
<https://youtu.be/lya14DydjHk>



Lineare Abbildungen

$\varphi: V \rightarrow W$ ist linear $\Leftrightarrow$

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\varphi(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot \varphi(u)$$

Jede lineare Abbildung kann als Matrix-Vektor Multiplikation beschrieben werden

$$\varphi: V \rightarrow W: v \mapsto Av = w$$

$$\text{mit } A \in \mathbb{R}^{\dim W \times \dim V}$$

Beispiel: $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: v \mapsto Av$ mit $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ & $v \in \mathbb{R}^3$

Eigenschaften:

- $\varphi: v \mapsto Av$ ist injektiv $\Leftrightarrow A$ hat vollen Spaltenrang
- $\varphi: v \mapsto Av$ ist surjektiv $\Leftrightarrow A$ hat vollen Zeilenrang
- $\varphi: v \mapsto Av$ ist bijektiv $\Leftrightarrow A$ hat vollen Rang

Inverse

Wenn φ bijektiv $\exists \varphi^{-1}$ mit: sei $w = \varphi(v)$ dann gilt $v = \varphi^{-1}(w)$

$$\begin{array}{ll} \varphi: V \rightarrow W & \varphi^{-1}: W \rightarrow V \\ \varphi(v) = Av = w & \varphi^{-1}(w) = A^{-1}v \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \text{„Umkehrabbildung“}$$

Verkettung:

Seien $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ & $\beta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ zwei lineare Abbildungen.
 $u \mapsto Au$ $v \mapsto Bv$
 $\Leftrightarrow \alpha(u) = Au$ $\Leftrightarrow \beta(v) = Bv$

Die Verkettung $(\alpha \circ \beta)$ beschreibt die Hintereinanderausführung von „ α nach β “

$$\Rightarrow (\alpha \circ \beta)(v) = \alpha(\beta(v)) = \underbrace{A \cdot B}_{C} \cdot v = C \cdot v$$

Darstellung & Basiswechsel

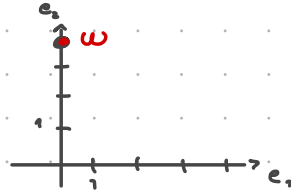
Sei B Basis von V

Frage: Woher weiß ich wie der Punkt ${}_B w$ wirklich aussieht?

$${}_B w: \alpha \cdot b_1 + \beta b_2$$

Bsp: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$${}_B w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{wo liegt } w?$$



$${}_E w = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow {}_E w &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ {}_E w &= {}_E \text{id}_B ({}_B w) = {}_B w \end{aligned}$$

sei ${}_E v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wie sieht ${}_B v$ aus? Es würde gelten: ${}_E v = {}_E \text{id}_B ({}_B v) = {}_B v$

$$\Leftrightarrow {}_B v = {}_B \text{id}_E ({}_E v) = \left({}_E \text{id}_B \right)^{-1} ({}_E v) = {}_B^{-1} {}_E v$$

${}_E \text{id}_B$ transformiert Koordinaten der Basis B in Koordinaten der Basis E

${}_B \text{id}_E$ transformiert Koordinaten der Basis E in Koordinaten der Basis B

Sei F eine andere Basis von V : ${}_E \text{id}_F ({}_F v) = {}_F v$ & ${}_F \text{id}_E ({}_E v) = {}_F^{-1} {}_E v$

von $F \rightarrow B$: ${}_B \text{id}_F = {}_B \text{id}_E \circ {}_E \text{id}_F = {}_B^{-1} \cdot F$

$B \rightarrow F$: ${}_F \text{id}_B = F^{-1} \cdot B$

Sei $\alpha: V \rightarrow V$ in Standard Koordinaten gegeben: geg ${}_E \alpha {}_E$
 $v \mapsto A v$

$\Rightarrow F \alpha_B$: nimmt Vektoren in B dargestellt sind, bildet sie ab und gibt den Output in F wieder

$$F \alpha_B = {}_F \text{id}_E \circ {}_E \alpha {}_E \circ {}_E \text{id}_B = (F^{-1} \cdot A \cdot B)_v$$

Bsp

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1. {}_E \varphi_E = \left({}_E \varphi(e_1) \quad {}_E \varphi(e_2) \right) = \left({}_E \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, {}_E \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A}$$

$$2. {}_B \varphi_B = \underbrace{{}_B \text{id}_E}_{({}_E \text{id}_B)^{-1}} \cdot {}_E \varphi_E \cdot {}_E \text{id}_B = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot {}_B v = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} {}_B v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} {}_B v$$

$$\text{Bsp: } \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : v \mapsto Av \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(P_i) = Q_i$$

$$\varphi(P_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(P_2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+b = 3 \\ -2+d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ d = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow {}_E \varphi_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} v$$