

1. Gleichungen & Ungleichungen

<https://youtu.be/GKjBp2OCs5A>

1.1 Gleichungen

Billo

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2, 3\}$$

Behräge

$$|x - x_0| = \begin{cases} (x - x_0) & x \geq x_0 \\ -(x - x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Fallunterscheidung bei $x = x_0$ („da wo das Innere 0 wird“)

Fall I $x \geq x_0$

$$\dots \Rightarrow \tilde{\mathbb{L}}_I$$

Prüfe ob $\tilde{\mathbb{L}}_I$ in Fall I enthalten $\Rightarrow \mathbb{L}_I$

Fall II $x < x_0$

$$\dots \Rightarrow \tilde{\mathbb{L}}_{II}$$

$$\text{-----} \text{ " } \text{-----} \Rightarrow \mathbb{L}_{II}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_I \cup \mathbb{L}_{II}$$

Bsp

$$|x-4| = 7$$



kritische Stelle $x_0 = 4$

Fall I $x \geq 4$

$$\Rightarrow |x-4| = 7 \Leftrightarrow (x-4) = 7 \Rightarrow x = 11 \geq 4 \quad \checkmark$$

Fall II $x < 4$

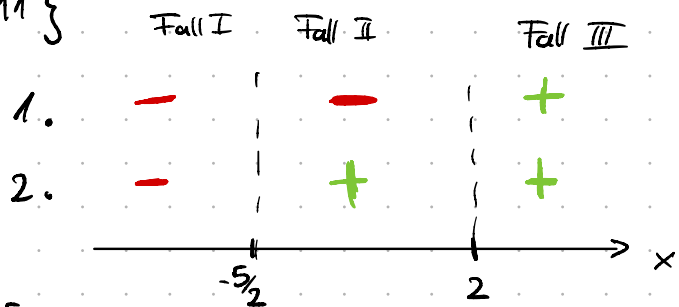
$$\Rightarrow |x-4| = 7 \Leftrightarrow -(x-4) = 7 \Rightarrow x = -3 < 4 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3, 11\}$$

Bsp

$$1. \quad |x-2| = 2x+5$$

$\swarrow$ $x_1 = 2$ $\searrow$ $x_2 = -\frac{5}{2}$



Fall I $x \leq -\frac{5}{2}$

$$-(x-2) = -(2x+5) \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -7 \leq -\frac{5}{2} \quad \checkmark$$

Fall II $-\frac{5}{2} < x < 2$

$$-(x-2) = (2x+5)$$

$$x = -3 < -\frac{5}{2} \quad \text{!}$$

verrechnet, aber was wichtig für die Dramatik

$$x = -1 > -\frac{5}{2}$$

Fall III $2 \leq x$

$$x-2 = 2x+5$$

$$-7 = x < 2 \quad \text{!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1, 7\}$$

$$\mathbb{L} = \{-7\}$$

1.2 Ungleichungen

$$5x^2 + 2x + 7 \geq x + 2$$

$\Rightarrow$ Alles wie davor

1. Multiplikation mit negativen Zahlen dreht das Ungleichzeichen
 $\hookrightarrow$ bei Multiplikation mit $x \Rightarrow$ Fallunterscheidung

Bsp 1

$$\begin{array}{lll} -5x > 7 & | \cdot -\frac{1}{5} & \\ x < -\frac{7}{5} & \checkmark & \mathbb{L} = (-\infty, -\frac{7}{5}) \end{array}$$

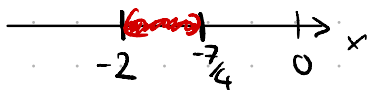
Bsp 2

$$\frac{1}{x+2} > 4 \quad | \cdot (x+2) \quad x \neq -2$$

Fall I $x > -2$

$$1 > 4(x+2)$$

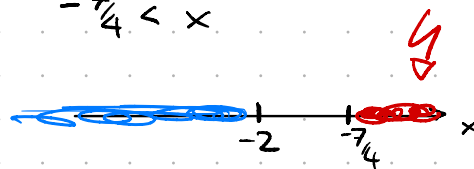
$$-\frac{7}{4} > x$$



Fall II $x < -2$

$$1 < 4(x+2)$$

$$-\frac{7}{4} < x$$



$$\Rightarrow \mathbb{L} = (-2, -\frac{7}{4})$$

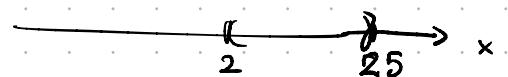
$$\begin{array}{l} 4 > 2 \quad ()^{-1} \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \end{array}$$

