

Bsp

$$(a_n)_{\text{new}} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$S=1$$

$$s=0$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > 0$$

$$\iff (a_n)_{\text{new}} \text{ smw}$$

4.3 Konvergenz

$(a_n)_{\text{new}}$ ist konvergent

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

a ist der Grenzwert

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Bsp

Nullfolge

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{konvergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty \quad \text{bestimmt divergent}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{unbestimmt divergent}$$

4.4 Wichtige Folgen

• Quotienten aus Polynomen $\frac{p(n)}{q(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n^2 + 6n^{17}}{-3n^{16} + 300n^2 - n^{17}} \quad \text{höchste Potenz entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{5 \cdot \frac{1}{n^4}} + 3 \cdot \frac{1}{n^5} + 6}{\underset{\rightarrow 0}{-3 \cdot \frac{1}{n}} + \underset{\rightarrow 0}{300 \cdot \frac{1}{n^5}} - 1} = -6 //$$

• Quotienten aus Exponentialfunktionen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{2n}} \quad \text{die höchste Basis entscheidet}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot 4^n}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{\cancel{3^n} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n + 4 \right)}}{\cancel{4^n} \cdot (1)} = 4 \quad 2^{2n} - ((2^2)^n) = 4^n$$

• Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{an}\right)^{an+c} = e^x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n}{2n^2}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3/2}{n}\right)^{n+3} = e^{3/2}$$

• Differenzen aus Wurzeln

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n^2+4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}}{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1 - (n^2+4)}{\sqrt{3n^2+1} + \sqrt{n^2+4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(-2 - \frac{3}{n})}{\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = -\infty \Rightarrow \text{divergent}$$

4.5 Reihen

Reihe $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ z.B. $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ kann konvergieren oder divergieren

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ „harmonische Reihe“ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

• $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| < 1$ geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Auf Indizes achten!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n)^4}{(9n)^4} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^4}{9^4 n^4} = \frac{1}{9^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{9^3} \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{1}{9^3} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)$$

• $\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Bsp $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$