

Präsenzübungen

Aufgabe P 1. Elementares Rechnen ohne Taschenrechner

- (a) Berechnen Sie $\frac{5 \cdot \frac{4}{5}}{4}$, $\frac{10}{\frac{2}{10}}$, $\frac{1}{6} + \frac{13}{9}$ und $\frac{1}{2} + \frac{2+7}{7}$.
- (b) Berechnen Sie $\binom{4}{k}$ für alle $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Bestimmen Sie $\binom{5}{3}$ und $\binom{5}{2}$.
Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\binom{n}{1}$ und $\binom{n}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Multiplizieren Sie die Klammern aus und vereinfachen Sie:

$$(\alpha + 2)(2 - \alpha), \quad (\alpha + 3)(1 - \alpha)(\alpha + 2), \quad \frac{\alpha(\alpha + 1)^2 + \alpha^2 + 2\alpha + 1}{(\alpha + 1)^3}.$$

Aufgabe P 2. Binomischer Lehrsatz und Nullstellen

Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind durch

$$f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sqrt{(x-5)(x+5) + 3^2 + 4^2}.$$

Aufgabe P 3. Vollständige Induktion mit Ungleichungen

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgenden Aussagen:

- (a) Es ist $n! > 2^n$ für $n \geq 4$.
- (b) Es ist $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \geq \sqrt{n}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe P 4. Summen

Welche der folgenden Ausdrücke beschreiben das Gleiche?

(a) $\sum_{k=0}^n a_{2k+1}$

(b) $\sum_{k=4}^{n+4} a_{2k-7}$

(c) $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_{2k}$

(d) $\sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(1 - (-1)^j)}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2j\pi\right) a_j$

(e) $\sum_{j=0}^{2n} \frac{a_{2n-(j-1)}}{2} + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{a_k}{2}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 1.** *Teleskopsummen*

(a) Sei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$ und $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} + \frac{2}{k} \right) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{3}{k}$.

Aufgabe H 2. *Mehr Teleskopsummen*

Verwenden Sie zum Lösen dieser Aufgabe die Aussage aus Aufgabe H 1 (a).

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(1-q) \sum_{k=1}^n q^k = q - q^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Berechnen Sie damit $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2} \right)^k$.

(b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe H 3. *Vollständige Induktion mit Teilbarkeit*

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$ ohne Rest durch 7 teilbar; das heißt es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})} = 7k$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $1 + a^2 + a^4 = (1 + a^2 + a)(1 + a^2 - a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H 4. *Vollständige Induktion mit Produkt*

Analog zur Summenschreibweise, führen wir das Produktsymbol ein: $\prod_{j=1}^m A_j$ bedeutet, dass man den Term A_j für alle j von 1 bis m auswertet und die entstandenen Zahlen zusammenmultipliziert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Sei $a_k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $0 < a_k < 1$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\prod_{k=1}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 12.11. – 18.11.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie * und /, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie Ihr **Passwort** für die Onlineübungen eintragen, das Sie per Email an Ihre studentische Adresse (`<st*****@stud.uni-stuttgart.de>`) erhalten haben.

Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 5. Ungleichungen

Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(x + y + z)^3 \geq 27xyz.$$

Hinweis: Geometrisches Mittel.

Aufgabe P 6. Beträge, Ungleichungen

- (a) Bestimmen Sie die Mengen $\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| = |x - 4|\}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq |x - 4|\}$.
(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Aufgabe P 7. Mengen

- (a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3^2\}, \\ M_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq \tfrac{2}{3}x\}, \\ M(a, b) &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq (\tfrac{1}{2})^2\} \text{ für } a = 1 \text{ und } b = 2. \end{aligned}$$

- (b) Skizzieren Sie $M_1 \cap M_2$ und $(M_1 \setminus (M_2 \cup M(1, 2))) \cup (M(3, 0) \cup M(5, 0))$.

Aufgabe P 8. Rechnen mit komplexen Zahlen, Mengen in $\mathbb{C}$

- (a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(i) $\frac{4 + 3i}{2 - i}$

(ii) $\operatorname{Im}\left(\frac{7 + i}{6 - 2i}\right) + \operatorname{Re}(\overline{3 + 2i})$.

- (b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar.

(i) $1 + \sqrt{3}i$

(ii) $(1 + \sqrt{3}i)^2$

(iii) $\overline{1 + \sqrt{3}i}$

- (c) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(i) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - 3i| \leq 2\}$

(ii) $B = \{(1 + \sqrt{3}i)^k \mid k \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}\}$

(iii) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| + 2|\operatorname{Im}(z)| \leq 2\}$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 5.** *Polynome*

- (a) Berechnen Sie $(2X+1)^3$, $(X-3)^4$ und $(X-1)^5$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.
 (b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $(16 - 32X + 24X^2 - 8X^3 + X^4)(X^2 + 1)$.
 (c) Zeigen Sie, dass alle reellen Nullstellen von $X^9 + 10X^5 + 17X^2 + 2$ negativ sind.
 (d) Zeigen Sie, dass $2X^{2020} + 5X^2 - 10X + 11$ keine reellen Nullstellen besitzt.

