

Aufgabe 1 (6 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

(b) $\int \frac{x-1}{2x^2 - 6x + 4} dx$

(c) $\int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx$

(a) Wir substituieren $u = x^2 + 4$ mit $\frac{du}{dx} = 2x$:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 3 \int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = 3 [\sqrt{u}] = 3 [\sqrt{x^2 + 4}].$$

(b) Wir faktorisieren zunächst den Nenner: $2x^2 - 6x + 4 = 0$ genau dann, wenn $x^2 - 3x + 2 = 0$ und somit gilt

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten also $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-2)(x-1)$.

Für das Integral folgt damit

$$\int \frac{x-1}{2x^2 - 6x + 4} dx = \int \frac{x-1}{2(x-2)(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |x-2| \right].$$

(c) Durch zweifache partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx &= [-e^{-x} \sin(3x)]_0^\pi + 3 \int_0^\pi e^{-x} \cos(3x) dx \\ &= 0 - 3 [e^{-x} \cos(3x)]_0^\pi - 9 \int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx. \end{aligned}$$

Addieren von $9 \int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx$ zu beiden Seiten ergibt

$$10 \int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx = -3 [e^{-x} \cos(3x)]_0^\pi = 3(e^{-\pi} + 1).$$

Es folgt also $\int_0^\pi e^{-x} \sin(3x) dx = \frac{3}{10}(e^{-\pi} + 1)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt{n})^n}$

(a) Wir wenden das Quotientenkriterium an: Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\left| \frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{2^n}{\sqrt{n!}}} \right| = 2 \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0 < 1.$$

Daher konvergiert die Reihe.

(b) Wir verwenden das Wurzelkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(\sqrt{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n}} = 0 < 1$$

wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Daher konvergiert auch diese Reihe.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie den folgenden Häufungspunkt: $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) n \right)$.

Es gilt, dass $\cos(\frac{\pi n}{2})$ zwischen 1, 0 und -1 wechselt. Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\frac{\pi n}{2})n) = -\infty$.

Da $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ monoton und bijektiv ist, ergibt sich

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) n \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \sin(y) e^{-2x^2}.$$

- (a) Berechnen Sie den Gradienten von f und verifizieren Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine kritische Stelle ist.
(b) Klassifizieren Sie die kritische Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Minimalstelle, Maximalstelle oder Sattelstelle.
-

(a) Der Gradient von f ist gegeben durch

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 4x^2) \sin(y) \\ x \cos(y) \end{pmatrix} e^{-2x^2}.$$

An der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 0) \sin(0) \\ 0 \cdot \cos(0) \end{pmatrix} e^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine kritische Stelle.

- (b) **Variante 1:** Es gilt $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Wir bestimmen also in einer Umgebung von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Punkte, wo f positiv, negativ oder gleich 0 ist. Zunächst stellen wir fest, dass $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ oder $y = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Also wird z.B. die Umgebung $(-2, 2) \times (-2, 2)$ von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von den Koordinatenachsen, an denen f gleich 0 ist, in vier Bereiche geteilt. Wir setzen einzelne Werte ein, um das Vorzeichen von f in diesen vier Bereichen zu bestimmen:

- $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sin(1)}{e^2} > 0$: f ist positiv in $(0, 2) \times (0, 2)$,
- $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sin(-1)}{e^2} < 0$: f ist negativ in $(0, 2) \times (-2, 0)$,
- $f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-\sin(1)}{e^2} < 0$: f ist negativ in $(-2, 0) \times (0, 2)$,
- $f\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-\sin(-1)}{e^2} > 0$: f ist positiv in $(-2, 0) \times (-2, 0)$.

Da also in jeder Umgebung des Punktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowohl Punkte, in denen f positiv also auch Punkte, an denen f negativ ist, liegen, muss $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Sattelstelle sein.

Variante 2: Wir berechnen die Hesse-Matrix von f :

$$Hf \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (16x^3 - 12x) \sin(y) & (1 - 4x^2) \cos(y) \\ (1 - 4x^2) \cos(y) & -x \sin(y) \end{pmatrix} e^{-2x^2}.$$

An der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten wir also

$$Hf \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist $\lambda^2 - 1$, folglich hat sie die Eigenwerte 1 und -1 . Da es mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert gibt, ist die Matrix indefinit und es liegt an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt vor.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

(a) Finden Sie ein Potential für folgendes Vektorfeld:

$$u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yze^{xy} \\ xze^{xy} + z^2 \\ e^{xy} + 2yz \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto e^{x^2 y} \begin{pmatrix} \frac{2}{x} \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}.$$

Besitzt v ein Potential?

(a) Wir integrieren die dritte Komponente von u bezüglich z :

$$\int e^{xy} + 2yz \, dz = ze^{xy} + yz^2 + c(x, y).$$

Wir leiten dies jeweils nach x und y ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (ze^{xy} + yz^2 + c(x, y)) &= ye^{xy} + \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{d}{dy} (ze^{xy} + yz^2 + c(x, y)) &= xze^{xy} + z^2 + \frac{\partial c}{\partial y}. \end{aligned}$$

Durch Vergleichen mit den ersten beiden Komponenten des Vektorfelds können wir $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0$ folgern, also hängt c nicht von x und y ab. Somit ist $U(x, y, z) = ze^{xy} + yz^2$ ein Potential.