2. Kehrbruch dreht sich das Ungleichzeichen um

$$\frac{2}{x-2} > 4 \quad | ()^{-1} \quad x \neq 2$$

$$\begin{array}{l} \frac{x-2}{2} < \frac{1}{4} \\ x < 5/2 \end{array} \quad | \cdot 2 \quad | +2 \quad \mathbb{L} = ($$

Vorsicht



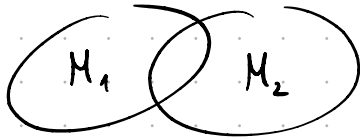
2. Mengen

2.1 Generals

$$M = \{ n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N} \}$$

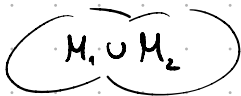
↖ "für die gilt"

$x \in M$ "x ist ein Teil von M"



$$M_1 \cup M_2 = \{ x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \}$$

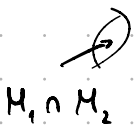
↖ "oder"



"Vereinigung"

$$M_1 \cap M_2 = \{ x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \}$$

↖ "und"



"Schnitt"

$$M_1 \setminus M_2 = \{ x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2 \}$$

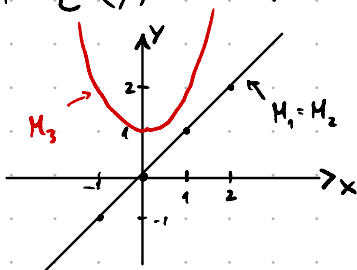


"ohne"

2.2 Zeichnen

2.2.1 (Un)-Gleichungen

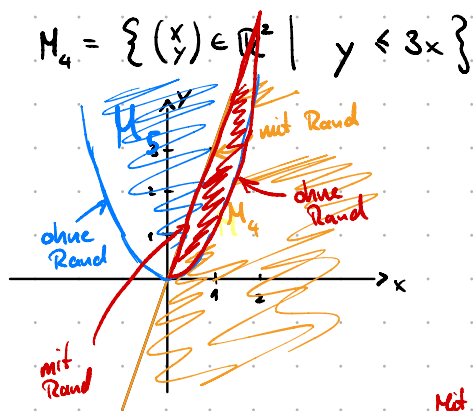
$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}$$



$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\}$$

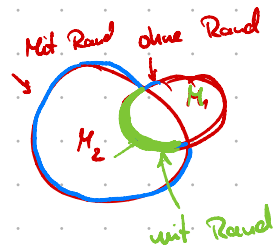
$$\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = y \end{array} \Rightarrow M_2 = M_1$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y + 1 = 0 \right\}$$
$$\begin{array}{l} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = y \end{array}$$



$$M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2 \right\}$$

$$M_6 = M_4 \cap M_5$$



$$M_2 \setminus M_1$$

0 ohne
1 mit

2.2.2 Kreisgleichungen

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \right\}$$

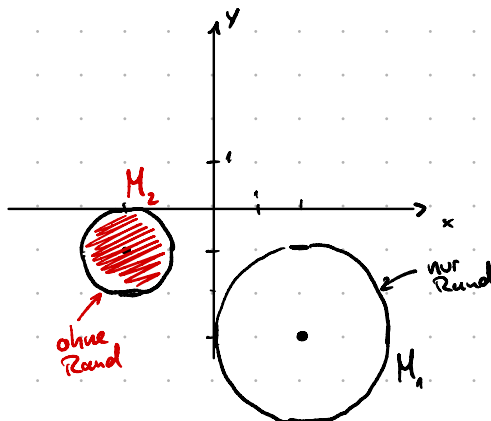
definiert Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $MP = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Bsp

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4 \right\}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$r = 2$$