Aufgabe H 6. *Ungleichungen, Beträge*

- (a) Bestimmen Sie jeweils die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung erfüllen.
 (i) $2|x - 1| < x^2 - 1$ (ii) $3|x^2 - 3| < x|x + \sqrt{3}|$
 (b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und bezeichne $\max\{x, y\}$ das Maximum der Zahlen x und y . Analog bezeichne $\min\{x, y\}$ das Minimum der Zahlen x und y . Zeigen Sie:

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{und} \quad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Aufgabe H 7. *Abbildungen*

- (a) Konstruieren Sie eine Abbildung $f_1: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.
 (b) Konstruieren Sie eine Abbildung $f_2: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.
 Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
 (c) $h: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{\bar{z}}{\bar{z}+i}$
 (d) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0: k \mapsto 2|k| - \max\{0, \min\{1, k\}\}$

Aufgabe H 8. *Mengen*

Gegeben seien die Mengen

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 2\}, \quad M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| \leq 1\}$$

und

$$M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \cos(\pi x)\}.$$

Skizzieren Sie Mengen M_1 , M_2 , $M_1 \setminus M_2$ und $(\mathbb{R}^2 \setminus M_3) \cap M_1$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 19.11. – 25.11.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Bitte geben Sie dort zunächst Ihre Matrikelnummer ein.

Die Lösungen sind als ganze Zahlen oder als Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt einzugeben. Sonstige Zeichen, wie zum Beispiel Klammern oder Operatoren wie $*$ und $/$, dürfen **nicht** benutzt werden.

Anschließend müssen Sie das per Email erhaltene **Passwort** für die Onlineübungen eintragen. Innerhalb des Bearbeitungszeitraums können Sie Ihre Eingaben beliebig oft wiederholen, wobei die **letzten** Eingaben gewertet werden. Der Bearbeitungszeitraum endet mittwochs um 24:00 Uhr. Sie erhalten für die Bearbeitung der Online-Aufgabe 0, 1, oder 2 Punkte.

Präsenzübungen

Aufgabe P 9. Untervektorräume

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind.

- (a) Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3y - z = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
- (b) Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3y - z \leq 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
- (c) Die Kreislinie $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
- (d) Die Menge $\left\{ \sum_{j=1}^2 \alpha_j v_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ mit $v_1 = (1, 2, -1)$ und $v_2 = (1, 0, -7)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe P 10. Skalarprodukt

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und $x, y \in V$.

- (a) Berechnen Sie $\langle x + 2y | 2x + y \rangle$, falls $\langle x | x \rangle = 1$, $\langle x | y \rangle = 2$ und $\langle y | y \rangle = 3$ gelten.
- (b) Berechnen Sie $|x + y|^2$, falls $4\langle x | y \rangle = 1$ und $|x - y|^2 = 1$ gelten.
- (c) Berechnen Sie $\langle x | y \rangle$, falls $|x + y|^2 = 4$ und $|x - y|^2 = 1$ gelten.

Aufgabe P 11. Geraden und Ebenen

Gegeben sind die Punkte $P = (0, 2, 5)$, $Q = (3, 5, 6)$ und $R = (-1, 0, 0)$, sowie die Vektoren $v = (1, 0, 0)$ und $w = (-6, -6, -2)$ in $\mathbb{R}^3$.

- (a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g , die durch P und Q geht.
- (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E , die durch P , Q und R geht.
- (c) Welche der folgenden Geraden sind parallel zu g ? Welche stimmen mit g überein?
Welche der folgenden Geraden sind parallel zu E ?

$$h_1 := \{Q + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad h_2 := R + \mathbb{R}w.$$

Aufgabe P 12. Lineare Unabhängigkeit und Basen

Gegeben seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Entscheiden Sie:

- (a) Sind v_1, v_2 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?
- (b) Sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig? Bilden diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^4$?
- (c) Sind $v_1, -v_1$ linear unabhängig?
- (d) Bilden die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4, v_4 + v_1$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$?

Grundsätzlich sind alle verlangten Rechnungen, Entscheidungen etc. zu begründen (auch wenn dies im Aufgabentext nicht explizit verlangt wird).

Dies gilt für alle Veranstaltungen zur HM 1/2.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 9.** *Untervektorräume*

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums V und sei $f : V \rightarrow V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ für alle $x, y \in V$ und alle $a, b \in \mathbb{K}$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von V Untervektorräume sind:

- (a) $U_1 \cap U_2 = \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$
- (b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$
- (c) $\{f(x) \mid x \in V\}$
- (d) $\{x \in V \mid f(x) = 0\}$

Aufgabe H 10. *Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum*

Wir definieren die Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle x | y \rangle := \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \cdot y_k$ analog zu dem Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zeigen Sie, dass diese Abbildung für alle $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ und alle $s \in \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (a) $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$
- (b) $\langle x | x \rangle \geq 0$ und $\langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0$
- (c) $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$
- (d) $\langle x | sy \rangle = s \langle x | y \rangle$ und $\langle sx | y \rangle = \overline{s} \langle x | y \rangle$.

Aufgabe H 11. *Lineare Unabhängigkeit und Basen*

Gegeben seien für $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^5$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 6 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie $w \in \mathbb{R}^5$ so, dass v_1, v_2, v_3, v_4, w eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist.
- (b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Basen von $L(v_2 + v_3, v_1 + 2v_4)$.
- (c) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_3, v_4, v_5 linear unabhängig sind.
- (d) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass v_1, v_2, v_5 linear abhängig sind.

Aufgabe H 12. *Links- und Rechtsinverse*

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ heißt *Links-* bzw. *Rechtsinverse* von f , wenn $g \circ f = \text{id}_A$ bzw. $f \circ g = \text{id}_B$ gilt. Zeigen Sie:

- (a) Wenn f eine Linksinverse besitzt, dann ist f injektiv,
- (b) Wenn f eine Rechtsinverse besitzt, dann ist f surjektiv.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen eine Links- und/oder Rechtsinverse besitzen

- (c) $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
- (d) $k : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 26.11.–2.12.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 13. Vektorprodukt

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, -4, 3)$, $C = (6, -3, -2)$ und $D = (5, 2, -6)$.

- (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt und alle Innenwinkel des Parallelogramms $ABCD$.
- (b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 12 \end{pmatrix}^T$ orthogonal auf den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ und $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}^T$ steht.

