrichtungen sind gleich gut u. das Bestehen hängt nur von den Schülern ab.“

χ^2 : $\binom{9}{2} \cdot \binom{8}{4}$ ← 2 des 9 bestehenden sind aus A
4 des durchgefallenen sind aus B
 $\binom{17}{6}$ ← Alle möglichen Verteilungen bei den 6 Schülern der Privatschule

getestet wird quasi: „Wenn die Schulzuweisung komplett irrelevant wäre, wie wahrscheinlich wäre dann die vorliegende Verteilung, nämlich dass 2 von 6 von der Privatschule bestehen?“

allgemeine Schreibweise:

	bestanden	nicht bestanden	Randhäufigkeiten
Privatschule A	a	b	a + b
Lernstudio B	c	d	c + d
Randhäufigkeiten	a + c	b + d	n = a + b + c + d

$$\alpha = \sum_{x=0}^a \frac{\binom{a+c}{x} \binom{b+d}{a+b-x}}{\binom{n}{a+b}}$$

„extremes Fall“ = weniger Erfolge, also kleinerer Wert

↳ verkleinern ohne den Versuch zu verändern: n erhöhen!!!

Vertrauensintervall:

ähnlich wie MOG: $[\bar{x} - t_{0.99} \cdot SE_{\bar{x}}; \bar{x} + t_{0.99} \cdot SE_{\bar{x}}]$

= Menge aller p-Werte, für die die Beobachtung noch in die mittleren 95/99% der jeweiligen Verteilung passt.
hier also bezogen auf Stückzahlen u. Anteile, also nicht-kontinuierlich, weder Approximation der Binomialverteilung durch Normalverteilung

man kann p aus Aufgabe berechnen. Die tatsächliche Wahrschk. ist h .

$$\mu = n \cdot p \quad ; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

untere Grenze: $\mu - 1.96 \cdot \sigma$

obere Grenze: $\mu + 1.96 \cdot \sigma$

→ aus Tabelle, 1.96 z.B. für zweiseitigen Test mit 95%-Bereich der Normalverteilung

(Anzahl sdw. links u. rechts symmetrisch vom Mittelwert der Gauß-Glocke)

für große n gilt näherungsweise $p \approx h$ →

$$h \pm 1.96 \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

für 95%

größeres Konfidenzniveau (99% statt 95%) → größerer krit. Faktor → breiteres Intervall

größeres n → kleinerer Standardfehler → schmaleres Intervall (mehr Daten = mehr Präzision)