

Aufgabe 19

a) $u_2(t) = (u_1 * g)(t)$

$$\underline{V}_2(f) = \underline{V}_1(f) \cdot \underline{F}(f)$$

Multiplikation im Frequenzbereich ist i.d.R. einfacher als eine Faltung

b) $u_1(t) = \delta(t)$



$$u_2(t) = g(t)$$

$$u_1(t) = s(t)$$



$$u_2(t) = a(t)$$

Kausalität: $g(t) = a(t) = 0$ für $t < 0$

c) $g(t) = \frac{d}{dt} a(t)$

Somit $u_2(t) = u_1(t) * \frac{d}{dt} a(t)$

bzw. $\underline{F}(f) = \text{FT} \left\{ \frac{d}{dt} a(t) \right\} = j2\pi f \text{FT} \{ a(t) \}$

d) komplexe Wechselstromrechnung kann nur bei Signalen mit nur einer Frequenzkomponente angewendet werden

z.B. $\hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$, $\hat{u} e^{j(\omega t + \varphi)}$

Dirichlet'sche Bedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} |u_1(t)| dt < \infty$

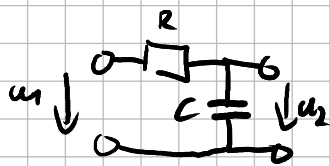
i. Signale wie: $\sin(\omega t)$, $s(t)$, ...

ii. $a^t s(t)$ mit $a > 1$, $b \cdot t$, ...

e) $t > 0$ sonst $g(t)$ nicht endlich

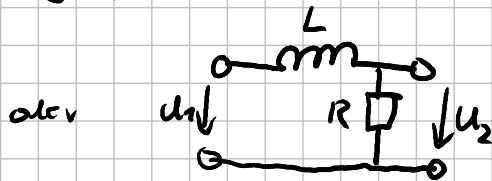
$$f) \quad h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} s(t)$$

$$\text{Somit } \underline{F}(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$$



$$\tau = 1\text{ns} = C \cdot R$$

$$\text{z.B. } R = 1\text{k}\Omega \quad C = 1\text{pF}$$



$$\tau = 1\text{ns} = \frac{L}{R}$$

$$\text{z.B. } R = 1\text{k}\Omega \quad L = 1\text{nH}$$

g) 1. Linearität ergibt:

$$u_{21}(t) = \hat{u} [u(t) - u(t - T_1)]$$

$$= \hat{u} \left[\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) s(t) - \left(1 - e^{-\frac{t-T_1}{\tau}}\right) s(t - T_1) \right]$$

2. mit Faltung im Frequenzbereich:

$$\underline{u}_{22}(f) = \underline{u}_2(f) \cdot \underline{F}(f) = \frac{\hat{u}}{\tau} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + j2\pi f\right)^2}$$

$$\text{mit } t e^{-at} s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \quad a > 0$$

$$u_{22}(t) = \frac{\hat{u}}{\tau} t e^{-\frac{t}{\tau}} s(t)$$

3. Komplexe Wechselstromrechnung

$$\underline{F}(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$$

$$\text{damit } |\underline{F}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} \quad \arg\{\underline{F}(f)\} = -\arctan(2\pi f\tau)$$

$$u_{23}(t) = |\underline{F}(f_0)| \cdot \hat{u} \cdot \cos(2\pi f_0 t + \arg\{\underline{F}(f_0)\})$$

$$= \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + (2\pi f_0\tau)^2}} \cdot \cos[2\pi f_0 t - \arctan(2\pi f_0\tau)]$$

h)

Zeitdehnung:

$$u(t) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Subst. $t' = at$, wenn $a < 0$ drehen sich die Grenzen

$$\text{somit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{a}} \frac{dt'}{a}$$

$$= \pm \frac{1}{a} \int_{\mp\infty}^{+\infty} u(t') e^{-j2\pi \frac{f}{a} t'} dt'$$

$$= \frac{1}{|a|} \underline{V}\left(\frac{f}{a}\right)$$

Modulation:

$$u(t) \cos(2\pi f_0 t) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) [e^{-j2\pi (f-f_0)t} + e^{-j2\pi (f+f_0)t}] dt$$

$$= \frac{1}{2} [\underline{V}(f-f_0) + \underline{V}(f+f_0)]$$

Spiegelung ist Sonderfall der Dehnung für

$$a = -1$$

$$u(-t) \mapsto \underline{V}(-f)$$

Aufgabe 20:

a) $u(t)$ reell und gerade $\Leftrightarrow \underline{V}(f)$ reell und gerade

$$\underline{V}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 u(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\text{mit } t' = -t \quad dt' = -dt \quad \text{und } u(-t) = u(t) = u(t')$$

$$\begin{aligned} \underline{V}(f) &= \int_0^0 u(t') e^{j2\pi f t'} \cdot (-1) \cdot dt' + \int_0^\infty u(t') e^{-j2\pi f t'} dt' \\ &= \int_0^\infty u(t') e^{j2\pi f t'} dt' + \int_0^\infty u(t') e^{-j2\pi f t'} dt' \\ &= \int_0^\infty u(t') 2 \cos(2\pi f t') dt' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \underline{V}_{1,T_1}(f) &= 2\hat{u} \int_0^{T_1} \cos(2\pi f t) dt \\ &= \hat{u} T_1 \operatorname{sinc}(\pi f T_1) \end{aligned}$$

in sic) berücksichtigt dass $\underline{V}_{1,T_1}(0) = \hat{u} T_1$

$$\text{c) } u_3(t) = u_{2,T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right) + u_{2,T_1}\left(t + \frac{T_1}{2}\right)$$

$$\text{und } \underline{V}_{2,T_1}(f) = \hat{u} T_1 \operatorname{sinc}(\pi f T_1)$$

$$\text{also } \underline{V}_3(f) = 2 \hat{u} T_1 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_1) \cdot \cos(\pi f T_1)$$

d) Für die Breite der Dreiecke gilt

$$T_{1,1} = \frac{T_b + T_a}{2} \quad T_{1,2} = \frac{T_b - T_a}{2}$$

Für die Amplituden muss gelten:

$$\alpha_1 = \frac{T_b + T_a}{2T_a} \quad \alpha_2 = \frac{T_b - T_a}{2T_a}$$

$$\text{und } u(t) = \alpha_1 u_{2,T_{1,1}}(t) - \alpha_2 u_{2,T_{1,2}}(t)$$

$$\text{bzw. } \underline{V}(f) = \alpha_1 \underline{V}_{2,T_{1,1}}(f) - \alpha_2 \underline{V}_{2,T_{1,2}}(f)$$

$$\text{mit } \underline{V}_{2,T_i}(f) = \hat{u} T_i \operatorname{sinc}^2(\pi f T_i)$$

$$\text{ergibt sich } \underline{V}(f) = \frac{\hat{u}}{T_a \pi^2 f^2} \left[\operatorname{sinc}^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \operatorname{sinc}^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\hat{u}}{T_a \pi^2 f^2} \cdot \sin(\pi f T_b) \sin(\pi f T_a)$$

$$= \hat{u} T_b \operatorname{sinc}(\pi f T_b) \operatorname{sinc}(\pi f T_a)$$