Aufgabe P 14. Vektorraum der Polynome

Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Vektorraum $\text{Pol}_k \mathbb{R} := \left\{ \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen Polynome vom Grad höchstens k .

- (a) Seien $p(X) := X^3 + 2X^2 - 3$ und $q(X) := 4X - 2$ in $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$. Gegeben sei die Basis $A: 1, X, X^2, X^3 + X^2$ von $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$. Bestimmen Sie ${}_A p$, ${}_A 0$ und ${}_A (2p - q^2)$.
- (b) Ist $B: X^3 + X^2 + X + 1, X^3 + X^2 + X, X^2 + X + 1, X^2 + X$ eine Basis von $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$?
- (c) Ist $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$?

Aufgabe P 15. Rechnen mit Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB , $(C+D)A$, CD , DC , D^2 , $D^T D$, DD^T , $C^2 - D^2$ und $(C+D)(C-D)$.

Aufgabe P 16. In Blöcke partitionierte Matrizen

Für Matrizen $B = (b_{j,\ell})_{1 \leq j \leq z, 1 \leq \ell \leq s} \in \mathbb{K}^{z \times s}$, $C = (c_{j,\ell})_{1 \leq j \leq z, 1 \leq \ell \leq t} \in \mathbb{K}^{z \times t}$ und $U = (u_{j,\ell})_{1 \leq j \leq s, 1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{K}^{s \times n}$, $V = (v_{j,\ell})_{1 \leq j \leq t, 1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{K}^{t \times n}$ definieren wir die Matrizen

$$(B \mid C) := (p_{j,\ell})_{1 \leq j \leq z, 1 \leq \ell \leq (s+t)} \in \mathbb{K}^{z \times (s+t)} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} := (q_{j,\ell})_{1 \leq j \leq (s+t), 1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{K}^{(s+t) \times n}$$

durch

$$p_{j,\ell} := \begin{cases} b_{j,\ell} & \text{falls } \ell \leq s \\ c_{j,\ell-s} & \text{falls } \ell > s \end{cases} \quad \text{und} \quad q_{j,\ell} := \begin{cases} u_{j,\ell} & \text{falls } j \leq s \\ v_{j-s,\ell} & \text{falls } j > s. \end{cases}$$

Analog definiert man $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$ für Matrizen K, L, M und N von passender Größe.

- (a) Seien zusätzlich $A \in \mathbb{K}^{r \times z}$ und $T \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

$$A(B \mid C) = (AB \mid AC), \quad \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} UT \\ VT \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (B \mid C) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = BU + CV.$$

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass für Matrizen von passender Größe gilt:

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KP + LR & KQ + LS \\ MP + NR & MQ + NS \end{pmatrix}.$$

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 13.** Skalarprodukt und Vektorprodukt

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

- (a) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x \times y) \times z = \langle x | z \rangle y - \langle y | z \rangle x$.
- (b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x \times y | z \rangle = \langle y \times z | x \rangle = \langle z \times x | y \rangle$.
- (c) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$.
- (d) Für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle x \times y | u \times v \rangle = \langle x | u \rangle \langle y | v \rangle - \langle x | v \rangle \langle y | u \rangle$.

Aufgabe H 14. Ebene, Hessesche Normalform, Flächenberechnung

Gegeben seien $A = (1, 1, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$, $B = (0, -1, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$ und die Ebene E , die den Ursprung, sowie A und B enthält. Es sei g die Gerade durch den Ursprung, die senkrecht zur Ebene E verläuft.

- (a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E .
- (b) Bestimmen Sie einen Punkt $C = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $c_1 > 0$ auf der Geraden g so, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C den Flächeninhalt $\sqrt{\frac{63}{2}}$ hat.
- (c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene H , die A, B und $D = (4, -2, -2)^\top$ enthält.
- (d) Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen E und H .

Aufgabe H 15. Untere Dreiecksmatrizen

Eine Matrix $A = (a_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls $a_{j\ell} = 0$ gilt für alle $j, \ell \in \{1, \dots, n\}$ mit $j < \ell$.

- (a) Seien $A = (a_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n}$, $B = (b_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n}$ untere Dreiecksmatrizen und $\alpha \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann αA , $A + B$ und AB ebenfalls untere Dreiecksmatrizen sind.
- (b) Sei $A = (a_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n}$ mit $A = A^\top$ gegeben. Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix $B = (b_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n}$, für welche $A = B + B^\top$ gilt.

Aufgabe H 16. Unipotente untere Dreiecksmatrizen und lineare Gleichungssysteme

Sei $\mathcal{UD}^n$ die Menge aller unterer Dreiecksmatrizen $A = (a_{j\ell})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq \ell \leq n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $a_{jj} = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b \right\} = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = b_1 \text{ und } x_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \text{ für alle } 2 \leq k \leq n \right\}$$

für alle $A \in \mathcal{UD}^n$ und $b \in \mathbb{K}^n$ gilt.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 03.12. – 10.12.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 17. Lineares Gleichungssystem

Sei U der Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

$$4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

- (a) Welche der Mengen $M_1 := (1, -1, 1, 0) + \mathbb{R}(2, 0, 0, 0)$, $M_2 := \mathbb{R}(2, 1, 6, 7)$, $M_3 := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$, $M_4 := \mathbb{R}(1, 2, 6, 8)$ liegen in U ?
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von U .

Aufgabe P 18. Gauß-Algorithmus

Gegeben ist das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ mit

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem im Fall $\alpha = -2$ mit dem Gauß-Algorithmus.
- (b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das obige Gleichungssystem keine Lösung?

