

Aufgabe 7

a)

$$(1) I_0 = I_{R_1} + I_L$$

$$(3) i_L = i_{R_2} + i_C$$

$$(2) U_{R_1}(t) = U_L(t) + U_{R_2}(t)$$

$$(4) U_{R_2} = U_{R_3} + U_C$$

$$U_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{d i_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_{R_1}(t) + i_L(t)$$

$$(3) \frac{U_{R_1}}{R_1} = i_{R_2} + i_C$$

$$= \frac{U_{R_1}(t)}{R_1} = \frac{U_{R_2}(t)}{R_2} + C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$$

$$(3) \frac{U_L(t) + U_{R_2}(t)}{R_1} = \frac{U_{R_3}(t) + U_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{d U_C(t)}{dt}$$

$$(4) \frac{U_L(t) + U_{R_3} + U_C(t)}{R_1} = \frac{U_{R_3} + U_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{d U_C(t)}{dt}$$

$$= \frac{1}{R_1} (U_L(t) + U_{R_3} + U_C(t)) = \frac{1}{R_2} (U_{R_3} + U_C(t)) + C \cdot \frac{d U_C(t)}{dt}$$

$$= \frac{1}{R_1} \left(L \cdot \frac{d i_L(t)}{dt} + R_3 \cdot i_C(t) + U_C(t) \right) + \frac{1}{R_2} (R_3 \cdot i_C(t) + U_C(t)) + C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$$

$$(3) \frac{L}{R_1} \cdot \left(\frac{d(i_{R_2} + i_C(t))}{dt} \right) + \frac{R_3}{R_1} \cdot C \cdot \frac{d U_C(t)}{dt} + \frac{U_C(t)}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} \cdot C \cdot \frac{d U_C(t)}{dt} + \frac{U_C(t)}{R_2} + C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$$

$$= \frac{L}{R_1} \cdot \left(\frac{U_{R_2}}{R_2} + C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} \right) \frac{d}{dt} + \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2} \cdot C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_C(t)$$

$$= \left(\frac{L}{R_1} \cdot \frac{U_{R_3} + U_C(t)}{R_2} \cdot \frac{d}{dt} \right) + \left(\frac{L}{R_1} \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} \right) + \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2} \cdot C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot U_C(t)$$

$$= \left(\frac{L \cdot R_3 \cdot i_C(t)}{R_1 \cdot R_2} \right) \frac{d}{dt} + \frac{L}{R_1} \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_1 R_2} \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} + \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2} \cdot C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U_C(t)$$

$$= \left(\frac{L \cdot (R_3 + R_2)}{R_1 \cdot R_2} \right) \cdot C \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{L + (R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2)}{R_1 \cdot R_2} \right) \cdot C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \right) U_C(t)$$

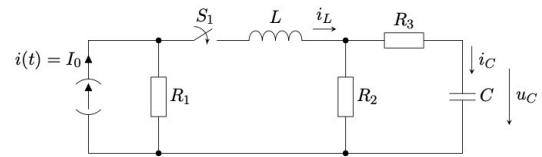


Abbildung 1: Schaltung mit Kondensator und Spule

$$b) \quad i_c(t) = i_{c,r} \quad i_{R_2} = C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_{R_2}}{R_2} \stackrel{④}{=} C \cdot \frac{du_c}{dt} + \frac{(u_{R_3} + u_c)}{R_2}$$

$$= C \frac{du_c(t)}{dt} + \left(\frac{i_c \cdot R_3 + u_c}{R_2} \right) = \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) \cdot C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R_2}$$

2/2

$$c) \quad i(t) = \alpha \left(\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\sigma \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) \right).$$

Anfangsbedingungen:

$$u_c(t=0) = 0$$

$$i_L(t=0) = 0 \rightarrow$$

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

1/2

d) Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_c(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$2(\lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_0^2) = 0$$

$$e) \quad \lambda^2 + 2\sigma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$

