

DREIECK+MATHE

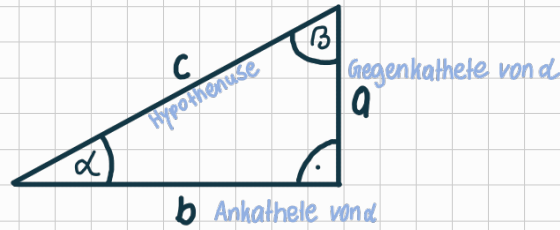
Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Winkelbeziehungen:

- $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{a}{c}$

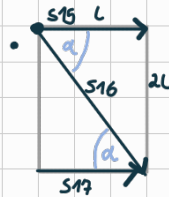
- $\cos(\alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c}$

- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$



- $$\tan(\gamma) = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$



$$\alpha = \arctan\left(\frac{2L}{L}\right) = \arctan(2)$$

- $$\tan(\alpha) = \frac{2L}{4L} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

- infinitesimal: unendlich klein, oft mit dem Symbol δ gekennzeichnet

- $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

- Cosinus und Sinus

- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
 $\sin(3x) = \sin(x) \cdot (4 \cdot \cos^2(x) - 1)$
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$
 $\cos(3x) = 4 \cdot \cos^3(x) - 3 \cdot \cos(x)$

- Additionstheoreme

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

- Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ Masse/Volumen

- Bogenmaß $\rightarrow$ Gradmaß: $\alpha_0 = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}$

K... Kurzfragen oder Altklausur 1:1

GG ... Gleichgewicht

SP ... Schwerpunkt

 ... Formel

 ... Definition

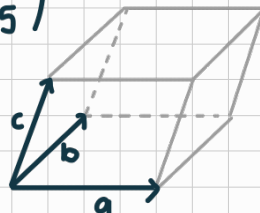
DEFINITIONEN

• Skalarprodukt

$$(a \times b) \cdot c = s$$

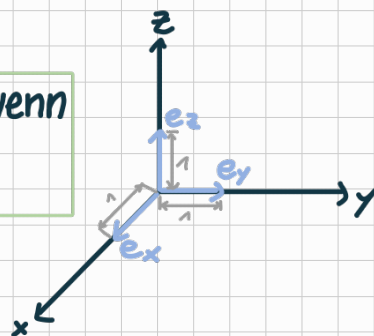
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -1 - -3 \cdot 1,5 \\ -3 \cdot 2 - 1 \cdot -1 \\ 1 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - -4,5 \\ -6 - -1 \\ 1,5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ -5 \\ -2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1,25 - 5 - 2,5 = -8,75$$



• Orthonormalbasis

Eine Basis v_i mit $i \in I$ von V heißt Orthonormalbasis, wenn $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \forall i \in I$ und $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$



• Definition Vektor

↳ gerichtete physikalische Größe, die durch ihren Betrag und ihre Richtung definiert ist.

↳ Wird mit einer Tilde ($\sim$) gekennzeichnet (oft auch mit Pfeil oder durch Fettdruck)

↳ vektorielle Größe

→ vektorielle Größe = (Zahlenwert · Einheit) · Einheitsrichtung

→ z.B.: Kraft $\vec{F}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Moment $\vec{M}$

• Definition skalare Größe

↳ durch eine einzige Zahlenangabe festgelegt

↳ in einer Einheit angegeben

↳ skalare Größe = Zahlenwert · Einheit

↳ z.B.: Länge l , Masse m , Zeit t

• Determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 18 - 2 \cdot (-1) \cdot 12 = 0 + 24 + 8 + 18 - 16 - 0 = 34$$

DEFINITIONEN

• Was ist Kraft?

- ↳ Eine Kraft bewirkt die Änderung des Bewegungs- oder Verformungszustands eines Körpers.
- ↳ Eigenschaften Kraft^K
 - Betrag (gibt die Größe an)
 - Richtung (durch Wirkungslinie und Richtungslinien bestimmt)
 - Angriffspunkt

• Definition starrer Körper

- ↳ Körper, der sich unter Einwirkung von Kräften nicht deformiert.
- ↳ Abstände beliebiger Punkte A und B bleiben konstant.

• Einstein'sche Summenkonvention

- ↳ Die Einstein'sche Summenkonvention besagt, dass über doppelt auftretende Indizes in einem mathematischen Ausdruck automatisch summiert wird, ohne dass das Summenzeichen explizit geschrieben werden muss.
- ↳ $\vec{v} = v_i \cdot \vec{e}_i = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$

• Definition Reduktion

- ↳ Bei der Reduktion wird das gesamte Kraftsystem durch eine einzelne Resultierende Kraft und ein Moment am selben Punkt ersetzt, die auf den Körper die gleiche Wirkung ausüben.
- ↳ Ziel ist es, zu prüfen
 - ob das System im GG ist,
 - wo die Resultierende verläuft,
 - ob es sich um ein reines Moment (Kräftepaar) handelt.