Aufgabe P 19. Linearität, Matrixbeschreibung

Entscheiden Sie, ob φ eine lineare Abbildung ist und geben Sie in diesem Fall eine beschreibende Matrix von φ bezüglich der Standardbasis an.

- (a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + y \\ y \end{pmatrix}$
- (b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ 3y \end{pmatrix}$
- (c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe P 20. Matrixbeschreibung

Es sei $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome bis maximal Grad 3 und $\text{Pol}_2 \mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Polynome bis maximal Grad 2. Es sei $\alpha: \text{Pol}_3 \mathbb{R} \rightarrow \text{Pol}_2 \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit

$$\alpha(X^3) = X^2 + 1, \quad \alpha(X^2) = 2X, \quad \alpha(X) = 1, \quad \alpha(1) = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie die Koordinatentupel ${}_C(\alpha(b_1))$, ${}_C(\alpha(b_2))$, ${}_C(\alpha(b_3))$, ${}_C(\alpha(b_4))$ und dann die Matrixbeschreibung von α bezüglich der Basen $B: b_1 = X^3$, $b_2 = X^2$, $b_3 = X$, $b_4 = 1$ und $C: c_1 = X^2$, $c_2 = X$, $c_3 = 1$.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern}(\alpha)$. Ist α injektiv?
- (c) Welche Dimension hat $\text{Bild}(\alpha)$?

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 17.** *Lineares Gleichungssystem*

$$\text{Gegeben sei } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 60 \\ -4x_1 - 7x_2 + 19x_3 - 22x_4 - 62x_5 = -304 \\ -2x_1 + 2x_3 - 4x_4 - 10x_5 = -56 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 28 \\ 2x_1 + 6x_2 - 19x_3 + 16x_4 + 46x_5 = 204 \end{cases}$$

Erstellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix und lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Gibt es eine Lösung des Gleichungssystems, in der alle Variablen den gleichen Wert (d.h. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$) annehmen?

Aufgabe H 18. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Komposition*

Gegeben seien die linearen Abbildungen $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x \ y)^T \mapsto (x + 3y \ y \ -2x)^T$, $\text{id}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto x$ und $\text{id}_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto x$. Wir benutzen die Standardbasis E_2 und eine weitere Basis $B: b_1 := (2 \ 1)^T$, $b_2 := (1 \ -2)^T$ von $\mathbb{R}^2$, sowie die Standardbasis E_3 und eine weitere Basis $C: c_1 := (1 \ 1 \ 0)^T$, $c_2 := (0 \ -1 \ 1)^T$, $c_3 := (0 \ 0 \ 2)^T$ von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie ${}_{E_3}\alpha_{{}_{E_2}}$, ${}_{E_2}(\text{id}_2)_B$, ${}_{E_3}(\text{id}_3)_C$, ${}_C(\text{id}_3)_{{}_{E_3}}$ und ${}_C\alpha_B$.

Aufgabe H 19. *Lineare Abbildung, beschreibende Matrix, Bild, Kern*

Wir betrachten den reellen Vektorraum $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a + d = 0 \right\}$. Die Basis $B: B_1, B_2, B_3$ von V ist gegeben durch die Matrizen $B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir verwenden $S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in V$ zur Definition der Abbildung $\varphi: V \rightarrow V: A \mapsto SA - AS$.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist und bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ sowie eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$.

Hinweis: $\text{Bild}(\varphi) = \{A \in V \mid {}_B A \in \text{Bild}(\alpha)\}$, $\text{Kern}(\varphi) = \{A \in V \mid {}_B A \in \text{Kern}(\alpha)\}$ mit $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: v \mapsto {}_B\varphi_B \cdot v$.

Aufgabe H 20. *Gauß-Algorithmus*

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -8 & 3 & 7 \\ 6 & -4 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^4$ des reellen Gleichungssystems $Ax = b$, für $b \in B$, mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 11.12. – 18.12.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 21. Rang, Dimension

Gegeben sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .
- (b) Bestimmen Sie $\dim \text{Kern}(\varphi)$ und $\dim \text{Bild}(\varphi)$ für die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4: v \mapsto A^T v$.

Aufgabe P 22. Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3+i & 1-i \\ 5i & 2+i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie $\det(A^2)$, $\det(B^T)$ und $\det(C^T C)$. Welche dieser Matrizen sind regulär?

Aufgabe P 23. Rechenregeln für Determinanten

Gegeben sei eine invertierbare Matrix $A = (a_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Sei $a_k := (a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{n,k})^T$ die k -te Spalte von A . Für $b \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die durch $A_j = (a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)$ gegebene Matrix $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass für jedes j der Eintrag $\tilde{x}_j$ der eindeutigen Lösung $\tilde{x} = A^{-1}b$ von $Ax = b$ die Gleichung $\tilde{x}_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ erfüllt.

- (b) Gegeben seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit (a) die Lösungen $x = A^{-1}b_1$ und $\tilde{x} = A^{-1}b_2$.

Aufgabe P 24. Basiswechselmatrizen

Gegeben sei die Basis $B: b_1 = (2, 0, 2)^T, b_2 = (1, -1, 0)^T, b_3 = (0, 1, 2)^T$ des $\mathbb{R}^3$.

- (a) Bestimmen Sie für die Standardbasis E die Basiswechselmatrizen ${}_B \text{id}_E$ und ${}_E \text{id}_B$.
- (b) Die Vektoren v und w seien gegeben durch ihre Koordinaten ${}_E v = (2, 1, 2)^T$ und ${}_B w = (42, 0, 1)^T$. Bestimmen Sie ${}_B v$ und ${}_E w$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 21.** Regularität von Bandmatrizen

Gegeben sei die folgende Matrix $A_r \in \mathbb{R}^{39 \times 39}$:

$$A_r := \begin{pmatrix} 2 + 4! + r^2 & 2r & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2^5 & 2 + 5! + r^2 & -2r & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^6 & 2 + 6! + r^2 & 2r & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2^{40} & 2 + 40! + r^2 & 2r & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2^{41} & 2 + 41! + r^2 & -2r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{42} & 2 + 42! + r^2 \end{pmatrix}.$$

Gibt es Werte $r \in \mathbb{R}$, für welche diese Matrix A_r vollen Rang hat? Wenn ja, welche?

