

Matrix

<https://youtu.be/ZfFbMpRM-Z0>



Matrix

Matrix $M \in \mathbb{R}$

n Zeilen
 $n \times m$
 m Spalten
alle Einträge sind reell

m_{ij} = der Eintrag in i -ter Zeile j -ter Spalte

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{12} = 0$$

$$B \in \mathbb{C}^{2 \times 4} \quad B = \begin{pmatrix} i+1 & -i & 2i & 2-i \\ 1 & 2 & 1-i & 1 \end{pmatrix} \quad b_{23} = 1-i$$

$$C \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Spezielle Matrizen

1. $n=m \Leftrightarrow A$ ist quadratisch

2. Nullmatrix $O_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_n \Bigg\}_n$

3. Einheitsmatrix I_n oder $E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_n \Bigg\}_n$

Rechenregeln

Addition: $A \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad B \in \mathbb{R}^{z \times s}$

$$C = A + B \quad \text{nur wenn } n=z \text{ \& } m=s$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{„elementweise Addition“}$$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+4 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$B = \lambda \cdot A$ mit $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ „elementweise skalare Multiplikation“

Bsp: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matrixmultiplikation

$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad B \in \mathbb{R}^{z \times s}$

$A^{n \times m} \cdot B^{z \times s} = C^{n \times s}$

existiert nur wenn $m=z$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$
„Zeile mal Spalte“

Bsp

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{3 \times 2} \cdot B^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{⚡}$

$B^{3 \times 3} \cdot A^{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

- Nullmatrix $O_n \cdot A = A \cdot O_n = O_n$
 - Einheitsmatrix $E_n A = A \cdot E_n = A$
- } $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Eigenschaften

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A \neq 0_n$$

Rang

- Zeilenrang: die Anzahl an linear unabhängigen Zeilen
↳ Zeilenrang $\leq n$
- Spaltenrang: die Anzahl an linear unabhängigen Spalten
↳ Spaltenrang $\leq m$
- Rang: $\text{rg} A = \text{Zeilenrang} = \text{Spaltenrang}$
 $\Rightarrow 1 \leq \text{rg} A \leq \min(n, m)$

• Voller Rang: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\begin{matrix} n & \text{Zeilen} \\ m & \text{Spalten} \end{matrix}$

• voller Zeilenrang: $\text{rg} A = n$

• voller Spaltenrang: $\text{rg} A = m$

• voller Rang: $\text{rg} A = m = n$

A muss quadratisch sein.

Transponierte Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \Leftrightarrow A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\text{mit } (a_{ij})^T = a_{ji}$$

„Zeilen werden zu Spalten“

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T = (1 \ 2 \ 0) \quad (v^T)^T = v$$

Gilt $A^T = A \Leftrightarrow$ symmetrisch

Bild & Kern

- Kern einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m} = \ker(A) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kern}}}{v} \in \mathbb{R}^m \mid Av = 0 \}$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist immer $\in \ker A$

Berechnung: $Av = 0$

es gilt $\dim \ker(A) = m - \text{rg } A$

- Bild einer Matrix: $\text{im}(A) = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \exists v \in \mathbb{R}^m : Av = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bild}}}{w} \}$
alle Vektoren, die aus Av resultieren können.

Berechnung: geg: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

- bilden A^T
- eliminiere alle l.a. Zeilen in A^T mit Gauß
- Transponiere zurück
- die nicht-null Spalten bilden Basis d. Bildes

z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mu \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Determinanten

- Existiert nur für quadratische Matrizen.

2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc$$

3x3

Satz von Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$
$$= a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

Entwicklungssatz „Laplace“

für $\mathbb{R}^{n \times n}$

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 0^+ \\ 0^- & 1^+ & 1^- \\ 2^+ & 3^- & 0^+ \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2$$

Entwickle nach 3. Spalte

$$(+1) \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot (1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + (+1) \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ Immer nach Zeile oder Spalte entwickeln, die möglichst viele Nullen hat.

