

Aufgabe 19

a)

$$u_2(t) = (u_1 * g)(t) \quad \text{Faltung} \checkmark$$

$$\underline{V}_2(f) = \underline{E}(f) \cdot \underline{V}_1(f) \quad \checkmark \quad (4-30)$$

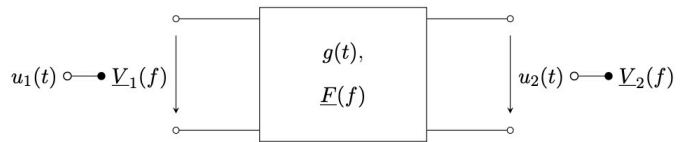


Abbildung 1: Blocksaltbild des Vierpols

Multiplikation ist einfacher $\checkmark$

3

b) Um die Impulsantwort $u_2(t) = g(t)$ zu erhalten muss $u_1(t) = \delta(t)$ sein. $\checkmark$
 $\uparrow$ Dirac Impuls

Um die Sprungantwort $u_2(t) = a(t)$ zu erhalten muss $u_1(t) = \sigma(t)$ sein. $\checkmark$
 $\uparrow$ Sprungfunktion

3

Aus der Kausalität des LTI Systems folgt, dass

$$g(t) = a(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad \checkmark \quad (4-63)$$

c) Sprungantwort $a(t)$

$$g(t) = \frac{d}{dt} a(t) \quad \checkmark$$

$$u_2(t) = (u_1 * g)(t) \quad (4-59)$$

$$u_2(t) = \underbrace{u_1(t) * \frac{d}{dt} a(t)}_{\text{geleitet mit}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau} a(\tau) \cdot u_1(t-\tau) d\tau$$

Wirkungsfunktion:

Wirkun

$$\underline{E}(f) = \text{FT} \left\{ \frac{d}{dt} a(t) \right\} \stackrel{\text{Tab 4-1}}{=} (j2\pi f) \cdot \text{FT} \{a(t)\} \quad \checkmark$$

2

d)

Komplexe Wechselstromrechnung ist auf Eingangsspannungen mit nur einer Frequenzkomponente beschränkt. Ein Beispiel dafür sind:

$$u_1(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

↪ nur eine Frequenzkomponente

Nach 4-13 existiert der Fourier-Integral, wenn das Signal die Dirichletschen Bedingungen erfüllt:

- $u(t)$ ist innerhalb der Periode stückweise stetig.
- Eine Aufteilung in endlich viele Intervalle ist möglich, in denen die Funktion stetig und monoton ist.
- An jeder Unstetigkeitsstelle ist der links- und rechtsseitige Grenzwert definiert.

Skript
S. 38

und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty \quad (4-13)$$

i) $\sin(\omega t), s(t)$

ii) $b \cdot t, a^t \cdot s(t)$ mit $a > 1$

(5)

e) stabil: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$

$$a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot s(t) \quad \text{Sprung}$$

$s(t)$ = Sprungantwort

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d}{dt} a(t) && \text{Impuls} \\ &= \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot s(t) + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \frac{d}{dt} s(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) + \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot \delta(t) \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) + \delta(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \delta(t) \\ &= \left(\frac{1}{\tau} \cdot s(t) - \delta(t)\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\tau} \cdot s(t) - \delta(t)\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta(t) \right| dt < \infty$$

$\frac{d}{dt} = \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{\tau} \cdot s(t) - \delta(t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \delta(t) \right| dt < \infty$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\tau} \cdot s(t) - \delta(t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt + 1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \cdot s(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt + 1$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \left(-\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot g(t) dt \right) - \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} dt \right) + 1$$

$$= -1 \cdot \left(s(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt \right) - e^{-\frac{t}{\tau}} - \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_{-\infty}^{\infty} + 1$$

$$= -s(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \left[x \right]_{-\infty}^{\infty} - e^{-\frac{t}{\tau}} - \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_{-\infty}^{\infty} + 1$$

$$= -(s(t) + 1) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \underbrace{\left[x \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{\text{Divergiert} \\ \text{gegen } t \rightarrow \infty}} - \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_{-\infty}^{\infty} + 1$$

$$= -(s(t) + 1) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 < \infty$$

⇒ Für alle $\tau > 0$ ist das System stabil



①

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot f(x) dx = f(0)$$

f)

$$a(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) s(t)$$

$$h(t) = \frac{d}{dt} a(t) \quad \checkmark$$

$$= \frac{d}{dt} \left((1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot s(t) \right)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot \delta(t)$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) + (1 - 1)$$