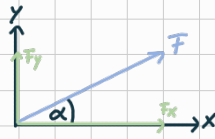
KRÄFTEGLEICHGEWICHT

Zentrale Kräftegruppen in der Ebene

- Bei zentralen Kräftegruppen schneiden sich alle Kräfte in einem Punkt

- Kräftezerlegung: $F_x = F \cdot \cos(\alpha)$

$$F_y = F \cdot \sin(\alpha)$$



- Resultierende $R = \sum F_i$

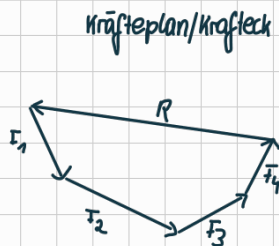
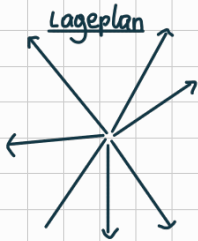
$$\hookrightarrow F_{res,x} = \sum F_x$$

$$\hookrightarrow F_{res,y} = \sum F_y$$

$$\hookrightarrow F_{res} = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2}$$

- Es herrscht Gleichgewicht, wenn $\sum F_i = 0$

- $\hookrightarrow$ bei Kräftegruppen die Resultierende nicht vergessen



Zentrale Kräftegruppen im Raum

- Es herrscht ein Gleichgewicht, wenn die Resultierende $R = \sum F_i$ verschwindet: $\sum F_i = 0$.

- Kräfte im Raum

$$\hookrightarrow F_i = F_{ix}e_x + F_{iy}e_y + F_{iz}e_z$$

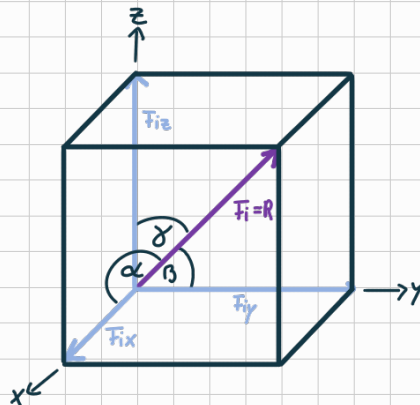
$$\hookrightarrow F_{ix} = F_i \cdot \cos(\alpha)$$

$$\hookrightarrow F_{iy} = F_i \cdot \cos(\beta)$$

$$\hookrightarrow F_{iz} = F_i \cdot \cos(\gamma)$$

$$\hookrightarrow \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$\hookrightarrow |F_i| = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}$$



Allgemeine Kräftegruppen

- Äußere Kräfte, die auf einen Körper wirken werden zu einer Resultierenden $R = \sum F_i$ zusammengefasst.

- Drehwirkungen werden zu einem resultierenden Moment $M_{res} = \sum M$ zusammengefasst.

- Für einen Körper im Gleichgewicht gilt: $\sum F_i = 0$ und $\sum M = 0$

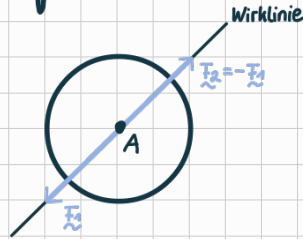
KRÄFTEGLEICHGEWICHT

Axiome der Starrkörpermechanik ^K

1. Gleichgewichtsaxiom

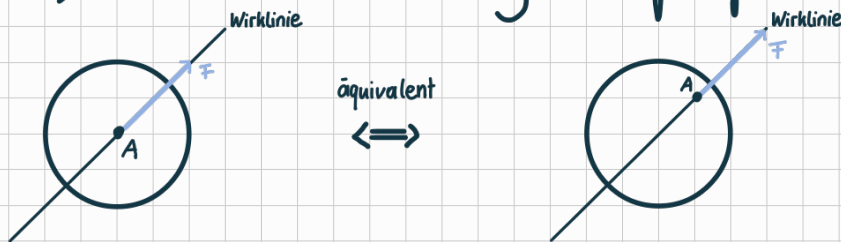
- ↪ Zwei an einem Punkt eines Körpers angreifende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie auf einer gemeinsamen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.
- ↪ Die Resultierende aller auf den Körper wirkender Kräfte sowie das resultierende Moment sind null

$$\rightarrow R = \sum F = 0 \quad \text{und} \quad \sum M = 0$$



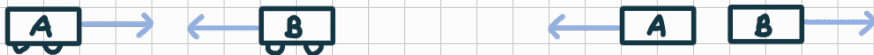
2. Linienflüchtigkeit von Kräften

- ↪ Der Angriffspunkt einer Kraft kann auf der Wirkungslinie beliebig verschoben werden, ohne dass sich die Wirkung der Kraft auf den Körper verändert.