3/3

$$\lambda_1 = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} \quad \lambda_2 = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$

$$u_c(t) = \left(A_1 \cdot e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} \right) \cdot s(t)$$

e) partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{c,p}(t) = 0$$

2/2

$$u_{c,p}(t) = i_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot s(t)$$

f) Allgemeine Lösung

$$u_c(t) = \left(A_1 \cdot e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} + i_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot s(t)$$

$$= \left(A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + i_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot s(t)$$

1/1

g) $u_c(t=0) = \frac{du_c(t)}{dt} = 0$

1. $u_c(0) = A_1 + A_2 + U_0$

Es: $0 = A_1 + A_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_0$

LGs:

$A_1 + A_2 = -U_0$

$A_1 \cdot \lambda_1 + A_2 \cdot \lambda_2 = 0$

↳ $A_1 = \frac{-A_2 \cdot \lambda_2}{\lambda_1}$

2. $i_c(0) = 0 = A_1 \cdot \lambda_1 + A_2 \cdot \lambda_2$

⇒ $A_2 - \frac{A_2 \cdot \lambda_2}{\lambda_1} = -U_0$

(⇒) $A_2 \cdot (1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) = -U_0$

(⇒) $A_2 = -U_0 \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = -I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$

⇒ $A_1 = \frac{-A_2 \cdot \lambda_2}{\lambda_1} = U_0 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)} = U_0 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$

4/4

h) $i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$

Alls LGs: $= C \cdot \left(A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot s(t)$

$= C \cdot \left(I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + (-I_0) \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \right) \cdot s(t)$

$= \left(C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cdot (e^{\lambda_1 \cdot t} - e^{\lambda_2 \cdot t}) \cdot s(t)$

m.i:

$\lambda_1 = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} = -\sigma + j\omega$

$\lambda_2 = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} = -\sigma - j\omega$

$i_c(t) = \left(C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cdot (e^{\lambda_1 \cdot t} - e^{\lambda_2 \cdot t}) \cdot s(t)$

$= C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(-\sigma - j\omega) \cdot (-\sigma + j\omega)}{-\sigma + j\omega + \sigma + j\omega} \cdot (e^{(-\sigma + j\omega)t} - e^{(-\sigma - j\omega)t}) \cdot s(t)$

$= C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega^2}{2j\omega} \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot (e^{j\omega \cdot t} - e^{-j\omega \cdot t}) \cdot s(t)$

$= C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} \cdot e^{-\sigma \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot s(t)$

$\sin(x) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{jx} - e^{-jx})$

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{L \cdot C \cdot (R_3 + R_2)} = \frac{R_1 + R_2}{L \cdot (R_2 + R_3)} = 214 \cdot 10^{-15} \frac{1}{s^2}$$

$$2\sigma = \frac{L + C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{L \cdot C(R_2 + R_3)}$$

$$\Rightarrow \sigma = 42 \cdot 10^6 \frac{1}{s}$$

$$j\omega = \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} \approx 25,719 \cdot 10^6 j \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_c(t) &= 10 \mu F \cdot 20 mA \cdot \frac{4k\Omega \cdot 2k\Omega}{4k\Omega + 2k\Omega} \cdot \frac{(42 \cdot 10^6 \frac{1}{s})^2 + (25,719 \cdot 10^6 \frac{1}{s})^2}{25,719 \cdot 10^6 \frac{1}{s}} \cdot e^{-42 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \cdot t} \cdot \sin(25,719 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \cdot t) \cdot s(t) \\ &= 25,377 mA \cdot e^{-42 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \cdot t} \cdot \sin(25,719 \cdot 10^6 \frac{1}{s} t) \cdot s(t) \end{aligned}$$

4/6

Skizze:

