

Aufgabe 1 (7 Punkte) Zum Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik

$$Q_\beta := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - \beta)x_3^2 + 4x_3 = 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $A_\beta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$x^\top A_\beta x + 2a^\top x + c = 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - \beta)x_3^2 + 4x_3$$

(b) Bestimmen Sie abhängig von β eine euklidische Normalform sowie die Gestalt der Quadrik.

(a) Es gilt

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = 0$$

(b) Wir machen eine Fallunterscheidung:

$\beta = 1$: Wir erhalten

$$0 = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3$$

bzw. als euklidische Normalform

$$\frac{7}{2}x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 = 0.$$

Folglich ist Q_1 ein elliptisches Paraboloid.

$\beta \neq 1$: Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - \beta)x_3^2 + \frac{4(1 - \beta)}{1 - \beta}x_3 \\ &= 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - \beta) \left(x_3^2 + 2\frac{2}{1 - \beta}x_3 \right) \\ &= 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - \beta) \left(x_3 + \frac{2}{1 - \beta} \right)^2 - \frac{4}{1 - \beta} \end{aligned}$$

Mit $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ und $z_3 = x_3 + \frac{2}{1 - \beta}$ erhalten wir als euklidische Normalform

$$-\frac{7(1 - \beta)}{4}z_1^2 - \frac{(1 - \beta)}{2}z_2^2 - \frac{(1 - \beta)^2}{4}z_3^2 + 1 = 0$$

Wegen $\frac{1 - \beta}{4} > 0 \Leftrightarrow 1 > \beta$ ist Q_β also ein

- Ellipsoid für $\beta \in (-\infty, 1)$.
- zweischaliges Hyperboloid für $\beta \in (1, \infty)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ sowie der

Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Rechtsinverse R von A , also eine Matrix R mit $AR = E_3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Av = b$.

(a) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 4 & 4 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 & -2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 Z_1 + 4Z_2 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ -Z_2 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ Z_3 - 3Z_2 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & -6 & -2 & 11 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ \\ Z_2 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ Z_3 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & -6 & -2 & 11 & 0 & -3 & 1 \\ Z_1 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \\ \\ Z_1 - Z_2 - 5Z_3 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 & -18 & -1 \\ Z_2 + 6Z_3 : & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 6 & 21 & 1 \\ & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir

$$R = \begin{pmatrix} -5 & -18 & -1 \\ 6 & 21 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ab.

(b) Aus (*) lesen wir

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als eine mögliche Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Av = 0$ ab.

Eine spezielle Lösung erhalten wir wegen $b = E_3 b = (AR)b = A(Rb)$ mittels

$$Rb = \begin{pmatrix} -5 & -18 & -1 \\ 6 & 21 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was auf die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

führt.

Alternativer Lösungsweg:

Wir wenden die in (a) protokollierten Schritte direkt auf b an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 + 4Z_2 : \\ -Z_2 : \\ Z_3 - 3Z_2 : \end{array}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_2 : \\ Z_3 : \\ Z_1 : \end{array}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} Z_1 - Z_2 - 5Z_3 : \\ Z_2 + 6Z_3 : \end{array}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit führt Gauß angewandt auf $[A|b]$ auf

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

woraus wir

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

erhalten.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Gegeben sei die folgende, vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix:

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Ein Eigenwert ist offenbar $\lambda_1 = 1$. Bestimmen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums.
- (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\gamma}(\lambda)$.
- (c) Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist A_γ invertierbar?
- (d) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von γ .
- (e) Für welche Werte für γ ist A_γ diagonalisierbar?

- (a) Wir lösen das lineare Gleichungssystem $(A - E_5)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 1/3Z_1 - (2+\gamma)/3Z_2 : \\ 1/3Z_2 : \\ Z_4 + Z_3 : \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieraus lesen wir als mögliche Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ab.

(b) Wir nutzen die Block-Dreiecksgestalt und berechnen:

$$\begin{aligned}\chi_{A_\gamma}(\lambda) &= \det(A_\gamma - \lambda E_5) = (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) \\ &= (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda)\end{aligned}$$

wobei wir $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ mittels Mitternachtsformel faktorisiert haben:

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 12}}{2} = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$

Alternativer Lösungsweg:

Wir nutzen mehrfach den Entwicklungssatz, indem wir zunächst zweimal nach der ersten Spalte, danach nach der 3. Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned}\chi_{A_\gamma}(\lambda) &\stackrel{\text{S1}}{=} (4 - \lambda) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\text{S1}}{=} (4 - \lambda)^2 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &\stackrel{\text{Z3}}{=} (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) \\ &= (4 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda)\end{aligned}$$

(c) Die Matrix A_γ ist für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ invertierbar, da 0 nach (b) kein Eigenwert ist.

Alternativer Lösungsweg 1:

Wir nutzen die Block-Dreiecksgestalt und berechnen:

$$\det(A) = \det \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 + \gamma \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot 1 = 16 \cdot 3 \cdot 1 = 48$$

Da die Determinante $\neq 0$ ist, ist die Matrix für beliebige $\gamma \in \mathbb{R}$ invertierbar.