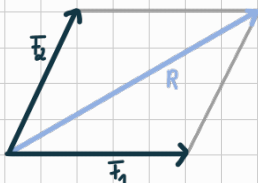
3. Axiom der Aktions- und Reaktionskraft / Wechselwirkungsprinzip

- ↪ Actio = Reactio
- ↪ Zu einer Kraft existiert stets eine gleich große, entgegengesetzt wirkende Kraft
- ↪ $F_1 = -F_2$ mit $|F_1| = |F_2|$



4. Axiom der Parallelogrammregel der Kräfte

- ↪ Die Wirkung von zwei an einem Punkt angreifenden Kräften ist stets äquivalent zur Resultierenden, welche aus der Parallelogrammkonstruktion entsteht.



SCHWERPUNKT + GLEICHGEWICHTSLAGE

Schwerpunktarten: allgemeine Form

• Volumenschwerpunkt

$$\hookrightarrow x_s = \frac{\int x \, dV}{\int dV}$$

$$\hookrightarrow y_s = \frac{\int y \, dV}{\int dV}$$

$$\hookrightarrow z_s = \frac{\int z \, dV}{\int dV}$$

• Linienschwerpunkt

$$\hookrightarrow x_s = \frac{\int x \, ds}{\int ds}$$

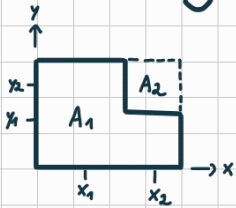
$$\hookrightarrow y_s = \frac{\int y \, ds}{\int ds}$$

• Flächenschwerpunkt

$$\hookrightarrow x_s = \frac{\int x \, dA}{\int dA} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\hookrightarrow y_s = \frac{\int y \, dA}{\int dA} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

↳ SP bei negativen Flächen (Bsp.)



$$\rightarrow x_s = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

$$\rightarrow y_s = \frac{y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2}$$

• Massenmittelpunkt

↳ Beim homogenen Körper ($\rho = \text{const.}$) fallen Volumenschwerpunkt und Massenmittelpunkt zusammen

↳ Massenmittelpunkt

$$\rightarrow x_s = \frac{\int x \cdot \rho \, dV}{\int \rho \, dV}$$

$$\rightarrow y_s = \frac{\int y \cdot \rho \, dV}{\int \rho \, dV}$$

$$\rightarrow z_s = \frac{\int z \cdot \rho \, dV}{\int \rho \, dV}$$

↳ Volumenschwerpunkt

$$\rightarrow x_s = \frac{\sum x_i \cdot \rho_i \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i}$$

$$\rightarrow y_s = \frac{\sum y_i \cdot \rho_i \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i}$$

$$\rightarrow z_s = \frac{\sum z_i \cdot \rho_i \cdot V_i}{\sum \rho_i \cdot V_i}$$

SCHWERPUNKT + GLEICHGEWICHTSLAGE

Besondere Schwerpunkte

• rechtwinkliges Dreieck

$$\rightarrow x_s = \frac{2}{3} a$$

$$\rightarrow y_s = \frac{1}{3} h$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

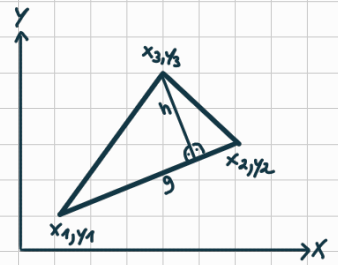


• Allgemeines Dreieck ^K

$$\rightarrow x_s = \frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\rightarrow y_s = \frac{1}{3} \cdot (y_1 + y_2 + y_3)$$

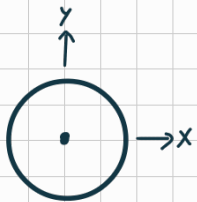
$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$



• Vollkreis

→ SP ist Mittelpunkt

$$\rightarrow A = \pi \cdot r^2$$

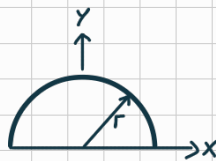


• Halbkreis

$$\rightarrow x_s = 0$$

$$\rightarrow y_s = \frac{4}{3\pi} r$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

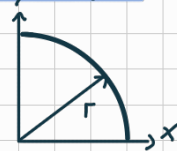


• Viertelkreis

$$\rightarrow x_s = \frac{4}{3\pi} r$$

$$\rightarrow y_s = \frac{4}{3\pi} r$$

$$\rightarrow A = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

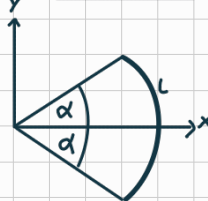


• allg. Kreisstück ^K

$$\rightarrow x_s = \frac{\sin(\alpha) \cdot r}{\alpha}$$

$$\rightarrow y_s = 0$$

$$\rightarrow l = 2 \alpha \cdot r$$



• quadr. Parabel

$$\rightarrow x_s = 0$$

$$\rightarrow y_s = \frac{3}{5} h$$

$$\rightarrow A = \frac{4}{3} \cdot b \cdot h$$

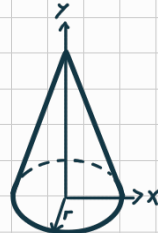


• Kegel

$$\rightarrow x_s = 0$$

$$\rightarrow y_s = \frac{1}{4} h$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

