

BIOMECHANIK Zusammenfassung

Biomechanik

- **Biomechanik beschreibt den Zusammenhang zwischen Kraft und Deformation im biologischen System**
- **Abhängig von**
 - Dimensionen
 - Physikalischen Gewebeeigenschaften



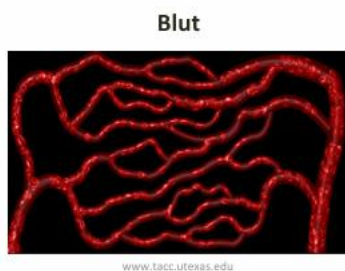
Beispiel: Krafteinwirkung auf eine Sehne

- Dehnung der Sehne unter Einwirkung von Kräften



Biofluidmechanik

- **Die Biofluidmechanik ist ein Gebiet der Biomechanik, das sich mit der Mechanik von biologischen Fluiden bzw. Fluiden in einem biologischen System beschäftigt**



- **Fluide in den Systemen des menschlichen Organismus:**
 - o Herzkreislaufsystem, Atmungssystem, Verdauungssystem, Urogenitalsystem, Lymphsystem, Nervensystem, Bewegungssystem
- **Wasseranteil des menschl. Körpers**
 - o Muskel: über 60%
 - o Organe: Über 80%

Vergleich Festkörper und Fluide

Festkörper	Fluid
- Zusammenhang: Kraft und Deformationsgrad - Abhängigkeit von elastischen Eigenschaften des Körpers	- Zusammenhang: Kraft und Deformationsgeschwindigkeit - Abhängigkeit von viskosen Eigenschaften des Fluids

- **Mechanisches Verhalten von biologischem Gewebe** ist bestimmt von:
 - o Eigenschaften von Festkörpern und Fluid → viskoelastisch
- **Resultierende Kräfte:**
 - o Deformationsgrad und Deformationsgeschwindigkeit

Mechanobiologie

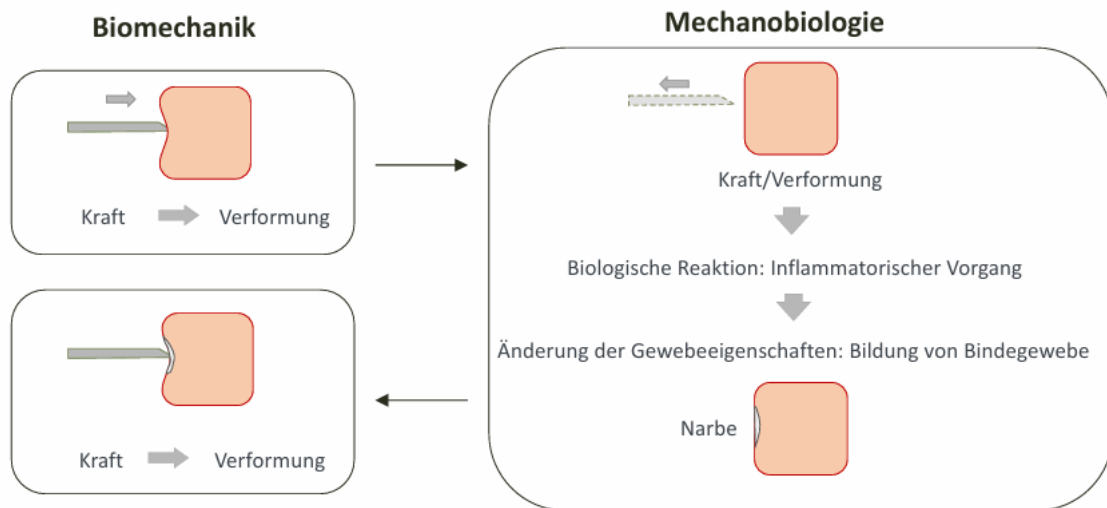
Unter Mechanobiologie versteht man die biologische Reaktion in Folge von Kraft und Deformation

- Abhängig von komplexen biochemischen Vorgängen

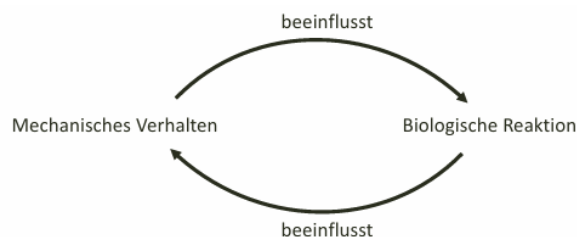
Bsp: Krafteinwirkungen auf eine Sehne

- Entzündung der Sehne abhängig von der Krafteinwirkung (akut oder über eine Zeit)

