

Vektoren

<https://www.youtube.com/watch?v=HxaLj3VvYv4>

Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren aus einem Vektorraum V

Linearkombination:

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$$

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufspann

$$L(v_1, v_2, \dots, v_n) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ w \in V \mid w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\}$$

„der Aufspann ist die Menge an Vektoren, die linear kombiniert werden kann“

$$\text{für } u \in L(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

z.B. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$w \in L(v_1, v_2, v_3)$$

Erzeugendensystem

die Menge $U = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von einem (Unter-) Vektorraum V genau dann wenn gilt

$$L(U) = L(v_1, \dots, v_n) = V$$

„jeder Vektor aus V kann als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ geschrieben werden“

Lineare Unabhängigkeit:

$U = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \sum \alpha_i v_i = 0 \quad \text{nur wenn } \forall \alpha_i = 0$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sind l.u.

sei $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ sind nicht l.u. sondern l.a.

Basis

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem

Sei V ein (Unter-) Vektorraum, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Menge an Vektoren
dann ist B eine Basis von $V \Leftrightarrow$

$$V = L(U) = L(v_1, \dots, v_n) \quad \text{und} \quad v_1, \dots, v_n \text{ sind l.u.}$$

- die Darstellung eines Vektors w aus V ist dann eindeutig

$$w = \sum \alpha_i v_i \quad \text{mit eindeutigen } \alpha_i$$

$$\text{diese } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

heissen wir Koordinaten von w bezüglich der Basis B

$${}_B w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

- die Anzahl an Basisvektoren beschreibt die Dimension d. Vektorraums.

Skalarprodukt

$$\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Bsp: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle u | v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{1 \cdot (-1)}_{=-1} + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 6$

Eigenschaften

- $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle$
- $\langle u | v \rangle = 0 \iff u \perp v$
- $\langle a \cdot u | v \rangle = a \langle u | v \rangle$
- $\langle v | v \rangle = |v|^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{\langle v | v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
- $\langle u | v \rangle = |u| |v| \cos(\varphi)$ φ ist Winkel zwischen u & v
- Normierung eines Vektors $\tilde{v}$: $v = \frac{1}{|\tilde{v}|} \tilde{v} \quad |v| = \sqrt{\langle \frac{1}{|\tilde{v}|} \tilde{v} | \frac{1}{|\tilde{v}|} \tilde{v} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{|\tilde{v}|^2} \cdot \langle \tilde{v} | \tilde{v} \rangle} = \sqrt{\frac{|\tilde{v}|^2}{|\tilde{v}|^2}} = \sqrt{1} = 1$

Orthonormalbasis ONB

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist Basis von V

B ist eine Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$

• $\langle b_i | b_j \rangle = 0$ wenn $i \neq j$ (paarweise orthogonal)

• $|b_i| = 1$ alle Längen 1.

ZB. $B: \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$|b_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Gram-Schmidt'schen Orthonormierungsverfahren

gegeben Menge an Vektoren $= \{v_1, \dots, v_n\}$

Ziel eine ONB B aus V machen. wobei $L(b_1) = L(v_1)$, $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$

$$1. \quad b_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1$$

$$2. \quad \tilde{b}_2 = v_2 - \langle v_2 | b_1 \rangle \cdot b_1$$

$$b_2 = \frac{1}{|\tilde{b}_2|} \tilde{b}_2$$

$$3. \quad \tilde{b}_3 = v_3 - \langle v_3 | b_2 \rangle b_2 - \langle v_3 | b_1 \rangle b_1$$

$$b_3 = \frac{1}{|\tilde{b}_3|} \tilde{b}_3$$

$\vdots$

$$n. \quad \tilde{b}_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n | b_i \rangle b_i$$

$$b_n = \frac{1}{|\tilde{b}_n|} \tilde{b}_n$$

Beispiel $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

gesucht $B = b_1, b_2, b_3$ mit $L(v_1) = L(b_1)$, $L(b_1, b_2) = L(v_1, v_2)$
 $L(B) = L(V)$

$$b_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{|\tilde{b}_2|} \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} | \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} | \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}_{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{|\tilde{b}_3|} \tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$