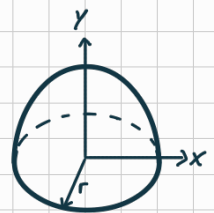


• Halbkugel

$$\rightarrow x_s = 0$$

$$\rightarrow y_s = \frac{3}{8} r$$

$$\rightarrow V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

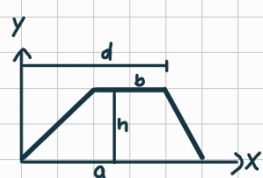


• Trapez

$$\rightarrow x_s = \frac{a^2 - b^2 + d \cdot (a + 2b)}{3(a + b)}$$

$$\rightarrow y_s = \frac{h}{3} \cdot \frac{(a + 2b)}{a + b}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

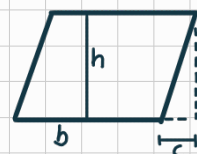


• Parallelogramm

$$\rightarrow x_s = \frac{b + c}{2}$$

$$\rightarrow y_s = \frac{h}{2}$$

$$\rightarrow A = b \cdot h$$



SCHWERPUNKT + GLEICHGEWICHTSLAGE

Gleichgewichtslage^K

- **stabiles Gleichgewicht**

→ nach einer Störung der Gleichgewichtslage wird diese wieder hergestellt

→ $F'(x) < 0$



- **indifferentes Gleichgewicht**

→ nach einer Störung der Gleichgewichtslage wird das System wieder in eine Gleichgewichtslage überführt, die sich jedoch von der bisherigen Gleichgewichtslage unterscheidet.

→ $F'(x) = 0$



- **labiles Gleichgewicht**

→ nach einer Störung der Gleichgewichtslage ist diese nicht mehr wieder herstellbar und daher muss eine Störung vermieden werden.

→ $F'(x) > 0$



LAGERREAKTION

Lagerarten

Bezeichnung:	Symbol:	Bewegungsmöglichkeit:	Auflagerreaktionen:	Schnittgrößen:	stat. Wertigkeit:
verschiebliches Auflager / Loslager				$N = 0$ $M = 0$	$r = 1$ $FG = 2$
festes Auflager / Festlager				$M = 0$	$r = 2$ $FG = 1$
verschiebbliche Einspannung (Vertikalführung $\Rightarrow$ Querkraftgelenk)				$Q = 0$	$r = 2$
verschiebbliche Einspannung (Parallelführung $\Rightarrow$ Normalkraftgelenk)				$N = 0$	$r = 2$
fixe Einspannung				-	$r = 3$ $FG = 0$

Verbindungselemente

Name	Symbol	übertragbare Schnittgrößen	Wertigkeit
Momentengelenk			2
Querkraftgelenk			2
Normalkraftgelenk			2
Pendelstütze			1

LAGERREAKTION

Statische Bestimmtheit

• Abkürzungen:

k ... Körper

α ... Wirkungsgrad/Auflagerreaktionen

z ... Zwischenreaktionen

• Abzählkriterien

→ Das Abzählkriterium vergleicht die Anzahl der unbekannten Lagerreaktionen (aus der Wertigkeit der Lager) mit der Anzahl der unabhängigen Gleichgewichtsbedingungen und Nebenbedingungen aus Gelenken.

$$f = \begin{cases} 3k - (\alpha + z) & \text{für ebene Systeme} \\ 6k - (\alpha + z) & \text{für räumliche Systeme} \end{cases}^K$$

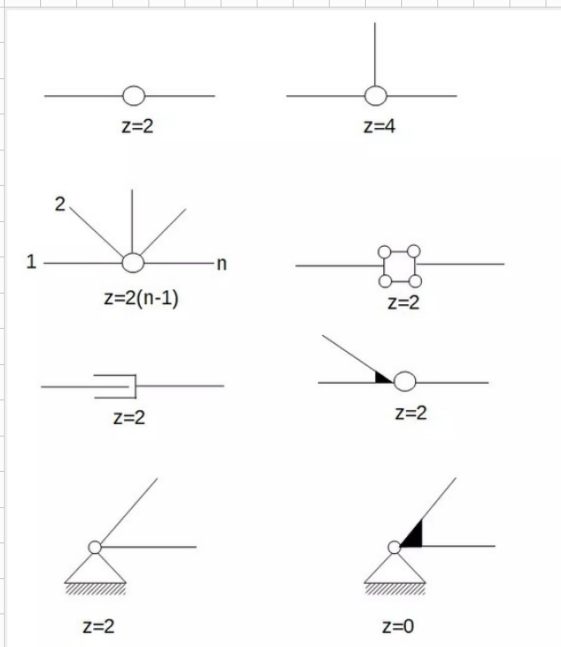
→ $f > 0$: f -fach verschieblich (unbrauchbar)

