

Aufgabe 1 (5 Punkte) Bestimmen Sie für $j \in \{1, 2\}$ jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_j$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens bestimmen wir die Lösungsmengen beider Gleichungssysteme gleichzeitig:

$$\begin{array}{ll} \left[\begin{array}{ccccc|cc} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] & Z_2 \leftrightarrow Z_1 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \\ Z_2 - 3Z_1 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 14 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] & Z_3 - Z_2 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ Z_3 - 5Z_1 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & 6 & 0 & 16 \end{array} \right] & \\ \\ -\frac{1}{2}Z_2 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] & Z_1 - Z_2 : \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \end{array}$$

Schon beim Auftreten der ersten Nullzeile ist ersichtlich, dass $\mathcal{L}_2$ leer ist.

Das Gleichungssystem $Ax = b_1$ besitzt die Lösungsmenge

$$\mathcal{L}_1 = \text{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Es sei A die reelle (3×3) -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A .
 - (b) Geben Sie alle Eigenwerte von A sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit an.
 - (c) Ist A diagonalisierbar?
 - (d) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des dazugehörigen Eigenraums.
-

- (a) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\det(A - \lambda \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\pi - \lambda).$$

- (b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil sind 0 und π die einzigen Eigenwerte von A . Aus dem charakteristischen Polynom können wir ferner ablesen, dass der Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 und der Eigenwert π mit algebraischer Vielfachheit 1 auftritt. Da die Spalten von A einen zweidimensionalen Untervektorraum aufspannen (also $\text{Rg}(A) = 2$ gilt), muss $\text{Kern}(A)$ gemäß Dimensionsformel eindimensional sein, weshalb 0 mit geometrischer Vielfachheit 1 auftritt. Da zu jedem Eigenwert ein Eigenvektor existiert und die geometrische durch die algebraische Vielfachheit nach oben beschränkt ist, tritt π mit geometrischer Vielfachheit 1 auf.
- (c) Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar: Denn dann müsste die algebraische mit der geometrischen Vielfachheit des Eigenwerts 0 übereinstimmen, was, wie wir gerade gesehen haben, nicht der Fall ist.
- (d) Der nichttriviale Vektor $(0, 0, 1)^T$ bildet eine Basis des eindimensionalen Eigenraums zum Eigenwert π . Ebenso bildet $(1, 0, 3)^T$ eine Basis für den Eigenraum zum Eigenwert 0.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Es seien A_1 , A_2 und A_3 die reellen (2×2) -Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A_1 , A_2 und A_3 in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ linear unabhängig sind.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Spalten ein linear unabhängiges System in $\mathbb{R}^4$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es seien $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Determinanten $\det(BC)$ und $\det(CB)$ sowie die Spur $\text{Sp}(BC)$.

(a) Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ gegeben, so gilt also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Dies ist nur möglich, wenn $\lambda_3 = 0$ ist. Dann folgt aber $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ bzw. $\lambda_1 = \lambda_2$ und schließlich

$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3\lambda_1.$$

Damit verschwinden sowohl λ_1 als auch λ_2 und A_1 , A_2 und A_3 sind linear unabhängig.

(b) Wir setzen die Linearkombination mit Skalaren x_1 , x_2 , x_3 an:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten daraus das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

In Matrixschreibweise liefert der Gauss-Algorithmus

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 : \\ Z_3 - 3Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Offensichtlich hat die Koeffizientenmatrix nur den Rang 2, also hat das LGS nicht triviale Lösungen, und das gegebene System ist linear abhängig.

Konkret könnte man den Gauss-Algorithmus bis zum Ende führen:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right] &\rightsquigarrow \begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 : \\ Z_3 - 3Z_1 : \\ Z_4 - 4Z_1 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow Z_1 + \frac{2}{3}Z_4 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\rightsquigarrow \begin{array}{l} -\frac{1}{3}Z_4 : \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow Z_2 \leftrightarrow Z_4 : \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist der Endzustand erreicht, wir lesen die Lösungsmenge $\mathbb{R}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)^T = \mathbb{R}(-2, 1, 3)^T$ ab und erhalten (zum Beispiel) die nicht triviale Linearkombination

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Die aus den drei Spaltenvektoren gebildete Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

hat nur den (Zeilen-)Rang 2, weil die ersten drei Zeilen skalare Vielfache voneinander sind. Daher ist der (Spalten-)Rang kleiner als die Zahl der Spalten, und diese sind linear abhängig.

