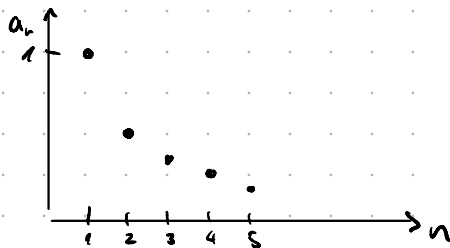


4. Folgen & Reihen

[https://
www.youtube.com/
watch?v=rVZxlr0DotQ](https://www.youtube.com/watch?v=rVZxlr0DotQ)

Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$

z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \ln(n)$ $c_n = \cos(n \cdot \pi)$



4.1 Beschränktheit

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists S \in \mathbb{R} \quad S \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} \quad s \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt wenn sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

Bsp a_n : $S = 56$ $s = -1$
 b_n : S / $s = 0$
 c_n : $S = 2$ $s = -2$

4.2 Monotonie

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ oder $a_{n+1} - a_n > 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ oder $a_{n+1} - a_n < 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ oder $a_{n+1} - a_n \geq 0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$

berechne $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ oder $a_{n+1} - a_n \leq 0$

Bsp

$$(a_n)_{\text{new}} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S=1$$

$$s=0$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_n)_{\text{new}} \text{ smw}$$

4.3 Konvergenz

$(a_n)_{\text{new}}$ ist konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

a ist der Grenzwert

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Bsp

Nullfolge

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{konvergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty \quad \text{bestimmt divergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{unbestimmt divergent}$$

4.4 Wichtige Folgen

• Quotienten aus Polynomen $\frac{p(n)}{q(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 + 6n^{17}}{-3n^{16} + 300n^2 - n^{17}} \quad \text{höchste Potenz entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{5 \cdot \frac{1}{n^4}} + 3 \cdot \frac{1}{n^5} + 6}{\underset{\rightarrow 0}{-3 \cdot \frac{1}{n}} + \underset{\rightarrow 0}{300 \cdot \frac{1}{n^5}} - 1} = -6 //$$

• Quotienten aus Exponentialfunktionen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n}} \quad \text{die höchste Basis entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot 4^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{\cancel{3^n}} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n + 4 \right)}{\cancel{4^n} \cdot (1)} = 4 \quad 2^{2n} - ((2^2)^n) = 4^n$$