→ $f = 0$: statisch bestimmt

→ $f < 0$: f -fach statisch unbestimmt (Brauchbarkeit muss weiter untersucht werden)

• Zwischenreaktion

$$\rightarrow z = 2 \cdot (n - 1)$$



LAGERREAKTION

Drehmoment

- $M = F \cdot r$

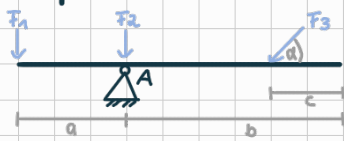
→ F und r stehen senkrecht aufeinander

→ zeigt eine Kraft auf einen Drehpunkt, so erzeugt sie kein Drehmoment.

→ Ein Drehmoment hat einen Drehsinn

→ Im Gleichgewichtsfall gilt: $\sum M = 0$

- Beispiel



$$\hookrightarrow M_A = F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot (b - c)$$

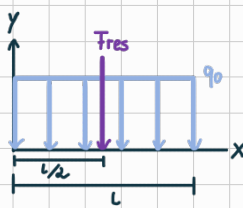
Ausgewählte Streckenlasten

- Gleichstreckenlast

- $F_{res} = q_0 \cdot L$

- $x_s = \frac{1}{2} L$

- $q(x) = q_0$



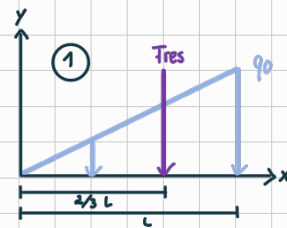
- Dreieckslast

①

- $F_{res,1} = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot L$

- $x_{s,1} = \frac{2}{3} \cdot L$

- $q_1(x) = \frac{q_0}{L} \cdot x$

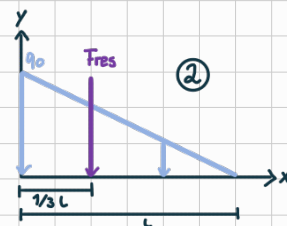


②

- $F_{res,2} = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot L$

- $x_{s,2} = \frac{1}{3} \cdot L$

- $q_2(x) = q_0 - \frac{q_0}{L} \cdot x$

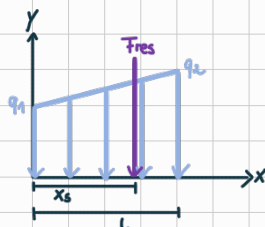


- Trapezlast

- $F_{res} = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot L$

- $x_s = \frac{q_1 + 2q_2}{3(q_1 + q_2)} \cdot L$

- $q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} \cdot x$

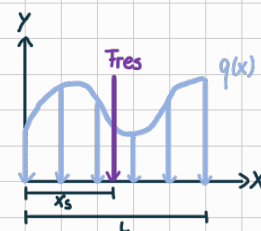


- Allg. Last

- $F_{res} = \int_0^L q(x) dx$

- $x_s = \frac{\int_0^L q(x) \cdot x dx}{\int_0^L q(x) dx}$

- $q(x) = -Q'(x)$



FACHWERKE

Allgemeines zum Fachwerk

• Annahmen zum Fachwerk ^K

- Stäbe sind gerade.
- Stäbe sind an den Knoten gelenkig miteinander verbunden.
- Äußere Kräfte wirken nur an den Knoten.

• Ideales Fachwerk ^K

- Alle Fachwerkknoten werden als reibungsfreie Momentengelenke angenommen.
- Alle Stabachsen (Systemmittellinien) der an den Knoten angeschlossenen Stäbe schneiden sich in einem Punkt.
- Äußere Lasten greifen nur an einem Knoten an.
- Alle Fachwerkstäbe sind Pendelstäbe (Zug positiv, Druck negativ)

• Vorzeichenkonvention



• Bildungsgesetze

↳ 1. Bildungsgesetz

- Ein aus 3 Stäben zusammengesetztes System ist ein starrer Körper
- Ein aus Dreiecken zusammengesetztes Fachwerk bezeichnet man als einfaches Fachwerk, wenn jedes weitere Dreieck durch Hinzufügen von 2 Stäben gebildet wird.

↳ 2. Bildungsgesetz:

- 2 nach dem 1. Bildungsgesetz konstruierte Fachwerke können verbunden werden durch:
 - 3 Stäbe, die nicht parallel sind und sich nicht in einem Punkt schneiden.
 - 2 dieser Stäbe können durch einen Knoten ersetzt werden, der zu beiden Fachwerken gehört.
 - Der letzte Verbindungsstab kann durch eine entsprechende Lagerung ersetzt werden.