Hinweis: Zeigen Sie, falls nötig, zuerst $|(A_r x)_j| \geq |a_{j,j}x_j| - \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{j,k}x_k \right|$ für geeignete $1 \leq j \leq 39$. (Veranschaulichen Sie sich gegebenenfalls die Situation mit expliziten Werten für x , beispielsweise für die Teilmatrix, welche aus den ersten 7 Zeilen und Spalten besteht.) Sie dürfen auch vergangene Präsenz- und Hausaufgaben verwenden!

Aufgabe H 22. Regularität und Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Gegeben seien

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ \alpha & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & 0 & -32 & \alpha + 2 \end{pmatrix}, \quad b_\beta := \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

- Bestimmen Sie $\det(A_\alpha)$. Für welche α ist A_α regulär?
- Wann ist das LGS $A_\alpha x = b_\beta$ lösbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die (affine) Dimension $D_{\alpha,\beta}$ des affinen Unterraums $\mathcal{L}_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid A_\alpha x = b_\beta\}$.

Aufgabe H 23. Lineare Abbildungen und Bijektivität

Gegeben sei der Raum $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$ mit der (Monom-)Basis $M: 1, X, X^2, X^3$. Abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Abbildung

$$F^\alpha: \text{Pol}_3 \mathbb{R} \rightarrow \text{Pol}_3 \mathbb{R}: p \mapsto p - \alpha p' - \alpha X^2 \cdot p'' + \frac{1}{6}(1 + \alpha) X^3 \cdot p'''.$$

- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_M(F^\alpha)_M$.
- Bestimmen Sie $\det {}_M(F^\alpha)_M$ und geben Sie an, für welche α die Abbildung F^α bijektiv ist.
- Für welche $\alpha \in [-2, 2]$ hat die Differentialgleichung

$$F^\alpha(p) = -X^2 - 2X + 2$$

eine polynomiale Lösung (also eine Lösung in $\text{Pol}_3 \mathbb{R}$) ?
Für welche α ist diese eindeutig?

Aufgabe H 24. Orthonormalbasen & Basiswechsel

Gegeben sei die Basis $B : b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$.

- (a) Bestimmen Sie eine ONB $F : f_1, f_2, f_3, f_4$ des $\mathbb{R}^4$, sodass $L(b_1) = L(f_1)$, $L(b_1, b_2) = L(f_1, f_2)$, $L(b_1, b_2, b_3) = L(f_1, f_2, f_3)$ und $L(b_1, b_2, b_3, b_4) = L(f_1, f_2, f_3, f_4)$ gelten.
- (b) Sei E wie gehabt die Standardbasis. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E \text{id}_B$, ${}_B \text{id}_E$, ${}_F \text{id}_E$ und berechnen Sie ${}_F \text{id}_B$.
- (c) Geben Sie ferner die Cofaktor-Matrizen von ${}_F \text{id}_E$ und ${}_E \text{id}_B$ an.

Aufgabe H 25. Drehungen in $\mathbb{R}^2$

Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

- (a) Zeigen Sie die Zusatzbemerkung in Satz 4.6.12 (1), in dem Sie für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ den **orientierten** (das heißt in mathematisch positiver Richtung gemessenen) Winkel $\beta(v) \in [0, 2\pi)$ zwischen v und $A_\alpha v$ ausgehend von v bestimmen.
Hinweis: Für $v \neq 0$ ist die ONB $B : \frac{1}{|v|}v, \frac{1}{|v|}A_{\pi/2}v$ ein Rechtssystem.
- (b) Nutzen Sie für $w \in \mathbb{C}$ die kartesischen Koordinaten $(\text{Re}(w), \text{Im}(w))$, um für festes $z := a + bi \neq 0$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : w \mapsto zw$ in diesen kartesischen Koordinaten anzugeben. Kombinieren Sie diese Darstellung mit der Polarkoordinatenform und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe H 26. 3D-Modell

Sie finden das Modell unter:

<https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/3D/11/Ebenen.shtml>

Dargestellt sind die Ebenen

$$\begin{array}{llll} 2x + 3y - 6z = 7 & \text{rot} & x - y - 2z = 0 & \text{gelb} \\ 20x - 5y - 4z = 21 & \text{grün} & x - y + z = 0 & \text{blau} \\ & & x - y - (8 + 3\sqrt{6})z = 0 & \text{hellblau.} \end{array}$$

Ferner sei die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die Matrixbeschreibung ${}_E \alpha_E$ an.
- (b) Zeigen Sie: Die Punkte $P = (2 \ 1 \ 0)^T$, $Q = (-7 \ -7 \ -7)^T$, $R = (2 \ -1 \ -1)^T$ liegen in der roten Ebene. Bestimmen Sie die Ebene, in der ihre Bilder unter α liegen.
- (c) Berechnen Sie die Determinante von ${}_E \alpha_E$. Entscheiden Sie: Beschreibt ${}_E \alpha_E$ eine Drehung oder eine Drehspiegelung? Berechnen Sie ferner die Fixpunktmenge von α .

Aufgabe H 27. Skalarprodukte und Isometrien für Matrizenräume

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Drücken Sie die Bildungsvorschrift der Abbildung

$$F: \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}: (A, B) \mapsto F(A, B) := \operatorname{Sp}(A^T B)$$

mittels der Matrizeneinträge aus und folgern Sie, dass F ein Skalarprodukt für Matrizen definiert.