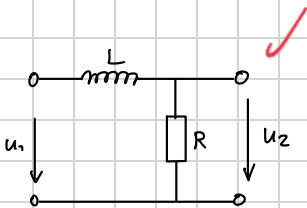
$$= \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} s(t) \quad \checkmark$$

Tab: 4-7

$$\Rightarrow F(f) = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + j2\pi \cdot f}$$

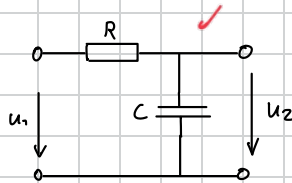
$$= \frac{1}{1 + j2\pi \cdot f \cdot \tau} \quad \checkmark$$



$$\tau = 1\text{ns} = \frac{L}{R}$$

$$R = 1\text{k}\Omega$$

$$L = 1\mu\text{H}$$



$$\tau = 1\text{ns} = C \cdot R$$

$$R = 1\text{k}\Omega$$

$$C = 1\text{pF}$$

⑥

nur eins...

8)

I

$$u_{11}(t) = \hat{U}[s(t) - s(t - T_1)]$$

$$F(f) = \frac{1}{\tau}$$

Überlagerungssatz $\rightarrow$ Netzwerk ist linear

$$u_{21}(t) = \hat{U}[a(t) - a(t - T_1)]$$

$$= \hat{U}\left[\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot s(t) - \left(1 - e^{-\frac{t - T_1}{\tau}}\right) \cdot s(t - T_1)\right]$$

II

$$u_{12}(t) = \hat{U} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t)$$

Faltung

$$u_1(t) * u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \cdot u_2(t - \tau) d\tau$$

$\Rightarrow$ Faltung

$$V_{12} = \frac{\hat{U}}{\left(\frac{\tau}{2} + j2\pi f\right)}$$

$$V_{22}(f) = V_{12} \cdot F(f) = \frac{\hat{U}}{\left(\frac{\tau}{2} + j2\pi f\right)} \cdot \frac{\frac{\tau}{2}}{\frac{\tau}{2} + j2\pi f}$$

$$= \frac{\hat{U}}{\tau} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\tau}{2} + j2\pi f\right)^2}$$

$$u_{22}(t) = \frac{\hat{U}}{\tau} t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} s(t)$$

$$t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot s(t) \rightarrow \frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$$

III

$$u_{13}(t) = \hat{U} \cdot \cos(2\pi f_0 \cdot t)$$

$$F(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f \cdot \tau}$$

$$|F(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \cdot \tau)^2}}$$

$$\arg\{F(f)\} = -\arctan(2\pi f \cdot \tau)$$

$$v_{23}(t) = \hat{U} \cdot |F(f)| \cdot \cos(2\pi f_0 t + \arg\{F(f_0)\})$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 \cdot \tau)^2}} \cdot \cos\left[2\pi f_0 t - \arctan(2\pi f_0 \cdot \tau)\right]$$

10

h)

$$u(t) \longleftrightarrow V(f)$$

① Ähnlichkeit

$$u(at) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(at) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$g = a \cdot t$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(g) \cdot e^{-j2\pi f \frac{g}{a}} \frac{dg}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u(g) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{a} g} dg$$

$$= \frac{1}{a} \underline{V}\left(\frac{f}{a}\right) \quad \checkmark$$

② $u(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi (f-f_0) \cdot t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi (f+f_0) \cdot t} dt \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\underline{V}(f-f_0) + \underline{V}(f+f_0)] \quad \checkmark$$

③ $u(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t) \cdot e^{j2\pi ft} dt$