↳ 3. Bildungsgesetz

- Wird ein Stab bei Fachwerken entfernt, die nach dem 1. oder 2. Bildungsgesetz aufgebaut sind, so muss ein neuer Stab z.B. an einer anderen Stelle eingefügt werden.

• Statische Bestimmtheit

⚠ Verwechslungsgefahr mit Abzählkriterium ⚠

→ Abkürzungen:

k ... Zahl der Knoten

s ... Zahl der Stäbe

r ... Zahl der Lagerreaktionen (Σ Wertigkeit)

→ Freiheitsgrade f

$$f = \begin{cases} 2k - (s+r) & \text{für ebene Fachwerke} \\ 3k - (s+r) & \text{für räumliche Fachwerke} \end{cases}$$

↳ $f > 0$: f -fach verschieblich

↳ $f = 0$: statisch bestimmt

↳ $f < 0$: f -fach statisch unbestimmt

} gleich wie Abzählkriterium

• Nullstäbe

→ Nullstäbe sind unbelastete Stäbe im Fachwerk (Stabkraft $S=0$).

→ Nach Anwenden der Nullstabregel überprüfen, ob die Nullstabregeln nach „Entfernen“ der Nullstäbe ein weiteres Mal auf einen Knoten anwendbar ist.

→ Nullstabregeln: ^K

↳ Unbelasteter Knoten (es greift keine Kraft an):

Knoten darf nur 2 Stabanschlüsse haben, die nicht parallel sind.

Beide Stäbe sind Nullstäbe.



↳ Unbelasteter Knoten:

Knoten hat 3 Stabanschlüsse, von denen 2 die selbe Richtung besitzen. Der 3. Stab ist ein Nullstab.



↳ Belasteter Knoten mit 2 Stabanschlüssen:

Hat ein Stab die selbe Richtung wie die Kraft, ist der andere Stab ein Nullstab.



Knotenschnittverfahren

- ① System statisch bestimmen (sollte in Klausur immer $f=0$ sein.)
 - ② Lagerkräfte bestimmen und System freischneiden (jeden Knoten freischneiden)
 - ③ Knoten mit max. 2 unbekannten Kräften finden
 - ④ Stäbe mit den Kräftegleichgewichten berechnen
 - ⑤ Mit benachbarten Stäben weitermachen und Schritt ④ wiederholen.
- Nur anwendbar bei statisch bestimmten Fachwerken.

Ritterschnittverfahren

• Voraussetzung:

- ↳ Der Schnitt geht durch genau 3 Stäbe
- ↳ Diese 3 Stäbe dürfen nicht parallel sein
- ↳ Die 3 Stäbe dürfen sich nicht alle in 1 Punkt schneiden.

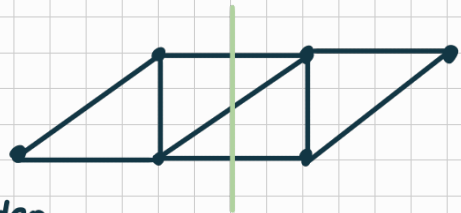
• Vorgehen:

- ① System freischneiden und Lagerkräfte bestimmen
- ② Ritterschnitt durch die gesuchten Stäbe setzen.
- ③ Stabkräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln.

• Vorzeichenkonvention

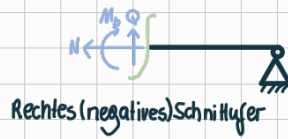
- ↳ Stabkräfte zeigen immer vom Schnitt weg.
- ↳ Positives Vorzeichen beim Ergebnis: Zugstab
- ↳ Negatives Vorzeichen beim Ergebnis: Druckstab

Beispiel:



SCHNITTGRÖßEN

• Schnittufer



• Vorzeichenkonvention

Am positiven Schnittufer zeigen die Schnittgrößen in die positiven Koordinatenrichtungen.

Am negativen Schnittufer lassen sich die Schnittgrößen gemäß actio = reactio eintragen.

• Schnittgrößen

↳ Normalkraft N

→ Zeigt sowohl am pos. als auch am neg. Schnittufer vom Schnitt weg und steht senkrecht auf den Querschnitt des Balkens.

↳ Querkraft Q

→ Zeigt am pos. Schnittufer in pos. z -Richtung.

↳ Biegemoment M

• Differentielle Beziehung zwischen Belastung und Schnittgrößen ^{*}

$$Q(x) = - \int q(x) dx$$

$$M(x) = \int Q(x) dx$$

$$-q(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2}$$

• Abhängigkeit von Q und M von der äußeren Belastung:

Belastung		Q -Verlauf	M -Verlauf
$q = 0$		konstant	linear
$q = \text{konst}$		linear	quadr. Parabel
$q = \text{linear}$		quadr. Parabel	kub. Parabel
q hat Sprung		Knick	stetig
Einzelkraft		Sprung	Knick
Einzelmoment (Kräftepaar)		stetig, kein Knick	Sprung