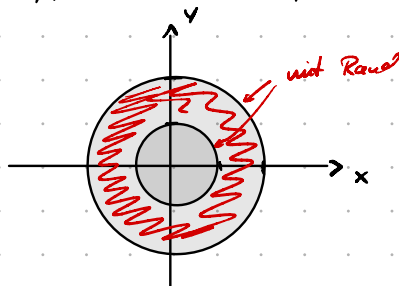
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + (y+1)^2 < 1 \right\}$$

$$MP = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad r = 1$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 6x + y^2 + 4y \leq -4 \right\}$$

$$\begin{aligned} (x-b)^2 &= x^2 - 2bx + b^2 & -6x &= -2bx \\ x^2 - 6x + 9 - 9 & & b &= 3 \\ (x-3)^2 - 9 & & & \\ & & & 2by = 4y \\ & & & y^2 + 4y + 4 - 4 \\ & & & (y+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$



$$\Rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 \leq -4 \quad | +4 \quad | +9$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 9$$

$$MP = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad r = 3$$

3. Komplexe Zahlen

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

|\sqrt{}

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow \pm \sqrt{(-1) \cdot 4} = \pm \sqrt{4} \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_i = \pm 2i$$

Definiere $\sqrt{-1} = i \iff i^2 = -1$

$$\bullet \quad 3 + \sqrt{8} = 3 + \sqrt{4 \cdot 2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\bullet \quad 3 + \sqrt{-2} = 3 + \sqrt{2}i$$

Komplexe Zahlen: $z \in \mathbb{C}$

$$z = a + ib$$

Realteil von z
 $\text{Re}(z)$

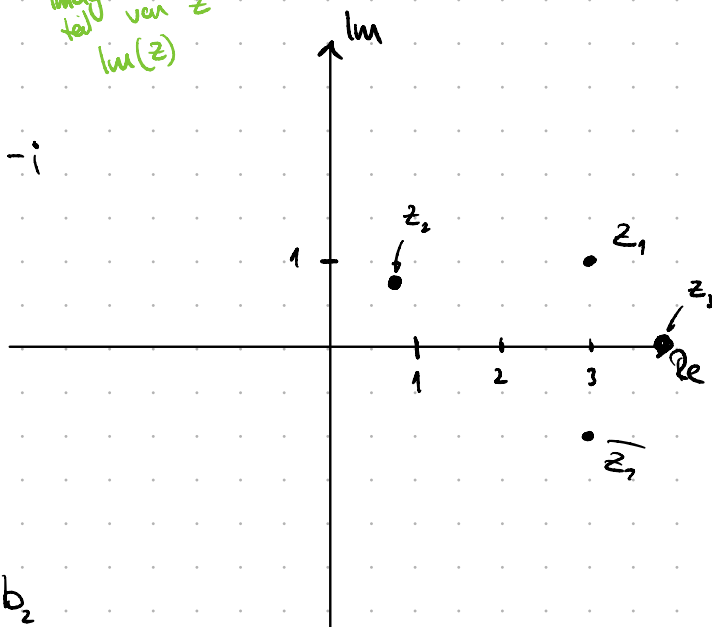
Imaginärteil von z
 $\text{Im}(z)$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$z_1 = 3 + i \iff \bar{z}_1 = 3 - i$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$$z_3 = 4$$



Rechenregeln

$$z_1 = a_1 + ib_1 \quad z_2 = a_2 + ib_2$$

$$\bullet \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$\bullet \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - b_1 b_2$$

$$\text{Re}(z_1 z_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2$$

$$\text{Im}(z_1 z_2) = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$\bullet \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + ib_1} \Rightarrow \frac{1}{z_1} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{\underbrace{z_1 \bar{z}_1}_{\in \mathbb{R}}}$$

- Komplex Konjugierte einer Zahl $z \in \mathbb{C}$

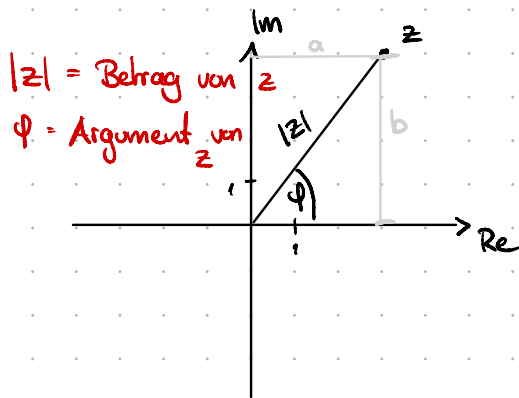
$$z = a + ib \iff \bar{z} = a - ib$$

$$\bar{z} \cdot z = (a + ib)(a - ib) = a^2 + \cancel{iab} - \cancel{iab} - \underbrace{(ib)^2}_{-b^2} = a^2 + b^2$$

$$\frac{1+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+3i)(1+i)}{2} = \frac{1+3i+i-3}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