Alternativer Lösungsweg 2:

Wir entwickeln zweimal nach der ersten Spalte.

$$\begin{aligned}\det(A) &\stackrel{\text{S1}}{=} 4 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \stackrel{\text{S1}}{=} 16 \cdot \det \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 16 \cdot (4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1) = 48\end{aligned}$$

Da die Determinante $\neq 0$ ist, ist die Matrix für beliebige $\gamma \in \mathbb{R}$ invertierbar.

(d) Aus (b) lesen wir die algebraischen Vielfachheiten

$$e_1 = 2, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 2$$

ab.

Wir betrachten zunächst das LGS $(A_\gamma - 4E_5)x = 0$:

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ -Z_3 : \begin{bmatrix} 0 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -2Z_4 + Z_3 : \\ -1/3Z_5 : \end{array}$$

Die letzten drei Zeilen sind offensichtlich linear unabhängig. Somit können wir hieraus ablesen:

- Ist $\gamma = -2$, so sind die beiden ersten Zeilen Nullzeilen, es folgt

$$d_4 = 5 - \text{Rg}(A_\gamma - 4E_5) = 5 - 3 = 2.$$

- Ist $\gamma \neq -2$, so sind die Zeilen 1,3,4,5 linear unabhängig, es folgt

$$d_4 = 5 - \text{Rg}(A_\gamma - 4E_5) = 5 - 4 = 1.$$

Mit (a) und den algebraischen Vielfachheiten folgt:

$$d_1 = 2, \quad d_3 = 1, \quad d_4 = \begin{cases} 2 & \gamma = -2 \\ 1 & \gamma \neq -2 \end{cases}$$

(e) Aus (d) erhalten wir direkt: A_γ ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\gamma = -2$.

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie induktiv:Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k = k(n) \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 - n = 3k$.**IA**

Induktionsanfang:

$$n = 1 : \quad 1^3 - 1 = 0 = 3 \cdot 0 \quad , \text{ also ist } k(1) = 0$$

IHFür ein $n \in \mathbb{N}$ existiert $k(n) \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 - n = 3k(n)$.**IS**Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

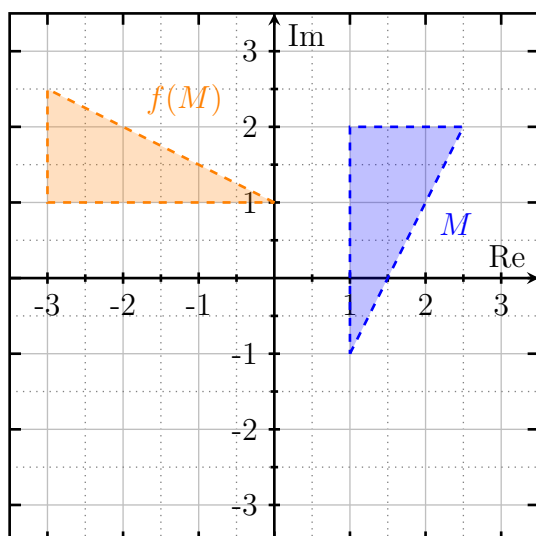
$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

$$\stackrel{\text{IH}}{=} 3k(n) + 3(n^2 + n) = 3 \cdot \overbrace{(k(n) + n^2 + n)}^{\in \mathbb{Z}}$$

Somit existiert mit $k(n+1) := k(n) + n^2 + n$ auch ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $(n+1)^3 - (n+1) = 3k$.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Sei M die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z) + \frac{3}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) < 2 \right\}$ und f die Abbildung

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto i \cdot z - 1.$$

Skizzieren Sie M sowie das Bild $f(M)$ in der Gaußschen Zahlenebene:

Aufgabe 6 (3 Punkte) Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine

Orthonormalbasis w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $L(v_1) = L(w_1)$ und $L(v_1, v_2) = L(w_1, w_2)$.

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{5^k} = \frac{20}{3} \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 3n} - \sqrt{4n^2 + 8n} \right) = -\frac{11}{4}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{1-n}} = e^{-1} \quad (iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 6n^3 - 7}{8n^3 - 11} = \frac{3}{4}$$

$$(v) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=4}^n \frac{1}{(k+1)^3 + 4k + 6} - \frac{1}{k^3 + 4k + 2} \right) = -\frac{1}{82}$$

$$(b) \text{ Bestimmen Sie den folgenden Häufungspunkt: } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + 2 \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) \right) = \frac{7}{3}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{C}$ mit Basis $\mathcal{E}: e_1 = 1, e_2 = i$

sowie die folgende $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung:

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \operatorname{Im}(z) + (5 - 2i) \cdot z$$

$$(a) \text{ Geben Sie das Koordinatentupel von } w := 5 - 2i \text{ bezüglich } \mathcal{E} \text{ an: } {}_{\mathcal{E}}w = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \text{ Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix } {}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{E}}: {}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}(\varphi^{-1})_{\mathcal{E}}$ der Umkehrabbildung φ^{-1} :

$${}_{\mathcal{E}}(\varphi^{-1})_{\mathcal{E}} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$