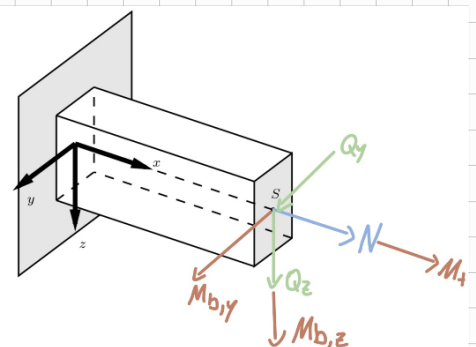
• Räumliche Tragwerke:

N (Normalkraft)

Q_y, Q_z (Querkräfte)

M_y, M_z (Biegemomente)

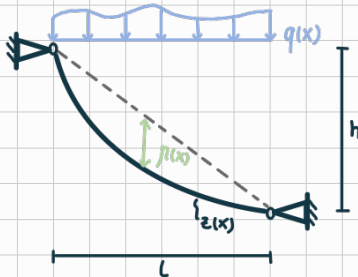
$M_x = M_T$ (Torsionsmoment)



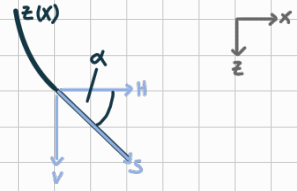
SEILE

Seile unter Vertikalbelastung

Vorausgesetzt: Das Seil wird als masselos und reibungsfrei angenommen.



Näherungsweise Betrachtung eines sehr kleinen Seilstücks



• Allgemein

$$\hookrightarrow \tan(\alpha) = z'(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Horizontalzug } H = \text{const.}^K$$

$$\hookrightarrow \text{Seilkraft } S = H \cdot \sqrt{1 + (z')^2}$$

$$\hookrightarrow \text{DGL: } z''(x) = -\frac{1}{H} q(x)$$

$$\hookrightarrow \text{Seilcurve } z(x) = -\frac{1}{H} \int_0^x \int_0^{\tilde{x}} q(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{x} + C_1 \cdot x + C_2$$

→ Bei vorgegebenem H können die C_1 und C_2 aus den Randbedingungen $(z(0); z(l))$ bestimmt werden.

$$\hookrightarrow \text{Durchhangcurve } p(x) = z(x) - \frac{h}{l} \cdot x$$

• Sonderfall $q(x) = q_0 = \text{const.}$

$$\hookrightarrow \text{Seilcurve } z(x) = \left(\frac{h}{l} + \frac{q_0 \cdot l}{2H} \right) \cdot x - \frac{q_0}{2H} \cdot x^2$$

$$\hookrightarrow \text{Seildurchhang } p(x) = \frac{q_0}{2H} (l \cdot x - x^2)$$

$$\hookrightarrow \text{max. Durchhang } p_{\max} = \frac{q_0 \cdot l^2}{8H}$$

$$\hookrightarrow \text{max. Seilkraft } S_{\max} = H \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{hl}{l} + \frac{q_0 \cdot l}{2H} \right)^2}$$

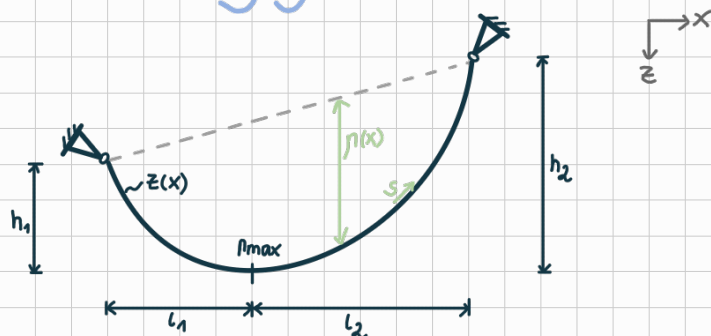
$$\hookrightarrow \text{Seillänge } L = -\frac{H}{2q_0} \left[z' \cdot \sqrt{1 + z'^2} + \text{arsinh}(z') \right]_{z'_1}^{z'_2}$$

$$\rightarrow z'_1 = \frac{h}{l} + \frac{q_0 \cdot l}{2H}$$

$$\rightarrow z'_2 = \frac{h}{l} - \frac{q_0 \cdot l}{2H}$$

SEILE

Seile unter Eigengewicht



• Allgemein

↳ Belastung $q(s)$ als Funktion der Bogenlänge s .