$\Rightarrow$ Sonderform von ① mit $a = -1$

$$u(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \underline{V}\left(\frac{f}{a}\right)$$

mit $a = -1$

$$u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{|-1|} \cdot \underline{V}\left(\frac{f}{-1}\right)$$

$$\Rightarrow u(-t) \longleftrightarrow \underline{V}(-f) \quad \checkmark$$

Gesamt: 36

⑥

Aufgabe 20

Fouriertransformation des Trapezimpulses

- Verwenden Sie bei Bedarf eine Formelsammlung oder Integraltafel.
- Die Nutzung von CAS-Rechnern, Wolfram Alpha und anderer Integrallöser ist nicht zulässig.
- Die nicht normierte Sinus-cardinalis-Funktion ist definiert durch

$$\text{si}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Teil A – Vorarbeit

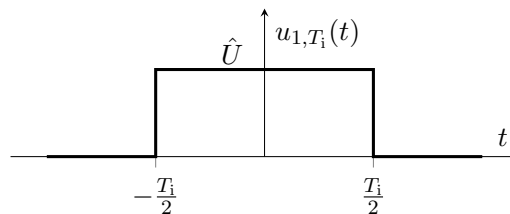


Abbildung 2: Rechtecksignal $u_{1,T_1}(t)$

- a) Betrachtet werde ein gerades reelles Signal $u(t)$. Was folgt daraus für die Spektralfunktion $\underline{V}(f) \bullet \text{---} \circ u(t)$?

Zeigen Sie, dass sich das Integral zur Bestimmung der Spektralfunktion zu

$$\underline{V}(f) = 2 \int_0^\infty u(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (1)$$

vereinfachen lässt.

- b) Berechnen Sie (d. h. ohne Zuhilfenahme der Korrespondenztabelle im Skript) die Spektralfunktion $\underline{V}_{1,T_1}(f) \bullet \text{---} \circ u_{1,T_1}(t)$ des in [Abbildung 2](#) dargestellten Rechtecksignals. Nutzen Sie dabei die Symmetrie des Signals aus.

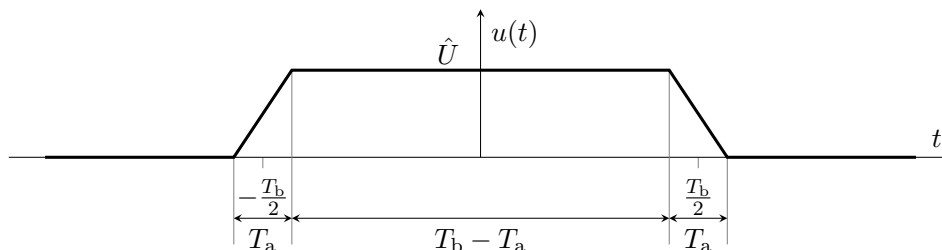


Abbildung 3: Trapezförmiger Spannungsimpuls $u(t)$

Teil B – Überlagerung mehrerer Basisfunktionen

Im Folgenden sollen zwei Wege betrachtet werden, mit denen $\underline{V}(f)$ elegant aus Korrespondenzen der Fouriertransformation abgeleitet werden kann.

Ohne Herleitung darf dazu im Folgenden die Korrespondenz

$$u_{2,T_i}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{V}_2(f) = \hat{U} T_i \text{si}^2(\pi f T_i) \quad (2)$$

verwendet werden. Das zugehörige Zeitsignal ist in Abbildung 4 zu sehen. Achten Sie darauf, dass gemäß der Definition des Dreiecks nach (2) dessen Breite $2T_i$ beträgt.

