

Quadriken

<https://youtu.be/ybLwoBNokuc>



Quadriken

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A x + 2\vec{a}^T x + c = 0\} \quad \text{mit } A^T = A \quad a \in \mathbb{R}^3 \quad c \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \{ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_2x_3 + fx_1x_3 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + c = \}$$

Allgemein

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad c = c$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|c} c & a^T \\ \hline a & A \end{array} \right)$$

Beispiel

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2 + 2 = 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = 2$$

$$A_{\text{erw}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

① Bestimme Eigenwerte λ von A
mit $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

Tipp: Schlauf ausklammern

$$\textcircled{1} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot ((-1-\lambda)(2-\lambda) - 4) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

$$\lambda_1 = (-1)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = (-1) \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$$

② Bestimme Eigenvektoren v_i von λ_i

$$v_i: (A - \lambda_i I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a-\lambda_i & \frac{d}{2} & \frac{f}{2} & 0 \\ \frac{d}{2} & b-\lambda_i & \frac{e}{2} & 0 \\ \frac{f}{2} & \frac{e}{2} & c-\lambda_i & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Gauß} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{v}_i = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_i = \frac{1}{|\tilde{v}_i|} \tilde{v}_i$$

$$\textcircled{2} V(\lambda_1 = -1): (A + I)v = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{x_1 \leftrightarrow x_3 \\ x_2 \leftrightarrow x_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda_2 = 3) \Rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V(\lambda_3 = -2) \Rightarrow \tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

③ Transformationsmatrix aufstellen

$F = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ ist orthogonal

$$\Rightarrow F^{-1} = F^T$$

wenn $\lambda=0 \Rightarrow$ zugehörige EV nach ganz hinten

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

④ Transformieren

$$F^T A F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad F^T a = \tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{Q} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + 2\tilde{a}_2 y_2 + 2\tilde{a}_3 y_3 + c\}$$

④

$$F^T A F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a} = F^T a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{Q} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid -y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2y_1 + 2 = 0\}$$

⑤ Quadratisch Ergänzen

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + 2\tilde{a}_2 y_2 + 2\tilde{a}_3 y_3 + c$$

$$\Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + 2\tilde{a}_1 y_1 + \lambda_2 y_2^2 + 2\tilde{a}_2 y_2 + \lambda_3 y_3^2 + 2\tilde{a}_3 y_3 + c = 0$$

$$\lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{2\tilde{a}_1}{\lambda_1} y_1 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + \frac{2\tilde{a}_2}{\lambda_2} y_2 \right) + \lambda_3 \left(y_3^2 + \frac{2\tilde{a}_3}{\lambda_3} y_3 \right) + c = 0$$

$$\lambda_1 \left(y_1^2 + 2 \frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} y_1 + \left(\frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 \right) + \lambda_2 \left(y_2^2 + 2 \frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} y_2 + \left(\frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 \right) + \lambda_3 \left(y_3^2 + 2 \frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} y_3 + \left(\frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} \right)^2 \right) + c = 0$$

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{\tilde{a}_1^2}{\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{\tilde{a}_2^2}{\lambda_2} + \lambda_3 \left(y_3 + \frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} \right)^2 - \frac{\tilde{a}_3^2}{\lambda_3} + c = 0$$

$$\lambda_1 \left(y_1 + \frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_2 + \frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left(y_3 + \frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} \right)^2 + \tilde{c} = 0$$

⑤

$$-y_1^2 + 2y_1 - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2 = 0$$

$$-(y_1^2 - 2y_1) - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2 = 0$$

$$-\left(y_1^2 - 2y_1 + 1 - 1 \right) - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2 = 0$$

$$= -(y_1 - 1)^2 + 1 - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 2 = 0$$

$$= -(y_1 - 1)^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 + 3 = 0$$

⑥ Substituieren & normieren

$$z_i = \left(y_i + \frac{\tilde{a}_i}{\lambda_i} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + \tilde{c} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\tilde{c}}$$

$$\frac{\lambda_1}{\tilde{c}} z_1^2 + \frac{\lambda_2}{\tilde{c}} z_2^2 + \frac{\lambda_3}{\tilde{c}} z_3^2 + 1 = 0$$

⑥

$$z_1 = y_1 - 1 \quad z_2 = y_2 \quad z_3 = y_3$$

$$\Rightarrow -z_1^2 - 2z_2^2 + 3z_3^2 + 3 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} z_1^2 - \frac{2}{3} z_2^2 + 1 z_3^2 + 1 = 0$$

euklidische Normalform.

⑦ Verschiebung & Form

Verschiebung d. Koordinatensystems

$$F^{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{a}_1}{\lambda_1} \\ -\frac{\tilde{a}_2}{\lambda_2} \\ -\frac{\tilde{a}_3}{\lambda_3} \end{pmatrix} \Rightarrow E^{\sigma} = F^{\sigma} F$$

⑦

$$F^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E^{\sigma} = F^{\sigma} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ einschaliges Hyperboloid

$$F = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

6.3.7 Affine Klassifikation der Quadriken im Raum.

Wir nehmen hier an, dass jede der drei Variablen in der Gleichung vorkommt.
Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

- (I) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ein Punkt *
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ Doppelkegel
- (II) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ kein Punkt *
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ zweischaliges Hyperboloid
- $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ einschaliges Hyperboloid
- $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$ Ellipsoid
- (III) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0$ elliptisches Paraboloid
- $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3 = 0$ hyperbolisches Paraboloid

6.3.8 Affine Klassifikation der ebenen / zylindrischen Quadriken.

Jetzt nehmen wir an, dass weniger als drei Variablen in der Gleichung vorkommen. Das kann man dann entweder als eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ oder als eine Quadrik in $\mathbb{R}^3$ interpretieren (bei der dann die nicht involvierte Koordinate frei gewählt werden kann).

Dann hat die affine Normalform eine der folgenden Gestalten:

- (I) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ ein Punkt / eine Gerade *
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$ schneidendes Geraden- / Ebenenpaar
- $x_1^2 = 0$ Doppelgerade / Doppelebene
- (II) $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ kein Punkt / kein Punkt *
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ Hyperbel / hyperbolischer Zylinder
- $-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$ Ellipse / elliptischer Zylinder
- $x_1^2 + 1 = 0$ kein Punkt / kein Punkt *
- $-x_1^2 + 1 = 0$ paralleles Geraden- / Ebenenpaar
- (III) $x_1^2 + 2x_2 = 0$ Parabel / parabolischer Zylinder

Die mit * gekennzeichneten Quadriken sehen wieder mager aus, haben aber ebenfalls noch viele Punkte „im Komplexen“. Die interessanten Quadriken aus 6.3.7 zeigt Abbildung 6.2 auf Seite 172.