Vergleich Biomechanik & Mechanobiologie:



→ Stehen in Wechselwirkung miteinander



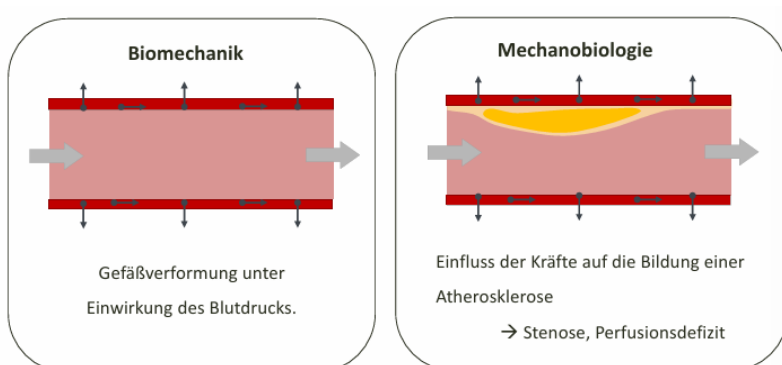
Umsetzung Biomechanik in Praxis:

> abhängig von:

- Variabilität der Gewebeeigenschaften und Anatomie (von Individuum zum Individuum)
- Einfluss externer Faktoren: z.B. Durchführung der Prozedur, Temperatur, Lage
- Einfluss psychologischer Faktoren: Entscheidungen und Reaktionen

Zeitliche Einordnung:

- **Biomechanik**
 - Aktion und eine gleichzeitige Reaktion.
- **Mechanobiologie**
 - Abläufe, die sehr schnell aber auch sehr langsam (über Jahre) erfolgen können



Kniereflex:
 > Mechanobiologisch
 Lungenbeatmung:
 > Biomechanisch
 Baum in Wind:
 > Biomechanisch
 Hals mit Ringen:
 > Mechanobiologie

Grundlagen der Mechanik

Trägheitsprinzip

- Körper behält **Bewegungszustand** bei, solange keine Kraft auf ihn wirkt oder sich die **Summe der Kräfte** aufhebt
- **Trägheit**:
 - **Widerstand** eines Körpers, den er einem von außen kommenden Bewegungsimpuls entgegensetzt
 - Ursache: (träge) Masse
- **Eigenschaften**:

Der **Bewegungszustand** des Körpers kann als **Vektor Geschwindigkeit** $\vec{v}$ seines **Schwerpunktes** betrachtet werden. Er ist durch einen Betrag und eine Richtung definiert.

Der **Schwerpunkt** eines Körpers behält seine **geradlinige Bewegung** bei, wenn sich die auf ihn einwirkenden Kräfte gegenseitig aufheben oder keine Kräfte auf den Körper einwirken.

Sonderfall: Ein Körper bleibt im **Ruhezustand**, wenn sich die auf ihn einwirkenden Kräfte gegenseitig aufheben oder keine Kräfte auf den Körper einwirken.

Anmerkung I: die **Summe** der Kräfte wird als **resultierende Kraft** bezeichnet.

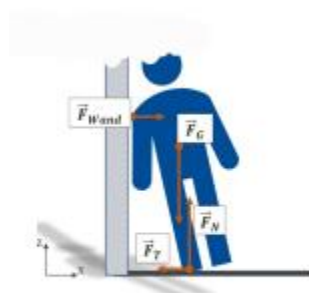
- **Anmerkung II**: der gleich bleibende Bewegungszustand kann als **Gleichgewichtszustand** bezeichnet werden.



Geringere Masse → Geringere Trägheit



Größere Masse → Größere Trägheit



Der Boden übt auf den Menschen zwei Kräfte aus: eine in z-Richtung und eine x-Richtung:

- z-Richtung: Normalkraft $\vec{F}_N$
- x-Richtung: Tangentialkraft $\vec{F}_T$ (Reibung)

Das Trägheitsprinzip kann getrennt für jede Bewegungsrichtung angewendet werden. Das heißt, im Gleichgewichtszustand gilt:

$$\vec{F}_N = \vec{F}_G \quad \vec{F}_{Wand} = \vec{F}_T$$

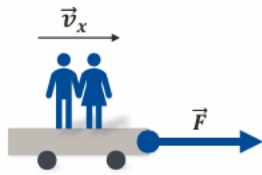
Anmerkung: Die Summe von $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_T$ wird als **Kontaktkraft** bezeichnet.