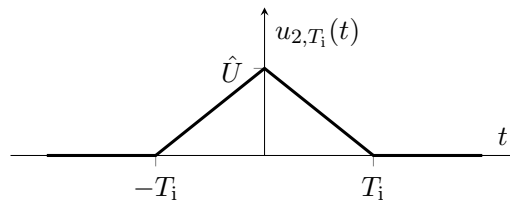


Abbildung 4: Dreieckssignal $u_{2,T_i}(t)$

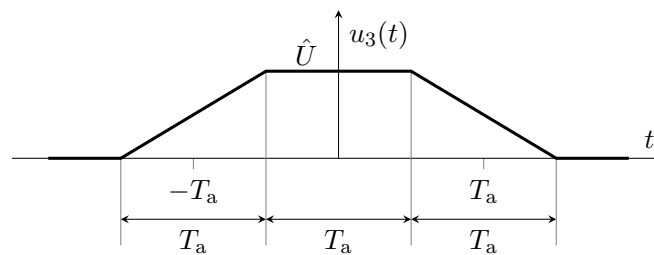


Abbildung 5: Spannungsimpuls $u_3(t)$

- c) Zunächst wird als Sonderfall das Trapez nach Abbildung 5 betrachtet. Stellen Sie $u_3(t)$ als Summe zweier zeitverschobener Dreieckssignale im Zeitbereich dar.

Bestimmen Sie mithilfe von $\underline{V}_2(f)$ die Fouriertransformierte $\underline{V}_3(f) \bullet \text{---} \circ u_3(t)$ und vereinfachen Sie den Ausdruck.

- d) Beschreiben Sie $u(t)$ nach Abbildung 3 als gewichtete Differenz

$$u(t) = \alpha_1 u_{2,T_{i,1}}(t) - \alpha_2 u_{2,T_{i,2}}(t)$$

zweier Dreiecksimpulse $u_{2,T_{i,1}}(t)$ und $u_{2,T_{i,2}}(t)$. Geben Sie dazu die Faktoren α_1 , α_2 und die Dreiecksbreiten $2T_{i,1}$, $2T_{i,2}$ an.

Bestimmen Sie hiermit $\underline{V}(f)$ und vereinfachen Sie Ihren Ausdruck, bis Sie (3) erhalten.

$$\underline{V}(f) = \hat{U} T_b \text{si}(\pi f T_b) \text{si}(\pi f T_a) \quad (3)$$

Aufgabe 20

Teil A-Vorarbeit

$$s_i'(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

a) Wenn $u(t)$ ein gerades und reelles Signal ist, dann ist auf $V(f)$ reell und grade ✓

$$u(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

gerade: $u(t) = u(-t)$

$$= \int_{-\infty}^0 u(-t) \cdot e^{j2\pi f(-t)} d(-t) + \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

mit $g = (-t) \quad dg = d(-t)$

$$= \int_{\infty}^0 u(g) \cdot e^{j2\pi fg} \cdot (-1) dg + \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_0^{\infty} u(g) \cdot e^{j2\pi fg} dg + \int_0^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_0^{\infty} u(t) \left(e^{-j2\pi ft} + e^{-j2\pi ft} \right) dt$$

$$= \int_0^{\infty} u(t) \cdot 2 e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_0^{\infty} u(t) \cdot 2 \cdot \cos(2\pi ft) dt \quad \checkmark$$

4

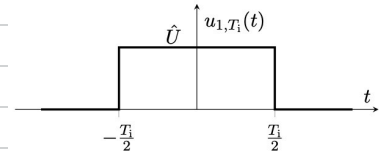


Abbildung 2: Rechtecksignal $u_{1,T_1}(t)$

b) $V_{1,T_1}(f) \longleftrightarrow u_{1,T_1}(t)$

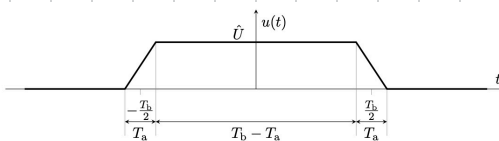


Abbildung 3: Trapezförmiger Spannungsimpuls $u(t)$

$$V_{1,T_1}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{1,T_1}(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= 2 \cdot \int_0^{T_b/2} u(t)_{1,T_1} \cdot \cos(2\pi ft) dt$$

$$= 2$$

—

b)

$$V_{1,T_i}(f) \longleftrightarrow u_{1,T_i}(t)$$

$$V_{1,T_i}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,T_i}(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{T_i}{2}} u_{1,T_i}(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= 2 \left(\int_0^{\frac{T_b-T_a}{2}} \hat{u} \cdot e^{-j2\pi ft} dt + \int_{\frac{T_b-T_a}{2}}^{\frac{T_i}{2}} \left(-\frac{\hat{u}}{T_a} \cdot t + \frac{T_b+T_a}{2} \right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

$$= 2 \cdot \hat{u} \left(\left[\frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_0^{\frac{T_b-T_a}{2}} + \left[\left(-\frac{1}{T_a} \cdot t + \frac{T_b+T_a}{2T_a} \right) \cdot \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_{\frac{T_b-T_a}{2}}^{\frac{T_b+T_a}{2}} - \int_{\frac{T_b-T_a}{2}}^{\frac{T_b+T_a}{2}} -\frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)$$