Gauß-Algorithmus & Determinante

$\det(A)$: Um Berechnung leichter zu machen kann man Zeilenumformungen machen

1. Zeilen tauschen: mit jedem Tausch wird $\det(A) \cdot (-1)$
2. Zeile mit Skalar α multiplizieren: $\det A \cdot \alpha$
3. Vielfaches von Zeilen zu anderen hinzuzaddieren: $\det A$ bleibt gleich

Determinante von Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Determinanten von Dreiecksmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ 0 & & & 5 & \\ & & & & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Eigenschaften von Determinanten

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det(A)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- Es gilt **nicht**: $\det(A+B) = \det A + \det B$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Aussagen der Determinante

$$\det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ hat nicht vollen Rang}$$

• Zeilen/Spalten von A sind l.a.

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ hat vollen Rang}$$

Inverse

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Rechts- & Linksinverse

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt Rechtsinverse wenn gilt $A \cdot X = I_n$

↳ existiert, wenn A vollen Zeilenrang: $\text{rg} A = n$

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt Linksinverse wenn gilt $X \cdot A = I_m$

↳ existiert, wenn A vollen Spaltenrang: $\text{rg} A = m$

Berechnung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{4 \times 2}$$

$\text{rg}(A) = 2 = m \Rightarrow$ voller Spaltenrang
 $\Leftrightarrow$ Linksinverse existiert

$$X^{2 \times 4} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b+3c & a+3b+4c \\ e+4f+3g & e+3f+4g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a + 4b + 3c = 1$$

$$a + 3b + 4c = 0$$

$$e + 4f + 3g = 0$$

$$e + 3f + 4g = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Ges.} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Linksinversen: z.B. $\lambda, \mu = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Inverse

hat A Rechts- & Linksinverse muss gelten:

- A quadratisch
- A hat vollen Rang

$$\Leftrightarrow \exists X \text{ mit } X \cdot A = A \cdot X = I_n$$

$\hookrightarrow$ X nennen wir Inverse von A und schreiben A^{-1}

Berechnung

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \left(A \mid \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \ddots & 1 \end{smallmatrix} \right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \ddots & 1 \end{smallmatrix} \mid A^{-1} \right)$$

2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

$\det A^{-1}$:

- $\det(I_n) = 1$
- $\det(I_n) = \det(A A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad | \cdot \frac{1}{\det A}$
 $\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\cdot (A^{-1})^{-1} = A$$

Orthogonale Matrix

Sei $A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_n)$

gilt $\cdot |a_i| = 1$ (alle Spalte Länge 1)

$\cdot \langle a_i | a_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ (alle Spalten paarweise orthogonal)

$\Leftrightarrow$ nennen wir A orthogonal

Es gilt $A^T = A^{-1}$

$$\Rightarrow \det A = \det(A^T) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$\Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A} \quad | \cdot \det(A)$$

$$(\det A)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det A = \begin{cases} 1 & A \text{ ist eigentlich ortho} \\ -1 & A \text{ ist uneigentlich ortho} \end{cases}$$

$$A \text{ ortho} \Rightarrow \det A = \pm 1$$

$$\det A \neq \pm 1 \Rightarrow A \text{ ist nicht orthogonal}$$

Bezug zu anderen Themen

Basen: $B = (b_1, b_2, b_3 \dots b_n)$ eine Menge an Vektoren

B ist Basis vom $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Matrix $B = (b_1, b_2 \dots b_n)$

$\cdot$ hat vollen Rang

$\cdot \det B \neq 0$

B ist eine Orthonormalbasis ONB $\Leftrightarrow B$ ist orthogonal

LGS

Das LGS $Ax = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{hat genau eine LGS} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \\ \text{hat unendlich viele LGS} \Leftrightarrow \det(A) = 0 \end{array} \right.$

Gilt $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existiert

$$\Rightarrow Ax = b \quad | : A^{-1}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b \Rightarrow \text{Lösung für beliebiges LGS } Ax = b \\ \Rightarrow x = A^{-1}b$$