

6. Geometrie

6.1 Skalarprodukt

$$v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^n \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \dots + v_n w_n$$

Bsp $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle x | y \rangle \mapsto \sum x_i y_i$$

$$\langle v | w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 6$$

$$\langle v | u \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u, v \text{ sind orthogonal oder auch senkrecht}$$

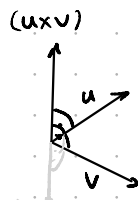
Eigenschaften

- $|v| = \sqrt{\langle v | v \rangle} \quad |v| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$
- $\langle v | w \rangle = |v| \cdot |w| \cdot \cos(\alpha)$
- $\langle v | w \rangle = 0 \Leftrightarrow v, w \text{ orthogonal}$
- $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle$
- $\langle v | w + u \rangle = \langle v | w \rangle + \langle v | u \rangle$
- $\langle s \cdot v | w \rangle = \langle v | s w \rangle = s \langle v | w \rangle$



6.2 Vektorprodukt

$$u, v \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$



$$(v \times u) = -(u \times v)$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u \times v) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$



$$\langle (u \times v) | u \rangle = \langle (u \times v) | v \rangle = 0$$

Bsp

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.3 Normalenvektor

$$\tilde{n} = u \times v \Rightarrow n = \frac{1}{|\tilde{n}|} \tilde{n} \quad \text{normiert}$$

n ist orthogonal auf u & v und hat Länge 1

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{n}| = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \Rightarrow n = \frac{1}{|\tilde{n}|} \tilde{n} = \frac{1}{10\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow 10 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{n}| = 10 \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 10\sqrt{3}$$

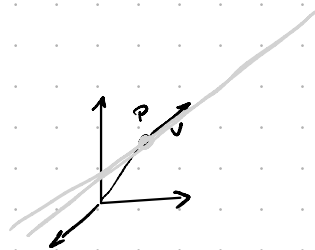
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6.4 Ebenen & Geraden

Gerade

$$g = \left\{ P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

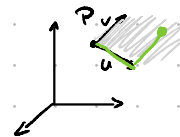
λ "lambda"
 P Stützvektor
 v Richtungsvektor



Ebenen

$$E = \left\{ P + \lambda v + \mu u \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

λ, μ "müll"
 P Stützvektor
 v, u Richtungsvektoren



Punkt auf Gerade / Ebene? Schnittpunkt?

↳ Gleichsetz nach Parameter (λ, μ) umformen

Sei P, Q, R Punkt und E die Ebene die durch diese 3 Punkte läuft



$$u = \overrightarrow{PQ} = Q - P$$

$$v = \overrightarrow{PR} = R - P$$

$$\Rightarrow E = \left\{ P + \lambda v + \mu u \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

6.5 Hessesche Normalform / Hesse Normalform

$$E = \{ p + \lambda v + \mu u \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

$$n = \frac{1}{|v \times u|} (v \times u)$$

$$\Rightarrow E_H = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x | n \rangle = d \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d \}$$

d : setze einen Punkt in $\langle x | n \rangle$ ein, von dem bekannt ist, dass er auf der Ebene liegt.

$d \geq 0$! wenn $d < 0 \Rightarrow n \cdot (-1)$

Abstand Ebene - Punkt q

$$d(E, q) = \langle q | n \rangle - d$$