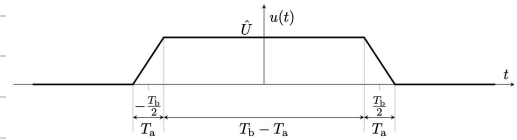
$$= 2 \hat{u} \cdot \left(\left(\frac{1}{-j2\pi f} \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} - 1 \right) \right) + \left(\left(-\frac{1}{T_a} \cdot \frac{T_b+T_a}{2} + \frac{T_b+T_a}{2T_a} \right) \cdot \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_b+T_a}{2}} - \left(-\frac{1}{T_a} \cdot \frac{T_b-T_a}{2} + \frac{T_b+T_a}{2T_a} \right) \cdot \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} \right) \right. \\ \left. - \left[-\frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{(j2\pi f)^2} \cdot e^{-j2\pi ft} \right]_{\frac{T_b-T_a}{2}}^{\frac{T_b+T_a}{2}} \right)$$

$$= 2 \hat{u} \left(\frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} \right) - \left(\frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{(j2\pi f)^2} \right) \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T_b+T_a}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} \right) \right)$$

$$= 2 \hat{u} \left(\frac{1}{-j2\pi f} \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T_b-T_a}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{(j2\pi f)^2} \cdot \left(e^{-j2\pi f \frac{T_b}{2}} \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_a}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T_b}{2}} \cdot e^{j2\pi f \frac{T_a}{2}} \right) \right)$$

$$= 2 \hat{u} \left(\frac{1}{-j2\pi f} \cdot \left((-1) + \frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j\pi f T_b} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\pi f T_a} - e^{-j\pi f T_a} \right) \right) \right)$$

$$= 2 \hat{u} \left(\frac{1}{-j2\pi f} \left((-1) + \frac{1}{T_a} \cdot \frac{1}{-j2\pi f} \cdot e^{-j\pi f T_b} \cdot \sin(\pi f T_a) \right) \right) \quad f$$

Abbildung 3: Trapezförmiger Spannungsimpuls $u(t)$

$$-\frac{\hat{u}}{T_a} \cdot \frac{T_b+T_a}{2} + x = 0$$

$$x = u \cdot \frac{T_b+T_a}{2T_a}$$

0

Teil B

$$u_{2,T_i}(t) \rightarrow \underline{V}_2(f) = \hat{U} T_i \operatorname{sinc}(\pi f T_i)$$

c)

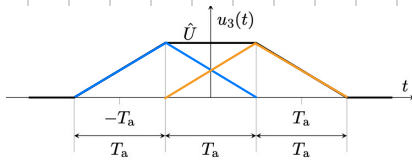


Abbildung 5: Spannungsimpuls $u_3(t)$

$$u_3(t) = u_{2,T_a}(t - \frac{T_a}{2}) - u_{2,T_a}(t + \frac{T_a}{2}) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} V_3(f) &= (\hat{U} \cdot T_a \cdot \operatorname{sinc}(\pi f T_a)) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_a}{2}} + (\hat{U} \cdot T_a \cdot \operatorname{sinc}(\pi f T_a)) \cdot e^{j2\pi f \frac{T_a}{2}} \\ &= (\hat{U} \cdot T_a \cdot \operatorname{sinc}(\pi f T_a)) \cdot (e^{-j\pi f T_a} + e^{j\pi f T_a}) \\ &= 2 \cdot \hat{U} \cdot T_a \cdot \operatorname{sinc}(\pi f T_a) \cdot \cos(\pi f T_a) \quad \checkmark \text{ weites vereinfachen} \end{aligned}$$