Polarkoordinaten

$$z = a + ib$$



$|z|$ = Abstand von z zum Ursprung

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}} \iff z \bar{z} = |z|^2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = |z| \cdot \cos \varphi$$

$$b = |z| \cdot \sin \varphi$$

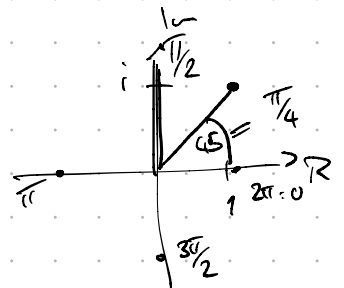
$$\Rightarrow z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

„Beträge werden multipliziert, Winkel addiert“

$$z_1^n = |z_1|^n \cos(n \cdot \varphi_1) + i \sin(n \cdot \varphi_1)$$



Komplexes Wurzelziehen

$$w^n = z \quad \text{mit} \quad z = a + ib \Rightarrow |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) \right) \quad k = 0, \dots, n-1$$

Bsp $w^4 = 1 + i \Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$

$$w_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot k\right) \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot 0\right) \right)$$

$$= \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \right)$$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$= \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{16}\right) \right)$$

$$\omega_2 =$$

$$\omega_3 =$$

Quadrant	1	1	1	1	1/2	2	2	2	2/3	3	3	3	3/4
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
Winkel	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Quadrant	4	4	4	4
Winkel	300°	315°	330°	360°
Winkel	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	0
sin	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\arctan\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \varphi$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = 2 - i$$

$$z_2 = 1 - i$$

$$z_5 = 3 - i$$

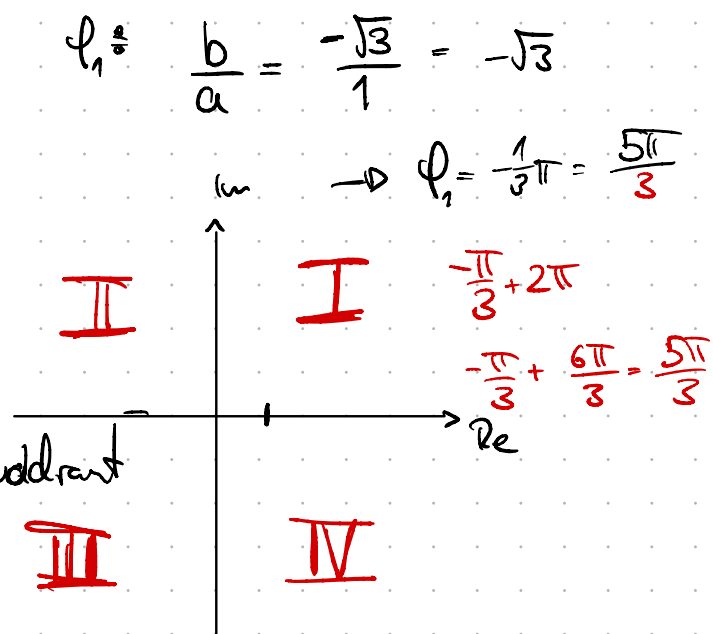
$$z_3 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

