

5 Vektorräume

5.1 Def $\mathbb{K}$ -Vektorräume V z.B. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

$$\forall s, t \in \mathbb{K} \quad \& \quad \forall v, w \in V$$

$$\cdot (s+t)v = sv + tv$$

$$\cdot s(v+w) = s \cdot v + s \cdot w$$

$$\cdot (s \cdot t) \cdot v = s \cdot (t \cdot v)$$

$$\cdot 1 \cdot v = v$$

<https://www.youtube.com/watch?v=sQgnZ-cqa5E>

5.2 Untervektorraum

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, U eine Teilmenge $U \subseteq V$

U heißt Untervektorraum UVR $\Leftrightarrow$

$$\text{UVR1: } u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$$

$$\text{UVR2: } u \in U, s \in \mathbb{K} \Rightarrow s \cdot u \in U$$

$$\text{UVR3: } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Null"}}}{0} \in U$$

5.3 Linearkombination, Lineare Hülle & Aufspann

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad v_i \in \mathbb{R}^n$$

$$L(V) = \sum_i \alpha_i v_i \quad \text{"Lineare Hülle" oder Aufspann von } V$$

$\downarrow$
 $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$

$$\forall v \in L(V) : \exists \alpha_i \in \mathbb{R} \quad v = \sum_i \alpha_i v_i \quad \leftarrow \text{Linearkombination}$$

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} : v = \sum_i \alpha_i v_i \Rightarrow v \in L(V)$$

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \{v_1, v_2, v_3\}$

sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. ist $w \in L(V)$?

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\alpha_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{\alpha_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\alpha_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = w$$

$$\Rightarrow w \in L(V)$$

5.4 Lineare Unabhängigkeit

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

V ist linear unabhängig, wenn sich kein Vektor in V als Linearkombination der anderen schreiben lässt

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = v_1 \Rightarrow V \text{ ist linear abhängig l.a.}$$

5.5 Basen

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine Basis von (Unter-) Vektorraum, wenn gilt

• $L(B) = V$, jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination aus Vektoren aus B schreiben

$$\forall v \in V \exists \alpha_i \in \mathbb{R} : v = \sum \alpha_i b_i$$

• B ist linear unabhängig

$$v \in V \Rightarrow v = \sum \alpha_i b_i = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$$

die Koeffizienten $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ heißen Koordinaten von v in der Basis B

Bsp

$$\underbrace{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}}$$

$$\underbrace{f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 & \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{+} \begin{aligned} 2\alpha_1 &= 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

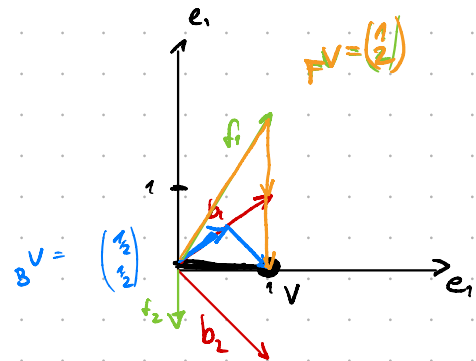
$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{B}V} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

v in $\mathcal{B}$ dargestellt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \color{red}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \color{green}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}V = \begin{pmatrix} \color{red}{1} \\ \color{green}{2} \end{pmatrix}$$



5.6 Polynombasen

$$p(x) = ax^2 + bx + c \in \underbrace{\text{Pol}_2\mathbb{R}}_{\text{ist VR}}, \text{ reelle Polynome mit Grad h\"ochstens } 2$$

$$\hookrightarrow p = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \color{yellow}{x^2} + \color{red}{3x} - \color{green}{2}$$

$$q = \begin{pmatrix} \color{green}{-2} \\ \color{red}{3} \\ \color{yellow}{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp Sei $\mathcal{B} = \{x^2+1, x, x^2+x\}$ eine Basis von $\text{Pol}_2\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}q = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$