(b) Ja. Der Definitionsbereich $(0, 1) \times (0, 1)$ ist einfach zusammenhängend. Es genügt daher zu überprüfen, dass die Jacobi-Matrix symmetrisch ist:

$$Jv(x, y) = e^{x^2 y} \begin{pmatrix} 4y - \frac{2}{x^2} & 2x \\ 2x & \frac{x^2}{y} - \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch überprüfen, dass die Rotation des Vektorfeldes verschwindet:

$$\operatorname{rot} v(x, y) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{2xy}{y} e^{x^2 y} - \frac{2x^2}{x} e^{x^2 y} = 0.$$

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 6 (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \left(\frac{\cos(x)}{e^x} \right)^2$.

(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$$f'(x) =$$

$$-2e^{-2x} \cos(x)(\sin(x) + \cos(x))$$

$$f''(x) =$$

$$2e^{-2x}(1 + 4 \cos(x) \sin(x))$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ an.

$$T_2(f, x, \pi) =$$

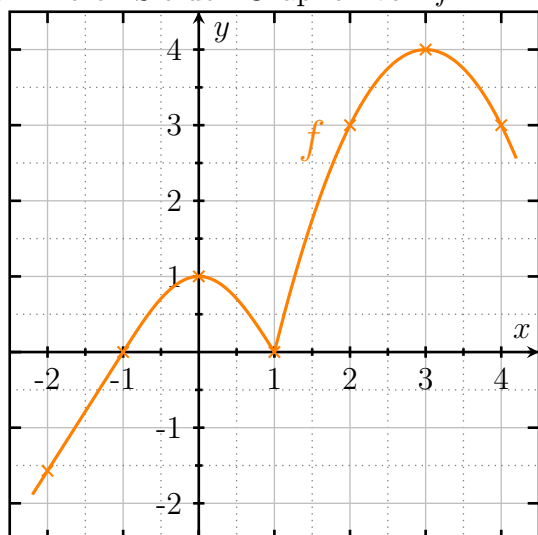
$$\frac{1}{e^{2\pi}} - \frac{2}{e^{2\pi}}(x - \pi) + \frac{1}{e^{2\pi}}(x - \pi)^2$$

Aufgabe 7 (5 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2}(x+1) & \text{falls } x \leq -1 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f'(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f'(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = 4.$$

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-2 \leq x \leq 4$:



(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f nicht differenzierbar?

$$x \in \left\{ \boxed{1} \right\}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte) Bestimmen Sie:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^4 - 30n^2 + 1}{3n(n+1)(2n-1)^2} =$ $\frac{5}{4}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - 3n} \right) =$ $\frac{7}{2}$

(c) $\frac{d}{dx} \ln(x^4 - x + 1) =$ $\frac{4x^3 - 1}{x^4 - x + 1}$ $\frac{d}{dx} \tan(x - 1) =$ $\frac{1}{(\cos(x - 1))^2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^4 - x + 1)}{\tan(x - 1)} =$ 3

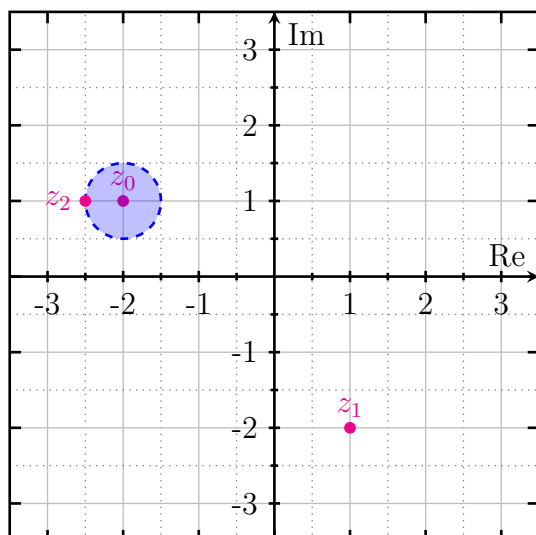
Aufgabe 9 (6 Punkte) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} (z + 2 - i)^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie den Konvergenzradius ρ der Reihe:

$z_0 =$ $-2 + i$ $\rho =$ $\frac{1}{2}$

(b) Skizzieren Sie z_0 , den Konvergenzkreis der Potenzreihe sowie die Punkte $z_1 = -2i + 1$ and $z_2 = -\frac{5}{2} + i$ in der Gaußschen Zahlenebene:



(c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$ (Schreiben Sie für jeden der zwei Punkte entweder „konvergiert“ oder „divergiert“):

$z_1 = -2i + 1 :$ divergiert $z_2 = -\frac{5}{2} + i :$ konvergiert