Affine Abbildungen

https://youtu.be/r8aYQ_tOmVc

Affine Abbildungen

$\alpha: V \to W$

$\alpha(v) = \underbrace{Av}_{\text{Linearanteil}} + \underbrace{t}_{\text{Translationsanteil}}$ es gilt $A \in \mathbb{R}^{\dim W \times \dim V}$ $t \in \mathbb{R}^{\dim W}$ $v \in \mathbb{R}^{\dim V}$

z.B. $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(v) = Av + t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

gilt $\det A \neq 0 \iff \alpha$ eine Affinität

Verkettung

$\alpha(v) = Av + t \qquad \beta(v) = Bv + s$

$(\alpha \circ \beta)(v) = \alpha(\beta(v)) = \alpha(Bv + s) = A(Bv + s) + t = \underbrace{ABv}_{\text{Linearteil}} + \underbrace{As + t}_{\text{Translationsanteil}}$

Bsp sei $\alpha(v) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\beta(v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\alpha \circ \beta)(v) = \alpha(\beta(v)) = \alpha\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(\alpha \circ \beta)(v) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Inverse Abbildung

$\alpha(v) = w = Av + t \quad | -t$

$\iff w - t = Av \quad | \cdot A^{-1}$

$A^{-1}w - A^{-1}t = v$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(w) = A^{-1}w - A^{-1}t$

Orthogonale Abbildungen

$\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal $\Leftrightarrow$ A orthogonal
$v \mapsto Av + t$

$A^T = A^{-1}$

↳ wenn α orthogonal $\Leftrightarrow$ α ist eine Isometrie

eigentliche Isometrie : $\det(A) = 1 \Rightarrow$ Drehung

uneigentliche Isometrie : $\det(A) = -1 \Rightarrow$ Spiegelung

Drehung

$\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi: \text{Drehwinkel}$$

z.B

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\mathbb{R}^3$

- Winkel $\alpha = \arccos\left(\frac{\mathrm{Sp}A - 1}{2}\right)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{Sp}A - 1}{2}$$

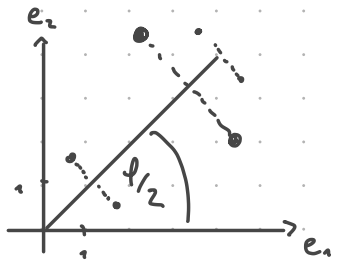
- Drehachse : $(A - E)v = 0$ ← Eigenvektor zum Eigenwert 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spiegelung

$\mathbb{R}^2$

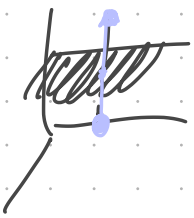
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$



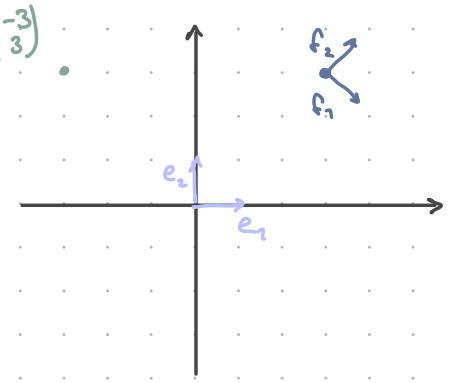
Spiegelachse mit Koordinatenachse $\varphi/2$

$\mathbb{R}^3$ Spiegelebene

$(A - E)v = 0$



Koordinatentransformationen



$E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$F = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

bzgl Standard

${}_E P = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad {}_F P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

wenn Basis des Koordinatensystems ONB $\Leftrightarrow$ kartesisches Koordinatensystem

für Basen: von Koordinaten auf F in E: ${}_E id_F(v) = F \cdot v$

for Koordinatsysteme: ——— " ——— : ${}_E x_F(v) = Fv + t$

Transformationen:

Matrix aus Basisvektoren von F

Ursprung von F

${}_E K_F: \quad A_F v + t$

${}_F K_E: \quad ({}_E K_F)^{-1} = A^{-1}_E v - A^{-1} t$

Verkettung

${}_E K_F(v) = Av + t$

${}_E \alpha_E(v) = Bv + p$

${}_F K_E(v) = Cv + s = A^{-1} v - A^{-1} t$

${}_E K_F(v) = Av + t$

${}_E \alpha_E(v) = Bv + p$

${}_F K_E(v) = Cv + s$

$${}_F \alpha_F(v) = {}_F K_E \circ {}_E \alpha_E \circ {}_E K_F(v) = {}_F K_E({}_E \alpha_E({}_E K_F(v))) = C \cdot [B(Av + t) + p] + s$$

$CBAv +$ (Linearteil) $\quad CBt + Cp + s$ (Translationsteil)