

Zusammenfassung HM 3

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undef.	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	undef.	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.1.1 $S := \sup \{S(f, P) \mid P \text{ Partition von } B\}$

$S := \inf \{S(f, P) \mid P \text{ Partition von } B\}$
→ Riemann integrierbar, wenn $S = S \rightarrow$ ist die **Gesamtsumme** der **Fläche** der **Rechtecke** der **Partiell** **Rechtecke**

Wann ein **Stetigkeits**

2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f Riemann integrierbar

$f(x) = \int_a^x f(t) dt$
 $f(x) = \int_a^x f(t) dt$
 $f(x) = \int_a^x f(t) dt$

Flächeninhalt

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Satz von Stokes

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$
 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$
 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

Stetigkeit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Partielle Differential

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Wärmegleichung

Neuformulierung

$\cos(x) = \cos(x)$
 $\cos(x) = \cos(x)$
 $\cos(x) = \cos(x)$
 $\cos(x) = \cos(x)$

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Neuformulierung

Additionstheoreme

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
 $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
 $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Additionstheoreme

Integration in 2 Variablen

$\iint_D f(x, y) dx dy$
 $\iint_D f(x, y) dx dy$
 $\iint_D f(x, y) dx dy$
 $\iint_D f(x, y) dx dy$

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Integration in 2 Variablen

Fourier-Reihen

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$
 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$
 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Fourier-Reihen

Bsp. Laplace

$u(t)$ ist Lsg von $y'' + 2y' + y = 0$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
 $p(x) = (x+1)^2$; doppelte Nulls $\rightarrow u(t) = (c_1 + c_2)t e^{-t} \Leftrightarrow u(t) = t e^{-t}$
 $\Rightarrow U(s) = \mathcal{L}\{t e^{-t}\} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Bsp. Fourier (Funktion weder gerade noch ungerade)

1. a_0 ausrechnen ($\frac{1}{\pi}$ -Formel) mit $\int_{-\pi}^{\pi}$ und streichen dann mit Def. beid. d. Formel ausrechnen
2. a_n berechnen für $n \geq 1$ ($\frac{1}{\pi}$ -Formel)
3. b_n berechnen für $n \geq 1$ ($\frac{1}{\pi}$ -Formel)
4. in große Fourier-Formel einsetzen und voll!

Bsp. komplexe Fourier-Reihe

- Fourier $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$
- wobei $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$
- $\rightarrow$ Def. Bereich und $f(x)$ variieren je nach Aufgabe
- für $k=0$ wird $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ (Zahl ist nur Bsp.)
- $\Rightarrow$ Fourier $\zeta(x) = c_0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} c_k e^{ikx}$

Wenn man mit Polarform. rechnen muss ($r \cdot \cos(\varphi)$, $r \cdot \sin(\varphi)$)

- und wenn Skalarprodukt im Integral
- $\rightarrow$ zuerst einsetzen, dann vollst. auflösen!!
- $\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) \cdot \left(\frac{1}{v}\right) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v^{3/2}} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^{-3/2} dv = \left[-2v^{-1/2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$

Bsp. Wellengleichung - Aufgabe

- $u_t = 40_{xx}$ mit $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = \frac{1}{x^2+1}$
- a) zugehör. Lösung $u(x,t)$ mit d'Alambertsche Formel
- $\rightarrow c=2$, $f(x)=0$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
- $u(x,t) = \frac{1}{2} (f(x-2t) + f(x+2t)) + \frac{1}{2} \int_{x-2t}^{x+2t} g(s) ds$
- $= \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \frac{1}{s^2+1} ds$

c) Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} u(0,t)$

- $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (\arctan(2t) - \arctan(-2t))$
- $= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \arctan(2t)$
- $= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$

Bsp. Fourier

- $\rightarrow$ Parsevalsche Gleichung und bn aus b) nutzen, um $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n\frac{\pi}{2}))^2}{n^4}$ (mit $b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2})$)
- $\rightarrow$ zuerst Integral d. Quadrats d. Funktion berechnen $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$ (Def. Bereich von x)
- $\sim$ ausrechnen $= \frac{\pi^3}{6}$

$\rightarrow$ mit Parseval folgt $\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(n\frac{\pi}{2}) \right)^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

$$= \frac{\pi^3}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n\frac{\pi}{2}))^2}{n^4} = \frac{\pi^3}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n\frac{\pi}{2}))^2}{n^4} = \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Wenn bei Matrixaufgabe ein EV gegeben

- $\rightarrow$ meist in Lsg. $A_2 = z \cdot k$ mit $z = \frac{1}{6}$ als EV
- $\rightarrow$ also $A \cdot \frac{1}{6}$ rechnen und dann k rausfinden.