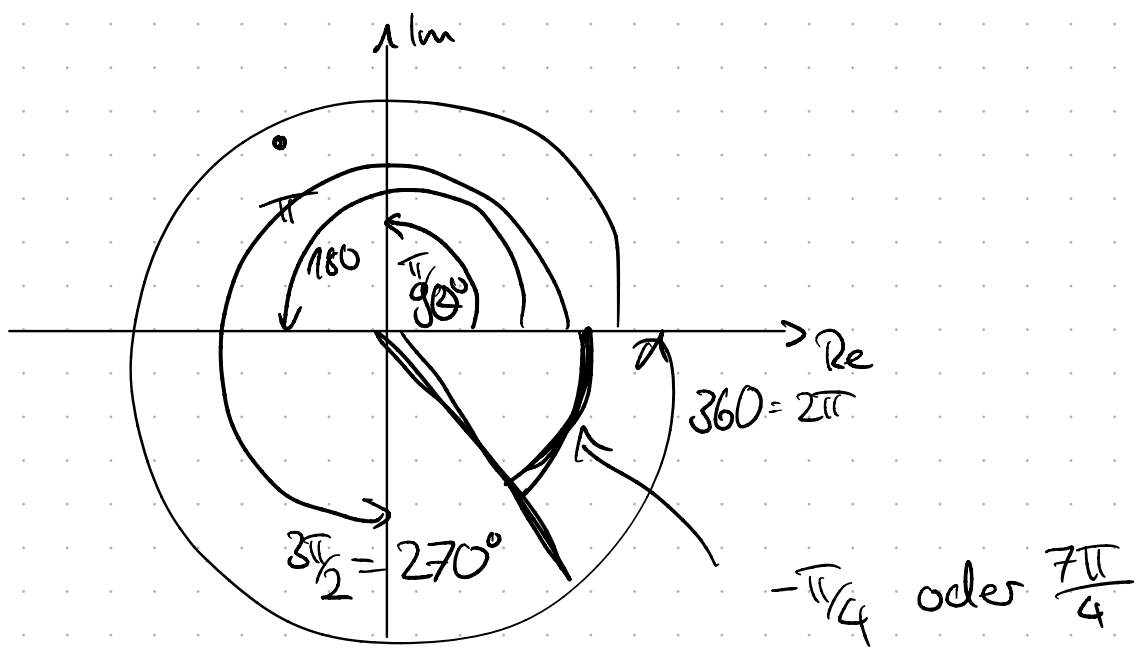
$$\varphi_2 \neq \frac{b}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \quad z_2 \text{ in 4. Quadrant}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \frac{-\pi}{4} = \frac{7\pi}{8}$$

$$\varphi_3: \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{-2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\varphi_4: \frac{b}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

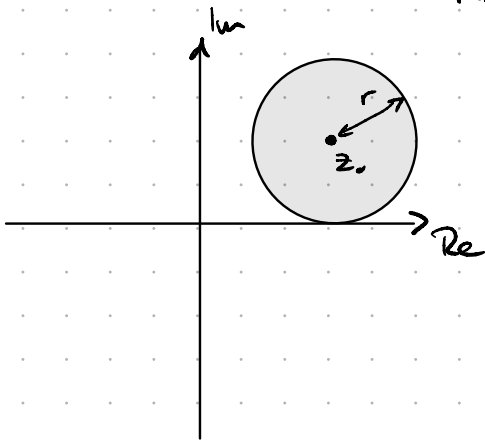




Komplexe Mengen zeichnen

Menge $M = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$

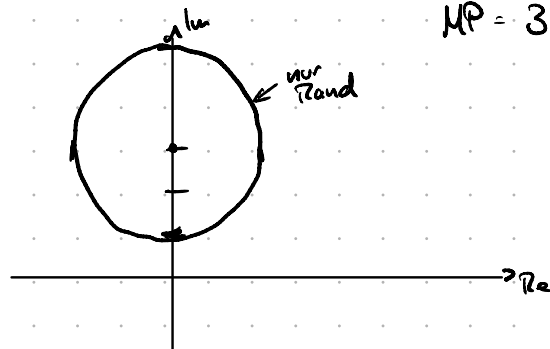
↳ Kreis mit Mittelpunkt z_0 & Radius r



Bsp

$$M_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2 \}$$

MP = $3i$ $r = 2$



M

$$|z - z_0| \leq r$$

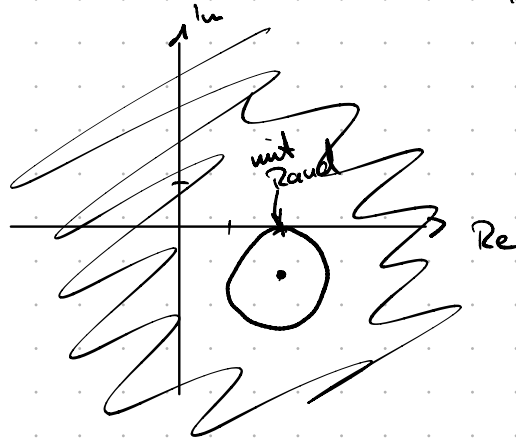
Kreis mit Füllung & Rand

$$|z - z_0| < r$$

Kreis mit Füllung & ohne Rand

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2 + i| \geq 1\}$$

$$\text{MP } z_0 = 2 - i$$



$$M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 3\}$$

$$\text{Ansatz: } z = a + ib \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Im}(a + ib) = 3$$