(c) Wir rechnen (Entwicklung nach der dritten Zeile):

$$\det(BC) = \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3(10 - 2) - 0 + 3(10 - 10) = 24.$$

Es gilt

$$\det(CB) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0,$$

weil die Zeilen offensichtlich linear abhängig sind.

Alternative: Da der Rang von B maximal ≤ 3 ist, hat auch das Produkt CB höchstens den Rang 3, deswegen gilt $\det(CB) = 0$.

Für die Spur erhalten wir

$$\text{Sp}(BC) = \text{Sp} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 10.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei $a \neq 0$ und $f(x) = xe^{ax}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (na^{n-1} + a^n x)e^{ax}.$$

- Induktionsanfang **IA** Es ist $f'(x) = e^{ax} + axe^{ax} = (1 \cdot a^{1-1} + a^1 x)e^{ax}$.
- Induktionsschluss **IS** $n \rightsquigarrow n+1$: Es ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} (f^{(n)}(x)) \\ &\stackrel{\text{IH}}{=} \frac{d}{dx} ((na^{n-1} + a^n x)e^{ax}) \\ &= a^n e^{ax} + (na^{n-1} + a^n x)e^{ax} a \\ &= (a^n + na^n + a^{n+1} x)e^{ax} \\ &= ((n+1)a^n + a^{n+1} x)e^{ax}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei g_α das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - \sin(\alpha)y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Jacobi-Matrix, die Rotation und die Divergenz von g_α .
 (b) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche g_α ein Potential besitzt.
 (c) Geben Sie für $\alpha = -\frac{5}{6}\pi$ explizit ein Potential von g_α an.

- (a) Die Jacobi-Matrix der Funktion $g = g_\alpha$ an der Stelle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lautet

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2\sin(\alpha)y \\ y & x \end{pmatrix};$$

demnach ist die Rotation bei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$\operatorname{rot} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial g_2}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y + 2\sin(\alpha)y.$$

Die Divergenz ist $\operatorname{div} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7x$.

- (b) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, existiert ein Potential genau dann, wenn die Rotation an jedem Punkt verschwindet. Also muss $0 = \operatorname{rot} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y(1 + 2\sin(\alpha))$ für alle y gelten.

Es folgt $\sin(\alpha) = -1/2$ bzw. $\alpha = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ oder $\alpha = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Ein Potential existiert also genau dann, wenn

$$\alpha \in \left\{ -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- (c) Wir betrachten jetzt $g = g_\alpha$ für $\alpha = -\frac{5}{6}\pi$. Es gilt $\sin$

Nach dem vorherigen Teil existiert ein Potential U für g . Jedes solche Potential erfüllt $\operatorname{grad} U = g$. Insbesondere unterscheidet sich $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nur um eine von y abhängige Funktion $c(y)$ von

$$\int_0^x \frac{\partial U}{\partial x} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^x g \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} dt = x^3 + \frac{1}{2}xy^2.$$

Ableiten dieser Kandidatin für U liefert die Bedingung $xy = g_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + c(y) \right) = xy + \frac{\partial}{\partial y} c(y)$. Also ist $c(y)$ konstant, und jedes Potential ist von der Form $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + k$ für ein $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

- (a) Entscheiden Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$, ob die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} z^n$ für z konvergiert oder divergiert.
- (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(n^2)} (z - e + i)^n.$$

- (a) Zunächst bestimmen wir den Konvergenzradius der Reihe (z. B.) mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Sei $a_n = \frac{3^n}{n^4}$. Dann ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^4} \cdot \frac{n^4}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = 3 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3.$$

Der Konvergenzradius ist dann $\rho = \frac{1}{3}$.

Damit konvergiert die Reihe jedenfalls für alle z mit $|z| < \frac{1}{3}$

und divergiert für alle z mit $|z| > \frac{1}{3}$.

Die komplexen Zahlen z mit $|z| = \frac{1}{3}$ sind noch gesondert zu betrachten. Es ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n}{n^4} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Damit ist die Reihe für alle z mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergent (laut Vorlesung) und damit auch konvergent.

Insgesamt konvergiert also die Reihe absolut für jede Zahl z mit $|z| \leq \frac{1}{3}$ und divergiert für jede Zahl z mit $|z| > \frac{1}{3}$.

- (b) Der Entwicklungspunkt ist gegeben durch $z_0 = e - i$.

Den Konvergenzradius bestimmen wir mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{(n^2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Damit ist der Konvergenzradius $\rho = e^{-1}$.

Aufgabe 7 (3 Punkte) Die Kurve K sei parametrisiert durch $C: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass C eine reguläre Parametrisierung von K ist.

(b) Es sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet dx$.