Dabei gilt zwischen s und x der Zusammenhang $ds = \sqrt{1 + (z')^2} dx$

↳ Horizontalzug $H = \text{const.}$

↳ Seilkraft $S = H \cdot \sqrt{1 + (z')^2}$

↳ DGL $z'' = -\frac{q(s)}{H} \sqrt{1 + (z')^2}$

• Sonderfall $q(s) = q_0$ mit $z(0) = 0$ und $z'(0) = 0$

↳ Kettenlinie $z(x) = \frac{H}{q_0} \cdot \left(1 - \cosh\left(\frac{q_0 \cdot x}{H}\right) \right)$

↳ Durchhang $p(x) = z(x) + h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l_1 + l_2} \cdot (l_1 + x)$

↳ Seilkraft $S(x) = H \cdot \cosh\left(\frac{q_0 \cdot x}{H}\right)$

↳ Seillänge $L = \frac{H}{q_0} \cdot \left[\sinh\left(\frac{q_0 \cdot l_2}{H}\right) + \sinh\left(\frac{q_0 \cdot l_1}{H}\right) \right]$

ARBEIT

• Arbeit

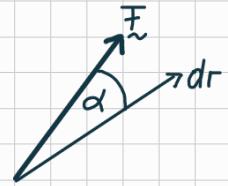
- ↳ Wenn sich der Angriffspunkt einer Kraft $\underline{F}$ um eine infinitesimale Strecke $d\mathbf{r}$ verschiebt, dann leistet die Kraft Arbeit

$$\rightarrow dW = \underline{F} \cdot d\mathbf{r} = |\underline{F}| \cdot dr \cdot \cos(\alpha)$$

$$\rightarrow dW = \underline{M} \cdot d\phi \quad (\text{Arbeit eines Moments } \underline{M} \text{ bei Verdrehung um } d\phi)$$

- ↳ Sind Kraft- und Verschiebungsvektor bzw. Momenten- und Drehvektor parallel, so vereinfachen sich diese Beziehungen zu

$$\rightarrow dW = F \cdot dr \quad \text{und} \quad dW = M \cdot d\phi$$



• Virtuelle Verrückung

- ↳ Rein gedankliche Verschiebung des Systems, die mit den Zwangsbedingungen einhergeht aber nicht durch äußere Kräfte verursacht wird.
- ↳ Eigenschaften
 - gedacht
 - infinitesimal klein
 - mit den kinematischen Bindungen (Zwangsbedingungen) des Systems verträglich.

• Virtuelle Arbeit

- ↳ Die Arbeit, die eine Kraft bei der virtuellen Verrückung verrichtet

$$\rightarrow \delta W = \sum \underline{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \underline{R} \cdot \delta \mathbf{r} + \underline{M} \cdot d\phi$$

↖ Siehe Steeb Skript S151
↖ virtuelle Verrückung des Angriffspunktes der Kraft

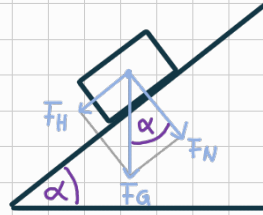
• Prinzip der virtuellen Arbeit

- ↳ Ein Kräftesystem, das im GG steht, leistet bei einer virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{r}$ keine Arbeit.
- ↳ Die Summe der virtuellen Arbeiten aller wirkenden Kräfte bei jeder möglichen virtuellen Verrückung ist null.
- ↳ $\delta W = \sum \underline{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$

HATTUNG + REIBUNG

Schiefe Ebene

- Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$
- Normalkraft $F_N = F_G \cdot \cos(\alpha)$
- Hangabtriebskraft $F_H = F_G \cdot \sin(\alpha)$



Reibungskräfte

- Haftreibungskraft: $F_H \leq \mu_H \cdot F_N$ (ruhender Körper)
- Gleitreibungskraft: $F_G = \mu \cdot F_N$ (bewegter Körper)
- Rollreibungskraft: $F_r = \frac{\mu_r}{r} \cdot F_N$

• Problemtypen:

① Haftung: $F_H < \mu_0 \cdot F_N$

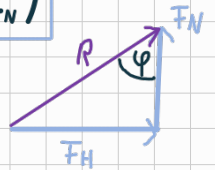
② Haftgrenzfall: $F_H = \mu_0 \cdot F_N$

③ Reibung: $F_r = \mu \cdot F_N$

• Winkel

↳ Haftungswinkel $\varphi = \arctan(\mu_0) = \arctan\left(\frac{H_0}{F_N}\right)$

↳ Reibungswinkel $\tan(\phi) = \mu = \frac{F_G}{F_N}$



• Anmerkungen:

- Die Richtung der Reibkraft (Haftkraft) ist entgegengesetzt zur Richtung der Relativbewegung (die entstände, wenn diese nicht durch Haftung verhindert würde).
- Die Größe der Reibkraft ist unabhängig von der Berührungsfläche.
- Der Haftungskoeffizient ist in der Regel größer als der Reibungskoeffizient.

Rollen- und Seilreibung

- Rollreibung: $F_{rr} = \mu_{rr} \cdot F_N$ mit $\mu_{rr} = \frac{d}{r}$ d ~ Verschiebung gegenüber Aufstandspunkt
 r ~ Radius Rolle

• Seilhaftung: $S_1 < S_2 \cdot e^{-\mu_0 \cdot \phi}$

• Seilreibung: $S_1 = S_2 \cdot e^{-\mu_0 \cdot \phi}$