$$b = 3$$

$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 4\}$$

$$\text{Ansatz } z = a + ib \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \Rightarrow \text{Im}\left(\frac{a - ib}{a^2 + b^2}\right) = 4$$

$$\frac{-b}{a^2 + b^2} = 4 \quad | \cdot a^2 + b^2$$

$$-b = 4(a^2 + b^2)$$

$$0 = 4\left(a^2 + b^2 + \frac{1}{4}b\right)$$

$$= \left(a^2 + \left(b + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}\right) \quad | + \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{64} = a^2 + \left(b + \frac{1}{8}\right)^2$$

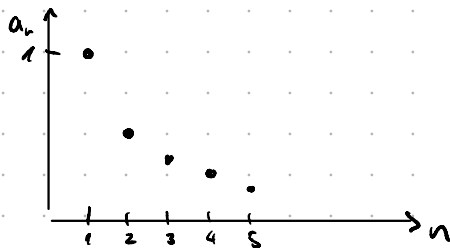
$$\text{Kreis mit MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{matrix}$$

$$r = \frac{1}{8}$$

4. Folgen & Reihen

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$

z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \ln(n)$ $c_n = \cos(n \cdot \pi)$



4.1 Beschränktheit

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} \quad S \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \quad s \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt wenn sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

Bsp	a_n :	$S = 56$	$s = -1$
	b_n :	$S \text{ /}$	$s = 0$
	c_n :	$S = 2$	$s = -2$

4.2 Monotonie

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ oder $a_{n+1} - a_n > 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ oder $a_{n+1} - a_n < 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ oder $a_{n+1} - a_n \leq 0$

Bsp

$$(a_n)_{\text{new}} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S=1$$

$$s=0$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_n)_{\text{new}} \text{ smw}$$

4.3 Konvergenz

$(a_n)_{\text{new}}$ ist konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

a ist der Grenzwert

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Bsp

Nullfolge

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{konvergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty \quad \text{bestimmt divergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{unbestimmt divergent}$$

4.4 Wichtige Folgen

• Quotienten aus Polynomen $\frac{p(n)}{q(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 + 6n^{17}}{-3n^{16} + 300n^2 - n^{17}} \quad \text{höchste Potenz entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{5 \cdot \frac{1}{n^4}} + 3 \cdot \frac{1}{n^5} + 6}{\underset{\rightarrow 0}{-3 \cdot \frac{1}{n}} + \underset{\rightarrow 0}{300 \cdot \frac{1}{n^5}} - 1} = -6 //$$

• Quotienten aus Exponentialfunktionen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n}} \quad \text{die höchste Basis entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot 4^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{\cancel{3^n} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n + 4 \right)}}{\cancel{4^n} \cdot (1)} = 4 \quad 2^{2n} - ((2^2)^n) = 4^n$$

Bsp

$$(a_n)_{\text{new}} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S=1$$

$$s=0$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > 0$$

$$\iff (a_n)_{\text{new}} \text{ smw}$$

4.3 Konvergenz

$(a_n)_{\text{new}}$ ist konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

a ist der Grenzwert

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Bsp

Nullfolge

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{konvergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty \quad \text{bestimmt divergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{unbestimmt divergent}$$

4.4 Wichtige Folgen

• Quotienten aus Polynomen $\frac{p(n)}{q(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 + 6n^{17}}{-3n^{16} + 300n^2 - n^{17}} \quad \text{höchste Potenz entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\sim 0}{5 \cdot \frac{1}{n^{14}}} + 3 \cdot \frac{1}{n^{15}} + 6}{\underset{\sim 0}{-3 \cdot \frac{1}{n}} + \underset{\sim 0}{300 \cdot \frac{1}{n^3}} - 1} = -6 //$$

• Quotienten aus Exponentialfunktionen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n}} \quad \text{die höchste Basis entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot \underset{4^n}{4^n}}{\underset{4^n}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\sim 0}{4^n \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4\right)}}{4^n \cdot (1)} = 4 \quad 2^{2n} - ((2^2)^n) = 4^n$$

• Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{an}\right)^{an+c} = e^x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n}{2n^2}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3/2}{n}\right)^{n+3} = e^{3/2}$$

• Differenzen aus Wurzeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n^2+4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}}{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1 - (n^2+4)}{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-2 - \frac{3}{n})}{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = -\infty \Rightarrow \text{divergent}$$

4.5 Reihen

Reihe $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ z.B. $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ kann konvergieren oder divergieren

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ „harmonische Reihe“ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

• $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| < 1$ geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Auf Indizes achten!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n)^4}{(9n)^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^4}{9^4 n^4} = \frac{1}{9^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{9^3} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{1}{9^3} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)$$

• $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$

5 Vektorräume

5.1 Def $\mathbb{K}$ -Vektorräume $V \subseteq \mathbb{B} \quad \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$$\forall s, t \in \mathbb{K} \quad \& \quad \forall v, w \in V$$

$$\cdot (s+t)v = sv + tv$$

$$\cdot s(v+w) = s \cdot v + s \cdot w$$

$$\cdot (s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$$

$$\cdot 1 \cdot v = v$$

5.2 Untervektorraum

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, U eine Teilmenge $U \subseteq V$

U heißt Untervektorraum UVR $\Leftrightarrow$

$$\text{UVR1: } u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$$

$$\text{UVR2: } u \in U, s \in \mathbb{K} \Rightarrow s \cdot u \in U$$

$$\text{UVR3: } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Null"}}}{0} \in U$$

5.3 Linearkombination, Lineare Hülle & Aufspann

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \in \mathbb{R}^n$$

$$L(V) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{"Lineare Hülle" oder Aufspann von } V$$

$\downarrow$
 $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\forall v \in L(V) : \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \quad v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \leftarrow \text{Linearkombination}$$

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow v \in L(V)$$

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \{v_1, v_2, v_3\}$

sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ist $w \in L(V)$?

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\alpha_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\alpha_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\alpha_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = w$$

$$\Rightarrow w \in L(V)$$

5.4 Lineare Unabhängigkeit

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

V ist linear unabhängig, wenn sich kein Vektor in V als Linearkombination der anderen schreiben lässt

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 \Rightarrow V \text{ ist linear abhängig l.a.}$$

5.5 Basen

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine Basis von (Unter-) Vektorraum, wenn gilt

• $L(B) = V$, jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination aus Vektoren aus B schreiben

$$\forall v \in V \exists \alpha_i \in \mathbb{R} : v = \sum \alpha_i b_i$$

• B ist linear unabhängig

$$v \in V \Rightarrow v = \sum \alpha_i b_i = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$$

die Koeffizienten $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ heißen Koordinaten von v in der Basis B

Bsp

$$\underbrace{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}}$$

$$\underbrace{f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

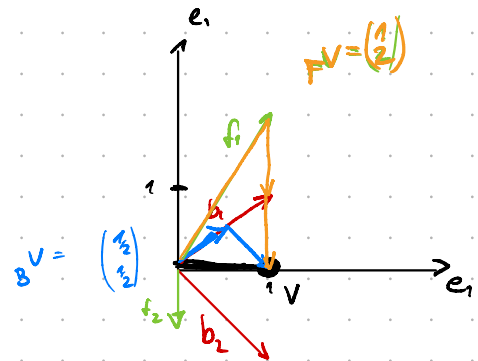
$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{{}_B v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

v in $\mathcal{B}$ dargestellt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \color{red}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \color{green}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}_F v = \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \color{green}{2} \end{pmatrix}$$



5.6 Polynombasen

$$p(x) = ax^2 + bx + c \in \underbrace{\text{Pol}_2 \mathbb{R}}_{\text{ist VR}}, \text{ reelle Polynome mit Grad h\"ochstens } 2$$

$$\hookrightarrow p = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \color{yellow}{x^2} + \color{red}{3x} - \color{green}{2}$$

$$q = \begin{pmatrix} \color{green}{-2} \\ \color{red}{3} \\ \color{yellow}{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp Sei $\mathcal{B} = \{ \overset{\downarrow}{x^2+1}, \overset{\downarrow}{x}, \overset{\downarrow}{x^2+x} \}$ eine Basis von $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$

$${}_B q = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\color{red}{-2}}{\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{\color{red}{0}}{\alpha_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\color{red}{+3}}{\alpha_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_B q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$