(a) Zu zeigen ist, dass $C'(t)$ nirgends verschwindet. Und in der Tat ist

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

niemals der Nullvektor, da aus $\sin(t) = 0$ mit $t \in [0, \pi]$ folgt, dass $t = 0$ oder $t = \pi$ gelten muss. Aber $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$.

(b) Per Definition gilt

$$\begin{aligned} \int_K g(x) \bullet dx &= \int_0^\pi \langle g(C(t)) | C'(t) \rangle dt \\ &= - \int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt + \int_0^\pi C_2'(t) dt \\ &= - \int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt + (C_2(\pi) - C_2(0)), \end{aligned}$$

wobei in die letzte Gleichung der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eingeht. Mittels partieller Integration berechnen wir außerdem

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt &= [\sin^2(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt \\ &= - \int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt, \end{aligned}$$

weshalb $\int_0^\pi \cos(t) \sin(t) dt = 0$ und wegen $C_2(\pi) = C_2(0) = 0$ auch

$$\int_K g(x) \bullet dx = 0$$

gilt.

Alternative: Es ist leicht zu sehen, dass $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + x_2$ ein Potential von g ist.

Damit ist

$$\int_K g(x) \bullet dx = \Phi(C(\pi)) - \Phi(C(0)) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 0 \right) = 0.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte) Gegeben sei die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E .

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E .

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dem φ beschrieben wird durch $\varphi_{\mathbb{F}}: \mathbb{F}x \mapsto A_{\mathbb{F}}x$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(a) Zunächst bestimmen wir den Normalenvektor n auf E . Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Damit ist $n = \frac{\sqrt{5}}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $n = -\frac{\sqrt{5}}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| n \right\rangle \geq 0$ ist. Also haben wir $n = \frac{\sqrt{5}}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und die Hessesche Normalform

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{2\sqrt{5}}{15}x_1 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_2 + \frac{4\sqrt{5}}{15}x_3 = \frac{11}{15}\sqrt{5} \right\}.$$

(b) Jedes Koordinatensystem mit den folgenden Eigenschaften erfüllt die geforderte Bedingung:

- Der Ursprung liegt auf E .
- Der erste Basisvektor ist ein nichtverschwindendes Vielfaches von n .
- Die beiden anderen Basisvektoren sind Basisvektoren des Aufspans $L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Eine (naheliegende) Wahl von $\mathbb{F}$ wäre zum Beispiel

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 9 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n-9} = \boxed{e^4} & \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} + \frac{2^n}{n}} = \boxed{2} \\
 \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 + 2x \sin(x^5)}{(2x-5)^2} = \boxed{\frac{7}{4}} & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{7^k} = \boxed{\frac{7}{8}}
 \end{array}$$

Aufgabe 10 (7 Punkte) Gegeben seien die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x+y)^2$ und $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 3y$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten ∇f und ∇g .

$$\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}}, \quad \nabla g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2x+2y+1 \\ 2x+6y+3 \end{pmatrix}}.$$

(b) Geben Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ an, in denen ∇g verschwindet.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$

(c) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung von kritischen Stellen von f unter der Nebenbedingung $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

$$\begin{array}{l}
 x + y + \lambda(2x + 2y + 1) = 0, \\
 x + y + \lambda(2x + 6y + 3) = 0, \\
 x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 3y = 0
 \end{array}$$

(d) Geben Sie die kritischen Stellen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ an, die zu Lösungen dieses Gleichungssystems gehören:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(e) Bestimmen Sie den größten Wert, den die Funktion f unter der Nebenbedingung $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ annimmt:

$$\boxed{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

Aufgabe 11 (5 Punkte) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sei

$$T_2 \left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 19 + 2(x - 2) + 7(x - 2)^2 - 4(x - 2)(y - 1).$$

(a) Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

$$Hf \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie $T_1 \left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$

$$19 + 2(x - 2).$$

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an mit

$$T_1 \left(g, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = T_1 \left(h, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = T_1 \left(f, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 19 + 2(x - 2),$$

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 19 + 2(x - 2) + (x - 2)^{17}.$$

Aufgabe 12 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $(-1 + i)^6 =$

$$8i.$$

(b) Bestimmen Sie $\left(3 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + 3i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)^6 =$

$$729.$$

(c) Es sei $z = \frac{3 \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + 3i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{-1 + i}$.

(i) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z .

$$|z| = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{19}{12}\pi.$$

(ii) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^6 .

$$\operatorname{Re}(z^6) = 0, \quad \operatorname{Im}(z^6) = -\frac{729}{8}.$$