

Eigenwerttheorie

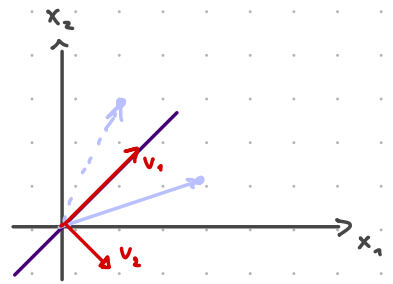
<https://youtu.be/McEDLTzy8k4>



Eigenwerttheorie

Eigenwertgleichung: $Av = \overset{\text{"lambda"}}{\lambda} \cdot v$ mit $v \neq 0$

$\downarrow$ Eigenvektor $\downarrow$ Eigenwert



Eigenwerte

$$Av = \lambda v \quad | -\lambda v$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$Av - \lambda \cdot Iv = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\left(A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = 0$$

$$\underbrace{\left(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)}_{\text{sei } M} v = 0$$

$$\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow Mv = 0 \quad | : M^{-1} \quad \text{wenn } M^{-1} \text{ existiert}$$

$$M^{-1}Mv = M^{-1} \cdot 0$$

$$v = M^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \text{↯ existieren}$$

M^{-1} darf nicht

Wenn existiert M^{-1} nicht?

• $(A - \lambda I)$ hat nicht vollen Rang

$$\bullet \det(A - \lambda I) = 0$$

↑
Go to!

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

↳ $\det(A - \lambda I) =$ charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda)$ ↙ "chi"

• Die Nullstellen λ_i von χ_A sind die Eigenwerte von A

z.B. $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^3 \cdot (2-\lambda)(1-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 3 \Rightarrow e_3 = 3$
 $\lambda_2 = 2 \Rightarrow e_2 = 1$
 $\lambda_3 = 1 \Rightarrow e_1 = 1$

Die Vielfachheit der Nullstelle λ_i in K_A ist die algebraische Vielfachheit e_{λ_i} .

Eigenvektoren

$V(\lambda = \lambda_i)$

$$(A - \lambda_i I) v = 0$$

$\downarrow$ Gauß

z.B. $\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & -c_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \uparrow & 0 \end{array} \right) \Rightarrow V(\lambda_i) = \left\{ \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mu, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -c_1 & -c_2 & 0 \\ 0 & \uparrow & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \uparrow & 0 \end{array} \right) \Rightarrow V(\lambda_i) = \left\{ \begin{pmatrix} -c_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nu, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$

Anzahl an Nullzeilen = Anzahl an EV zu einem Eigenwert λ_i :

= geometrische Vielfachheit d_{λ_i}

= Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ_i : $\dim(V(\lambda_i))$

es gilt $1 \leq d_{\lambda_i} \leq e_{\lambda_i} \leq n$

• Diagonalisierbarkeit

• $\exists T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus Eigenvektoren von $A \Leftrightarrow T = (v_1, \dots, v_n)$ sodass $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

• $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

• Eine Matrix $A^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar wenn

(k Anzahl der versch. Eigenwerte)

$$\bullet \quad n = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k d_{\lambda_i}$$

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^k d_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k e_{\lambda_i}$$

$$\bullet \quad \forall i: d_{\lambda_i} = e_{\lambda_i}$$

Eigenschaften

$$\bullet \quad \text{Sp} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\bullet \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

• wenn λ EW von A

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A^2 \Rightarrow A \cdot \underbrace{Av}_{\lambda v} = A \cdot \lambda v = \lambda \underbrace{Av}_{\lambda v} = \lambda^2 v$$

$$\Rightarrow \lambda^n \text{ ist EW von } A^n$$

$$\Rightarrow \alpha \lambda \text{ ist EW von } \alpha \cdot A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ ist EW von } A^{-1}$$

wenn ein EV v von A bekannt: $\Rightarrow \lambda: Av = \lambda v$

• Eigenvektoren zu verschiedenen EW sind l.u.

• Für symmetrische Matrizen gilt:

EV zu verschiedenen EW sind orthogonal