Aktionsprinzip:

Wirkt auf einen Körper mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ die resultierende Kraft $\vec{F}$, so gilt

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \text{ [N]}, \text{ wobei } \vec{a} \text{ der Beschleunigung entspricht.}$$

(2. Newtonsches Gesetz)

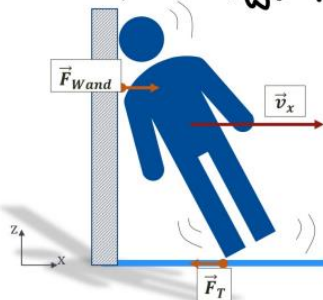


Geringe Masse → Geringe Trägheit → Schnelle Änderung des Bewegungszustandes



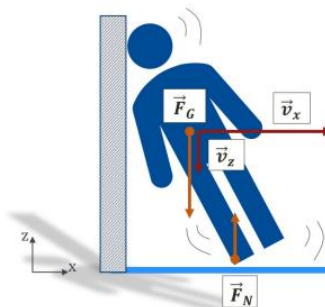
Große Masse → Große Trägheit → Langsame Änderung des Bewegungszustandes

auf Eis: $\tau_w > \tau_T$



Aktionsprinzip in x-Richtung

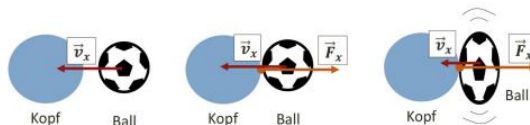
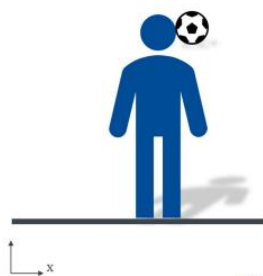
$$\vec{F}_x = \vec{F}_{\text{Wand}} - \vec{F}_T = m \cdot \frac{d\vec{v}_x}{dt} = m \cdot \vec{a}_x$$



Aktionsprinzip in z-Richtung

$$\vec{F}_z = \vec{F}_N - \vec{F}_G = m \cdot \frac{d\vec{v}_z}{dt} = m \cdot \vec{a}_z$$

Betrachtung des Balls in x-Richtung.



Eine Kraft $\vec{F}_x$ wird vom Kopf auf den Ball in x-Richtung ausgeübt.

$$\text{Es gilt: } \vec{F}_x = m \cdot \frac{d\vec{v}_x}{dt} = m \cdot \vec{a}_x$$

Bis zur vollständigen Verformung des Balls bewegt sich der Schwerpunkt weiterhin in x Richtung, allerdings mit abnehmender Geschwindigkeit.

Abhängigkeiten: Verformungsgrad des Balls → Beschleunigung des Balls → Kraft

Wechselwirkungsprinzip:

Vorsicht: nicht mit dem Kräftegleichgewicht verwechseln!

Beim Kräftegleichgewicht wirken die Kräfte auf den gleichen Körper ein, beim Wechselwirkungsprinzip wirken die Kräfte auf verschiedene Körper ein!

Übt Körper 1 eine Kraft auf Körper 2 aus, so übt Körper 2 eine gleiche, entgegengerichtete Kraft auf Körper 1 aus.

(3. Newtonsches Gesetz)

„actio = reactio“



Das Wechselwirkungsprinzip wird auch als **Reaktionsprinzip** bezeichnet.

Wechselwirkungsprinzip in x-Richtung

$$\vec{F}_{Wand} = -\vec{F}_{Körper} \quad \vec{F}_{T,Boden} = -\vec{F}_{T,Fuss}$$

Die Wand ist einer Kraft ausgesetzt, die je nach Wandmaterial zur Verformung oder Bruch führen kann.

Was passiert mit dem Eis unter Einwirkung von $\vec{F}_{T,Fuss}$?