(b) Geben Sie einen isometrischen Isomorphismus $\alpha: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ an, das heißt eine Abbildung, die Folgendes erfüllt:

- **Isomorphie:** α ist linear und bijektiv
- **Isometrie:** Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt $\|A - B\| = |\alpha(A) - \alpha(B)|$, wobei $\|A\| := \sqrt{F(A, A)}$ die durch das Skalarprodukt aus (a) gegebene (Matrix-)Norm bezeichnet.

(c) Gewinnen Sie aus der Basis $C: c_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis des Untervektorraumes $S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T = A\}$.

Aufgabe H 28. Koordinatentransformation

Gegeben seien

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+2i \\ 2+2i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2+i \\ -\gamma \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \cdot \gamma \\ -1-i \\ -2i \end{pmatrix} \right) \text{ und } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1+i \\ i & 2-i & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Für welche $\gamma \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{F}$ ein affines Koordinatensystem?

(b) Sei $\mathbb{E} := ((0, 0, 0)^T; (1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T)$ das Standard-Koordinatensystem sowie $\gamma := 1 + 2i$. Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{F}}, {}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$ sowie die Darstellungsmatrix A' und die Verschiebung t' für die Beschreibung der affinen Abbildung $\varphi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3: v \mapsto Av$ bezüglich $\mathbb{F}$.

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 18.12. – 13.1.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>

**Aufgabe W 1.** (Nicht gewertet!)

Backen Sie Plätzchen für Ihre Großmutter.

In diesem Sinne:

Frohe Festtage und einen erfolgreichen Start ins neue Jahr!

Präsenzübungen

Aufgabe P 25.

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 4i & 5 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Determinante $\det(X)$ und die Spur $\text{Sp}(X)$ für jede Matrix $X \in \{A, B, C, D, E\}$.
- (b) Bestimmen Sie für jede Matrix $X \in \{A, B, C, D, E\}$ die Eigenwerte von X .
- (c) Falls es zueinander konjugierte Matrizen X, Y in $\{A, B, C, D, E\}$ gibt: Bestimmen Sie jeweils eine reguläre Matrix T so, dass $T^{-1}XT = Y$.
- (d) Welche dieser Matrizen in $\{A, B, C, D, E\}$ sind diagonalisierbar?

Aufgabe P 26.

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -i & 0 \\ i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B .
- (b) Geben Sie die algebraischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte an.

Aufgabe P 27.

Bestimmen Sie für

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

alle Eigenwerte mit den zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Wenn möglich, bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe P 28.

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A .
- (b) Bestimmen Sie Basen für den Kern und das Bild der Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4: v \mapsto Av$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 29.** *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Gegeben seien die Basis $B : b_1 = (1, 0, 0, 0)^\top$, $b_2 = (-1, 1, 0, 0)^\top$, $b_3 = (1, -2, 1, 0)^\top$, $b_4 = (-1, 3, -3, 1)^\top$ sowie eine lineare Abbildung $D : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

die beschrieben wird durch die Darstellungsmatrix ${}_B D_B := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von ${}_B D_B$.
 (b) Finden Sie eine Basis $C : c_1, c_2, c_3, c_4$ von $\mathbb{R}^4$, die möglichst viele dieser Eigenvektoren enthält, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_C D_C$.

Aufgabe H 30. *Begleitmatrizen*

Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome sowie die Eigenwerte von

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H 31. *Rekursive Folgen*

Wir definieren die Zahlenfolge $(a_n)_n$ durch die Startwerte $a_0 := 1$, $a_1 := 1$ und dann rekursiv durch $a_n := 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geq 2$.

- (a) Begründen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für quadratische $n \times n$ -Matrizen setzt man $A^0 = E_n$.

- (b) Finden Sie eine Basis f_1, f_2 von $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A .
 (c) Bilden Sie die Matrix F mit Spalten f_1 und f_2 , und berechnen Sie $F^{-1}AF$.

Zusatz: Können Sie mit (a) und (b) eine explizite Darstellung für a_n herleiten, welche ohne Rückgriff auf die vorherigen Folgenglieder auskommt?

Aufgabe H 32. *Eigenwerte einer tridiagonalen Töplitz-Matrix*

$$\text{Seien } \mathcal{T} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_k := 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot k\right), \quad v_k := \begin{pmatrix} \sin(\pi k/6) \\ \sin(\pi k/3) \\ \sin(\pi k/2) \\ \sin(2\pi k/3) \\ \sin(5\pi k/6) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie für $1 \leq k \leq 5$, dass v_k ein Eigenvektor von $\mathcal{T}$ zum Eigenwert λ_k ist.

Hinweis: Es gilt $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

- (b) Sind diese Eigenvektoren paarweise orthogonal zueinander?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 14.1. – 20.1.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 29.

Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte und entscheiden Sie, ob die zugehörige quadratische Form positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.
- (b) Bestimmen Sie außerdem orthogonale Basiswechselmatrizen, durch die die jeweilige Matrix in Diagonalgestalt transformiert wird.

Aufgabe P 30.

Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 2 & 1+i \\ 1 & 1-i & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und B .
- (b) Bestimmen Sie eine ONB V von $\mathbb{R}^4$ bestehend aus Eigenvektoren von B und geben Sie ${}_V \text{id}_E$ und ${}_E \text{id}_V$ an.
- (c) Nutzen Sie (b), um B zu invertieren.

Aufgabe P 31.

Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto q(x) := x_1^2 - 8x_2x_3 - x_4^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 8x_1x_2 + x_3^2.$$

Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $q(x) = x^T A x$. Entscheiden Sie, ob q positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

Aufgabe P 32.