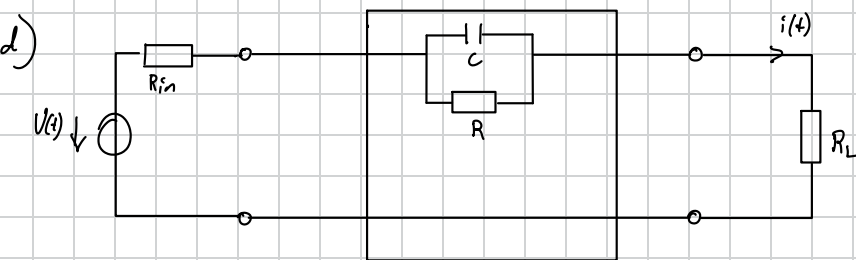
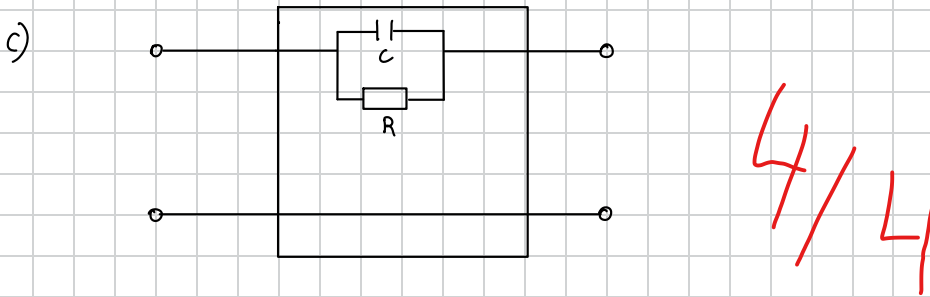
Aufgabe 8

Jens Wißing, Matr: 3642287

a)	Spule	Kondensator
1) Wie lautet die Strom-Spannungsbeziehung im Zeitbereich	$U_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$	$i_C(t) = C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt}$
2) Welche elektrische Größe verläuft stetig?	Strom $i_L(t)$	Spannung $U_C(t)$
3) Durch welches Bauelement kann modelliert werden?		
3.1 zum Zeitpunkt eines Sprungs der Eingangsgröße, wenn der Energiesp. geladen ist:	Stromquelle	Spannungsquelle
3.2 zum Zeitp. eines Sprungs der Eingangsgr., wenn der Energiespeicher ungeladen ist:	Leerlauf	Kurzschluss
3.3 für den Fall, dass Gleichgröße am Eingang unendlich lange angeschlossen haben	Kurzschluss	Leerlauf

5/5

b) Der Verlauf des Stroms ist eine abfallende Exponentialfunktion, dieser wird durch einen einzelnen Energiespeicher erzeugt. 7/1



$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_1 \\ i_{\infty} + (i_0 - i_{\infty}) \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} & \text{für } t \geq t_1 \end{cases}$$

$$t=0 \quad i_C(t)=\infty$$

$$i_C(0) = i(0) = \frac{U}{R_{in} + R_L} = i_0$$

$$t \rightarrow \infty \quad i_C(t)=0$$

$$i(t) = \frac{U}{R_{in} + R + R_L} = i_{\infty}$$

$$\tau = R_{ges} \cdot C = \frac{R \cdot (R_{in} + R_C)}{R + R_{in} + R_C} \cdot C \Rightarrow R_{ges} = R \parallel (R_{in} + R_C)$$

$$= \frac{R \cdot (R_{in} + R_C)}{R + R_{in} + R_C}$$

d)

$$\hat{u} = (R_{in} + R_L) \cdot i_0 \Rightarrow R_{in} = \frac{\hat{u}}{i_0} - R_L$$

$$i_{\infty} = \frac{\hat{u}}{R_{in} + R_L + R} \Rightarrow R = \frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - (R_{in} + R_L) \stackrel{\text{einsetzen}}{=} \frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \left(\frac{\hat{u}}{i_0} + R_L - R_L \right)$$

$$R = \frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \frac{\hat{u}}{i_0}$$

$$\tau = R_{ges} \cdot C \Rightarrow C = \frac{\tau}{R_{ges}} = \tau \cdot \frac{R + R_{in} + R_L}{R \cdot (R_{in} + R_L)}$$

$$= \tau \cdot \frac{\frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \frac{\hat{u}}{i_0} + \frac{\hat{u}}{i_0} - R_L + R_L}{\left(\frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \frac{\hat{u}}{i_0} \right) \cdot \left(\frac{\hat{u}}{i_0} - R_L + R_L \right)} = \tau \cdot \frac{\frac{1}{i_{\infty}}}{\left(\frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \frac{\hat{u}}{i_0} \right) \cdot \frac{\hat{u}}{i_0}}$$