Matrixmultiplikation 3×3

$$\begin{pmatrix} z_1 & \cdot & R_1 & z_1 & \cdot & R_2 & z_1 & \cdot & R_3 \\ z_2 & \cdot & R_1 & z_2 & \cdot & R_2 & z_2 & \cdot & R_3 \\ z_3 & \cdot & R_1 & z_3 & \cdot & R_2 & z_3 & \cdot & R_3 \end{pmatrix}$$

DGL mit Laplace

- $y'' - y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
- $f(t)$ ist zu best. Lösung d. AHS $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
- $-f(t)$ in DGL einsetzen $\rightarrow f'(t) - f(t) = 1$,
 zudem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$
- Laplace-Transform auf beiden Seiten
 $s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) = F(s) - \mathcal{L}\{1\} \Leftrightarrow 1/s$
- $\rightarrow$ nach Einsetzen d. Anfangswerte $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$
 $s^2 F(s) - 1 - F(s) = \frac{1}{s}$
- $\cdot F(s)$ bestimmen $s^2 F(s) - F(s) = \frac{1}{s} + 1$
 $F(s) \cdot (s^2 - 1) = \frac{1}{s} + 1$
 $F(s) = \frac{1}{s(s^2 - 1)} = \frac{1}{s(s-1)(s+1)}$
 $F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$
 $F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}$

- $\Rightarrow$ PB2 $\rightarrow F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$
- $\circ f(t)$ durch inverse Laplace auf $F(s)$
 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
 $= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$
 $= e^t - 1 + e^{-t}$

Volumen Dreikörper

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

DEL's lösen//

wenn $\det W(0,1) \neq 0$
oder invertierbar

- char. Polynom $\rightarrow MS$
- Fundamentalsysteme: $f(x) = e^{ax}$
 - $\rightarrow 1 - a \ln b \rightarrow f(x) \cdot e^{ax} \cos(bx)$; $f(x) \cdot e^{ax} \sin(bx)$
- alle Lösungen: $f(x) = c_1 \cdot f(x) + \dots + c_n \cdot f(x)$
- ABs einsetzen und c rausfinden: $W(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$
- $\rightarrow$ LGS oder $W^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

ist $\det W(0) \neq 0$?

- [illegible]

← hinzufügen

- rechte Seite d. Gleichung hat Form $r(x) e^{\mu x}$, wobei $r(x) = 2x^2$; Grad d. 2. $\mu = -1$

- p(D-1) auf Polynomanteil $s_2 x^2 + s_1 x + s_0$ das Ansatzes anwenden und gleichsetzen mit Polynomanteil $2x^2$ d. rechten Seite

$$X^2 = S_2 X^2 + X(2S_2 + S_1) + S_2 + S_1 + S_0$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich $s_2 = 1; s_1 = 2; s_0 = 1$
 $\Rightarrow$ in $S(x)$ einsetzen $\rightarrow f_p(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$

набормуи.

- char. Polynom $\rightarrow NS$
- part. Lösung

- rechte Seite vom Term $(x+b)^{\mu x}$ mit Grad μ von $(x+b)$
 - Resonanzfall? (ist μ eine w.z.f. -fache NS)
 1st $\frac{p(x)}{q(x)}$ X

$$f(x) = x^m \cdot (x^2 + x + 3)e^{\mu x}$$

$$\begin{aligned} & \cdot f(x) = s(x) e^{\mu x} \\ & \cdot \dot{f}(x) = (ax+b) e^{\mu x} \end{aligned}$$
 ↓
 → DGL Operator: $p(x, \mu)$, dann D einsetzen
 und auf $s(x)$ anwenden (Lsg-fg)
 = Koeffizientenvergleich
 = Lösen für s : oder a/b

$$\rightarrow W_{\text{sys}}(x) = \frac{1}{\det}$$
$$W(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$