Gegeben ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, die die paarweise unterschiedlichen Eigenwerte a_1, a_2, a_3 mit jeweils zugehörigen Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 hat.

- (a) Zeigen Sie: A ist genau dann regulär, wenn alle Eigenwerte von A ungleich 0 sind.
- (b) Ist jeder Eigenvektor von A auch Eigenvektor von A^2 ?
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A^2 sowie das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_{A^2}(\lambda)$ in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 .
- (d) Falls A regulär ist, bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A^{-1} sowie das zugehörige charakteristische Polynom $\chi_{A^{-1}}(\lambda)$ in Abhängigkeit von a_1, a_2, a_3 .

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 33.**

Seien $B := \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

- Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenräume von B und C .
- Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar? Welche sind orthogonal diagonalisierbar?
- Bestimmen Sie, wenn möglich, für $X \in \{B, C\}$ jeweils eine reguläre Matrix S und eine Diagonalmatrix D so, dass $S^{-1}XS = D$ gilt. (Ist X orthogonal diagonalisierbar, soll S eine orthogonale Matrix sein.)

Aufgabe H 34.

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix mit Eigenwerten 1 und -1 und Eigenräumen $V(1) = L\left((1, 0, 0, 1)^T, (1, 2, 2, 1)^T\right)$ und $V(-1) = L\left((1, 0, 0, -1)^T, (2, 1, -1, -2)^T\right)$.

- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .
- Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $D = S^T A S$.
- Bestimmen Sie A und A^3 .

Aufgabe H 35.

- Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Diagonalisieren Sie $A^T A$ orthogonal.

Wählen Sie dabei die Eigenwerte in absteigender Reihenfolge (also $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$).

- Sei $\tilde{V} : v_1, v_2, v_3$ die in (a) bestimmte ONB aus Eigenvektoren.

Wir definieren für $j = 1, 2$ die Werte $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ und die Vektoren $u_j := \frac{1}{\sigma_j} A v_j$.

Weisen Sie nach, dass $\tilde{U} : u_1, u_2$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$ ist.

- Jetzt definieren wir (spaltenweise) die Matrizen $U := (u_1, u_2)$, $V := (v_1, v_2, v_3)$,

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^\dagger := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \end{pmatrix}^T \quad \text{und} \quad A^\dagger := V \Sigma^\dagger U^T.$$

Wir betrachten die (bezüglich Standardkoordinaten gegebenen) linearen Abbildungen

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto Ax, \quad \beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: y \mapsto A^\dagger y.$$

Bestimmen Sie $U \Sigma V^T$ sowie die Darstellungsmatrizen ${}_{\tilde{U}}\alpha_{{}_{\tilde{V}}}$ und ${}_{\tilde{V}}\beta_{{}_{\tilde{U}}}$.

Aufgabe H 36. Quadrik

Gegeben seien $p_1 = (1, -1)^T$, $p_2 = (1, 0)^T$, $p_3 = (1, 1)^T$, $p_4 = (0, 1)^T$ sowie $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T$. Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A und einen Skalar c so, dass die Abbildung $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^T A x + 2a^T x + c$ die Bedingungen $q(p_1) = 3$, $q(p_2) = -1$, $q(p_3) = -2$ und $q(p_4) = 1$ erfüllt. Sind A und c dadurch eindeutig festgelegt?

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 21.1. – 27.1.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 33. *ebene Schnitte einer Quadrik*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Außerdem ist die Ebene E_α gegeben:

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \alpha x_3 = 1\}.$$

- (a) Welche Gestalt hat (in Abhängigkeit von α) die Quadrik Q_α , die als Schnitt von Q mit der Ebene E_α entsteht?
- (b) Zeichnen Sie für $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ jeweils die Quadrik Q_α in einem (nicht notwendig kartesischen) Koordinatensystem.

Aufgabe P 34. *Hauptachsentransformation einer ebenen Quadrik*

In $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardkoordinatensystems $\mathbb{E}$ die folgende Quadrik gegeben:

$$Q := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1 + 6 = 0\right\}.$$

- (a) Geben Sie die Matrixbeschreibung für Q an.
- (b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q .
- (c) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{H}$ an, in welchem diese euklidische Normalform angenommen wird.
- (d) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{H}}$ und ${}_{\mathbb{H}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe P 35. *Grobeinteilung*

Ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3 + 4 = 0\}.$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Aufgabe P 36. *Transformation einer Quadrik*

Wir betrachten die Quadrik $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 + 4x_3 = 0\}$ und das kartesische Koordinatensystem

$$\mathbb{F} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Geben Sie eine Gleichung an, die Q bezüglich $\mathbb{F}$ beschreibt.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 37.** *Grobeinteilung von Quadriken*

Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + cx_2^2 + x_3^2 + 4cx_2x_3 + 2c(c-1)x_2 + c(c-1) = 0\}$$

eine kegelige Quadrik, eine Mittelpunktsquadrik oder eine parabolische Quadrik?

Aufgabe H 38. *Ebene Schnitte einer Quadrik im Raum*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4 = 0\}.$$

- (a) Welche Schnittlinien entstehen als Schnitt von Q mit der Ebene $x_3 = d$ in Abhängigkeit von d ?
- (b) Zeichnen Sie für $d = \{0, 1, 2\}$ diese Schnittlinien jeweils in ein Koordinatensystem auf die Ebene $x_3 = d$.
- (c) Welche Gestalt hat die Quadrik Q ?

Aufgabe H 39. *euklidische Normalform*

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}x_3 + 1 = 0\}.$$

- (a) Geben Sie die Matrixbeschreibung dieser Quadrikgleichung an.
- (b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q .