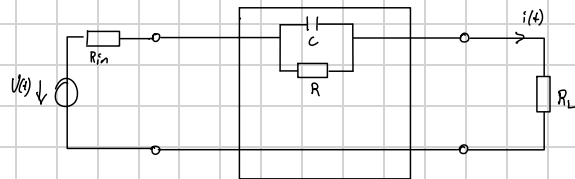
$$= \tau \cdot \frac{i_0}{\frac{\hat{u}}{i_{\infty}} \cdot i_{\infty} - \frac{\hat{u}}{i_0} \cdot i_{\infty}} = \tau \cdot \frac{i_0^2}{\hat{u} \cdot (i_0 - i_{\infty})}$$

9/9

e)

$$u(t) = U_{R_{in}} + U_C(t) + U_{R_L}(t)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$



$$u(t) = U_{R_{in}} + U_C(t) + U_{R_L}(t)$$

$$= R_{in} \cdot i(t) + U_C(t) + R_L \cdot i(t)$$

$$= (R_{in} + R_L) \cdot (i_R(t) + i_C(t)) + U_C(t)$$

$$= (R_{in} + R_L) \cdot \left(\frac{U_C(t)}{R} + C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} \right) + U_C(t)$$

$$= (R_{in} + R_L) \cdot \left(\frac{U_C(t)}{R} + C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} \right) + U_C(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = (R_{in} + R_L) \cdot C \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + \left(\frac{R_{in} + R_L}{R} + 1 \right) U_C(t)$$

✓ 4/4

f) homogene Lösung

$$(R_{in} + R_c) \cdot C \cdot \lambda + \frac{R_{in} + R_c + 1}{R} = 0$$

$$\lambda = - \frac{R_{in} + R_L}{R(R_{in} + R_L)} - \frac{1}{C(R_{in} + R_L)} = - \frac{R_{in} + R_L + R}{R C (R_{in} + R_L)}$$

$$u_c(t) = A \cdot e^{\lambda(t-t_1)} \cdot s(t-t_1)$$

partikuläre Lösung:

$$\frac{du_c(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow u_{c,p}(t \rightarrow \infty) = u_0 = \frac{\hat{u} \cdot R}{R + R_{in} + R_L} \cdot s(t-t_1)$$

$$\Rightarrow u_c(t) = \left(A \cdot e^{\lambda(t-t_1)} + \frac{\hat{u} \cdot R}{R + R_{in} + R_L} \right) \cdot s(t-t_1)$$

Anfangsbed: $t = t_1$

$$u_c(t-t_1=0) = A + \frac{\hat{u} \cdot R}{R + R_{in} + R_L} \Rightarrow A = \frac{-\hat{u} R}{R + R_{in} + R_L}$$

$$\Rightarrow u_c(t) = \hat{u} \frac{R}{R_{in} + R_L + R} \cdot (1 - e^{\lambda(t-t_1)}) s(t-t_1)$$

✓

$$g) i(t) = i_R(t) + i_c(t) = \frac{u_R(t)}{R} + C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{u_c(t)}{R} + C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$= \left(\frac{\hat{u}}{R} \cdot \frac{R}{R + R_{in} + R_L} \cdot (1 - e^{\lambda(t-t_1)}) \right) + \frac{R_{in} + R_L + R}{R C (R_{in} + R_L)} \cdot \frac{\hat{u} \cdot R C}{R + R_{in} + R_L} \cdot e^{\lambda(t-t_1)} s(t-t_1)$$

$$= \left(\frac{\hat{u}}{R + R_{in} + R_L} + \left(\frac{\hat{u}}{R_{in} + R_L} - \frac{\hat{u}}{R + R_{in} + R_L} \right) \cdot e^{\lambda(t-t_1)} \right) s(t-t_1)$$

$$= \hat{u} \cdot \left(\frac{1}{R + R_{in} + R_L} + \left(\frac{1}{R_{in} + R_L} - \frac{1}{R + R_{in} + R_L} \right) \cdot e^{\lambda(t-t_1)} \right) s(t-t_1)$$

4/4