Lineare Gleichungssysteme

https://youtu.be/hRx-a_t7Dkc

Idee:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Lineare Gleichung mit m Unbekannten
Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_m \end{pmatrix}$ muss diese Gleichung erfüllen

ein System von n lineare Gleichungen mit m Unbekannten

eine Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ muss alle Gleichungen erfüllen.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_m & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & & & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nm} & b_n \end{array}\right) \quad \text{Ziel} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & & 0 & \beta_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \beta_n \end{array}\right)$$

$$Ax = b$$

↳ Gauß-Algorithmus!

$\Rightarrow$ Lösung $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ablesbar

Erlaubte Werkzeuge

1. Zeilen tauschen.
2. Zeilen mit Skalaren multiplizieren.
3. Vielfaches von Zeilen zu anderen Zeilen addieren.

Linear abhängige Zeilen dürfen eliminiert werden (0 0 .. 0)

Bsp

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ z_2 - 3z_1 \\ z_3 - 2z_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot -\frac{1}{5} \\ z_3 - z_2 \end{array}$$

1. Ziel: 1 in a_{11}
2. Spalte aufräumen
3. 1 in a_{22}
4. Damit 2 Spalte aufräumen
5. 1 in a_{33}
6. Damit 3 Spalte aufräumen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ z_1 - 2z_2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} z_1 + 1/5 z_3 \\ z_2 - 3/5 z_3 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bsp 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ z_2 - z_1 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} z_1 - z_2 \\ \\ z_1 + 2z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$0 = 2$ ↯

$\Rightarrow$ LGS hat keine Lösung

es gibt kein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, dass alle Gleichungen erfüllt.

Bsp 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ z_2 - 2z_1 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ z_3 + z_2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$0 = 0$ ok

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ z_1 - 2z_2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung aber auch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Allgemein: $(A \mid b) \rightsquigarrow$ (

Mehr Unbekannte als Linear unabhängige Zeilen resultiert in unendlich vielen Lösungen

Spaltentausch

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \; ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

zurücktauschen

Basen des Lösungsraums

Bezug zu Basen und Linearkombinationen

- Wie viel Dimensionen (Anzahl d. Basen) hat der Lösungsraum eines LGS ?
  Hat etwas mit Anzahl der l.u. Zeilen & d. Anzahl an Variablen zu tun
- Wann sind $V = \{ v_1, v_2 \dots, v_n \}$ linear unabhängig ?

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{nur für } \alpha_i = 0 \;\; \forall i$$

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots v_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Vektoren sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ LGS $(v_1 .. v_n | 0)$ genau eine Lösung hat (die Null)

Bsp sei $B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist B_α eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) z_2 - 2z_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1-2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} z_1 + z_3 \\ z_2 - z_3 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 \end{array}\right)$$

für $\alpha = 0$ hat das LGS unendlich viele LSG $\Leftrightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind l.a.

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sind für $\alpha \neq 0$ l.u.

3 l.u. Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Lösung $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$