Aufgabe H 40.

Die Quadrik Q sei gegeben durch

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3 = 0\}.$$

- (a) Geben Sie die Matrixbeschreibung an.
- (b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt von Q .
- (c) Welche der folgenden Konfigurationen können als Schnitt von Q mit einer Ebene entstehen? (Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine solche Ebene.)

- eine Ellipse
- eine Hyperbel
- eine Parabel

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 28.1. – 03.2.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test431/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 37. Monotonie und Beschränktheit

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit. Geben Sie im Falle der Beschränktheit konkrete obere und untere Schranken an.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = n + \cos(\frac{\pi}{2}n)$;

(b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{n} \cos(\pi n)$;

(c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \sin(\frac{1}{n})$;

(d) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \frac{n^3 + n^2 + n + 1}{n^3}$.

Aufgabe P 38. Häufungspunkte

Bestimmen Sie jeweils alle Häufungspunkte, sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ für jede der folgenden Folgen.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$;

(b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^n$;

(c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \begin{cases} (\frac{1}{4})^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ (1 + \frac{1}{n})^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$.

Aufgabe P 39. Konvergenz

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Geben Sie dazu jeweils für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$ gilt.

(a) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(b) $a_n = \frac{2n}{n^3 + 1}$.

Geben Sie $N(0,1)$ und $N(0,01)$ jeweils explizit an.

Aufgabe P 40. Verallgemeinerte Fibonacci-Folge

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + 6f_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass für alle $n \geq 1$ die Gleichungen

$$A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

gelten.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ Diagonalform besitzt.

Bestimmen Sie A^n für $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um eine geschlossene Formel (ohne Rekursion) für f_n anzugeben.

Zusatz: Untersuchen Sie die Folge $(1/f_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 41.** *Monotonie und Beschränktheit*

Untersuchen Sie die Folgen auf Monotonie und Beschränktheit.

Geben Sie im Falle der Beschränktheit konkrete obere und untere Schranken an.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2+n-1}{n^2}$;

(b) $(b_n)_{n \geq 2}$ mit $b_n = \frac{2^n}{n!}$;

(c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt{n^2 + 4n - 5} - n$.

Aufgabe H 42. *Rekursive Folgen*

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die folgenden Folgen beschränkt und monoton fallend sind.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$, $n \geq 1$;

(b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_1 > 1$ beliebig, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{1}{b_n})$, $n \geq 1$.

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $b_n > 1$ für alle n .

Zusatz: Was passiert bei $0 < b_1 \leq 1$?

Aufgabe H 43. *Konvergenz*

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Geben Sie dazu jeweils für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n| < \varepsilon$ für $n > N(\varepsilon)$.

(a) $a_n = \frac{1}{n!}$;

(b) $a_n = \left(\frac{-999}{1000}\right)^n$.

Geben Sie $N(0,1)$ und $N(0,01)$ explizit an.

Aufgabe H 44. *Verallgemeinerte Fibonacci-Folge*

Geben Sie eine geschlossene Formel für die folgenden Folgen an.

(a)

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } f_1 := 1, \quad f_2 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + 2f_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(b)

$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } g_1 := 1, \quad g_{n+1} := \frac{1}{1+2g_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Online-Aufgabe.

Sie finden Ihre Online-Aufgabe (Bearbeitungszeit 04.2. – 10.2.) auf folgender Webseite:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/tests/test430/>



Präsenzübungen

Aufgabe P 41. Grenzwerte

Berechnen Sie jeweils, wenn möglich, den Grenzwert der nachstehenden Folgen

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1}$;
- (b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{100n}{n^2+2} + \sqrt[2^n]{2}$;
- (c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$;
- (d) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = 2^{\sqrt{n}}$.

Aufgabe P 42. Konvergenz mit Bolzano-Weierstraß

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden Folgen konvergieren.

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;
- (b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_1 = 8$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 3$.

Aufgabe P 43. Produktfolge

Finden Sie jeweils Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen so, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und die Produktfolge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) unbeschränkt ist,
- (b) gegen einen reellen Grenzwert konvergiert,
- (c) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe P 44. Konvergenz von Reihen

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert der Reihe.

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{5^n}$,
- (b) $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{13}{9^{2j-1}}$,
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 7^n - 19 \cdot 3^n}{14 \cdot 21^n}$,
- (d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(2-e)^k}$.
- (e) $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{2j+3}$.

Hausübungen (Abgabe in der nächsten Gruppenübung):**Aufgabe H 45.** Grenzwerte

Berechnen Sie jeweils, wenn möglich, den Grenzwert der nachstehenden Folgen:

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2 \sin(n!)}}{n+1}$;

(b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{(-2)^{n+3^n}}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

(c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$;

(d) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$.

Aufgabe H 46. rekursiv definierte Folgen und Bolzano-Weierstraß

Zeigen Sie mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß, dass die folgenden (rekursiv definierten) Folgen konvergieren.

(a) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$

— also $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\dots$, $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$

(b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = b_n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$

— also $b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Aufgabe H 47. Grenzwerte mit Parameter

Für welche $s \in \mathbb{R}$ divergieren die folgenden Folgen bestimmt gegen $+\infty$?

Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Folgen?

Bestimmen Sie im Fall von Konvergenz auch den Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^4+1}{n^3-2} - \frac{sn^2}{5n+2}$;

(b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt{n^2 + n^s} - n$.

Aufgabe H 48. Konvergenz von Reihen

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert der Reihe.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(-\frac{3}{4}\right)^n$,

(c) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2)^{3j}}{3^{j+3}}$,

(b) $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2}{k^2}$,

(d) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 2^m}{3^{2m+1}}$.

Zu diesem Blatt gibt es keine Online-Aufgabe.