4

d)

$$u(t) = \alpha_1 \cdot u_{2,T_{i,1}}(t) - \alpha_2 \cdot u_{2,T_{i,2}}(t)$$

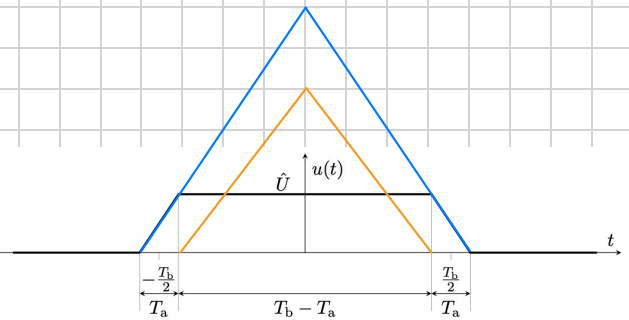


Abbildung 3: Trapezförmiger Spannungsimpuls $u(t)$

Dreiecksbreite: Faktoren α_1, α_2

$$\begin{aligned} 2 \cdot T_{i,1} &= T_b + T_a & \alpha_1 &= \frac{T_b + T_a}{2 \cdot T_a} \\ 2 \cdot T_{i,2} &= T_b - T_a & \alpha_2 &= \frac{T_b - T_a}{2 \cdot T_a} \end{aligned}$$

$$u(t) = \frac{T_b + T_a}{2 T_a} \cdot u_{2,T_{i,1}}(t) - \frac{T_b - T_a}{2 T_a} \cdot u_{2,T_{i,2}}(t) \quad \checkmark$$

$$u_{2,T_i}(t) \rightarrow \underline{V}_2(f) = \hat{U} T_i \operatorname{sinc}(\pi f T_i)$$

$$\underline{V}(f) = \alpha_1 \cdot \underline{V}_{2,T_{i,1}}(f) - \alpha_2 \cdot \underline{V}_{2,T_{i,2}}(f)$$

$$= \frac{T_b + T_a}{2 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{T_b + T_a}{2} \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}) - \frac{T_b - T_a}{2 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{T_b - T_a}{2} \cdot \operatorname{sinc}^2(\pi f \frac{T_b - T_a}{2})$$

$$= \frac{(T_b + T_a)^2}{4 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{\sin^2(\pi f \frac{T_b + T_a}{2})}{(\pi \cdot f \cdot \frac{T_b + T_a}{2})^2} - \frac{(T_b - T_a)^2}{4 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{\sin^2(\pi f \frac{T_b - T_a}{2})}{(\pi \cdot f \cdot \frac{T_b - T_a}{2})^2}$$

$$= \frac{(T_b + T_a)^2}{4 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right)}{\left(\pi \cdot f \cdot \frac{T_b + T_a}{2}\right)^2} - \frac{(T_b - T_a)^2}{4 T_a} \cdot \hat{U} \cdot \frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right)}{\left(\pi \cdot f \cdot \frac{T_b - T_a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\hat{U}}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T_a} \cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \frac{\hat{U}}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T_a} \cdot \sin^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right)$$

$$= \frac{\hat{U}}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T_a} \cdot \left(\sin^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \sin^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right) \right)$$

$$\sin^2(x) - \sin^2(y) = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$$

$$= \frac{\hat{U}}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T_a} \cdot \left[\sin\left(\pi f \left(\frac{T_b + T_a}{2} + \frac{T_b - T_a}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\pi f \left(\frac{T_b + T_a}{2} - \frac{T_b - T_a}{2}\right)\right) \right]$$

$$= \frac{\hat{U}}{\pi^2 \cdot f^2 \cdot T_a} \cdot \left[\sin(\pi f T_b) \cdot \sin(\pi f T_a) \right]$$

$$= \hat{U} \cdot T_b \cdot \left[\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi \cdot f \cdot T_b} \cdot \frac{\sin(\pi f T_a)}{\pi f T_a} \right]$$

Gesamt: 14

(6)

$$V(f) = \hat{U} \cdot T_b \cdot (\sin(\pi f T_b) \cdot \sin(\pi f T_a)) \quad \checkmark$$