Wechselwirkungsprinzip in x-Richtung

Der Läufer beschleunigt

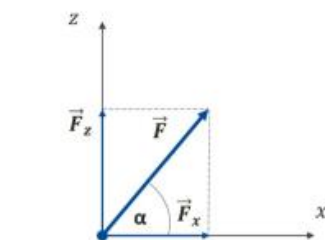
$\vec{F}_{x,Startblock}$: Kraftkomponente des Startblocks auf den Läufer

$\vec{F}_{x,Läufer}$: Kraftkomponente des Läufers auf den Startblock

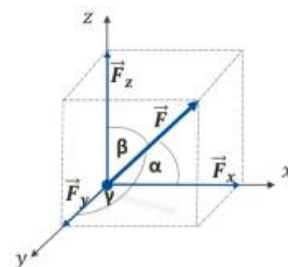
$$\vec{F}_{x,Startblock} = -\vec{F}_{x,Läufer}$$

Der Startblock nimmt die Kraft auf. Die Befestigung am Boden gewährleistet, dass er in „Ruhezustand“ bleibt.

Eine Kraft $\vec{F}$ hat in der Ebene zwei ($\vec{F}_x, \vec{F}_y$) und im Raum drei ($\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$) Komponenten.



$$\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos \alpha \quad \vec{F}_z = \vec{F} \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = |\vec{F}| = \sqrt{\vec{F}_x^2 + \vec{F}_z^2}$$



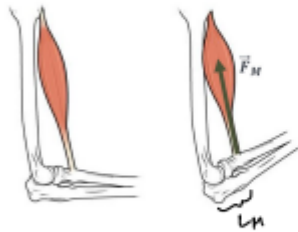
$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \vec{F} \cdot \cos \alpha \\ \vec{F}_z &= \vec{F} \cdot \cos \beta \\ \vec{F}_y &= \vec{F} \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = |\vec{F}| = \sqrt{\vec{F}_x^2 + \vec{F}_z^2 + \vec{F}_y^2}$$

α : Winkel zwischen x – Achse und $\vec{F}$
 β : Winkel zwischen z – Achse und $\vec{F}$
 γ : Winkel zwischen y – Achse und $\vec{F}$

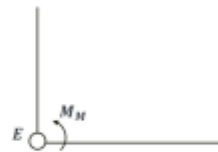
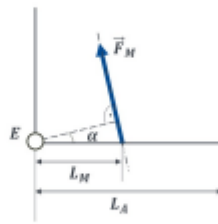
Moment: $\downarrow \rightarrow$ negativ
 $\hookrightarrow \rightarrow$ positiv

$$M = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$\hookrightarrow$ Ruhe: $\sum M = 0$



<https://www.betacar.de/fragasche/fragenbogenwurde-und-wichtigpunkte/>

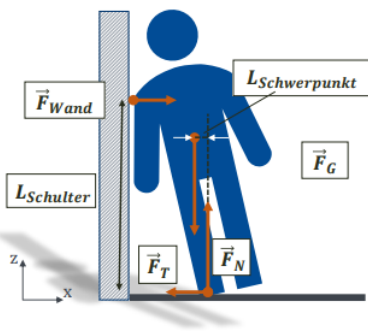


$$E: M_M = \vec{F}_M \cdot L_M \cdot \cos \alpha$$

$\hookrightarrow$ Ellenbogen



$\vec{F}_M$: Muskelkraft
 L_M : Abstand vom Ellenbogengelenk zum Muskel (Hebelarm)
 L_A : Armlänge
 E : Ellenbogen (Bezugspunkt)



Mit dem Moment lässt sich die Kraft bestimmen, welche von der Wand auf den Körper ausgeübt wird.

Mit Betrachtung des Kontaktstelle mit dem Boden:

$$\vec{F}_{Wand} \cdot L_{Schulter} - \vec{F}_G \cdot L_{Schwerpunkt} = 0$$

$$\vec{F}_{Wand} = \frac{\vec{F}_G \cdot L_{Schwerpunkt}}{L_{Schulter}}$$

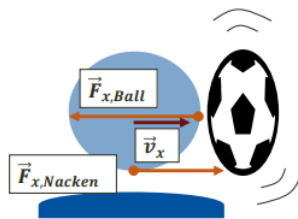
Je größer die Körperneigung, je größer die Kraft an der Wand und somit die für das Gleichgewicht erforderliche Reibung $\vec{F}_T$.

Teilsysteme am Beispiel Kopfball

Alle Prinzipien der klassischen Mechanik lassen sich auf ein **Teilsystem** beziehen, welches beliebig gewählt werden kann.



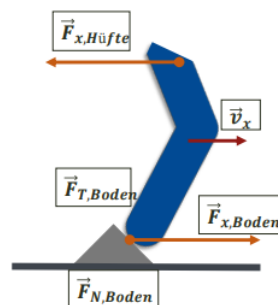
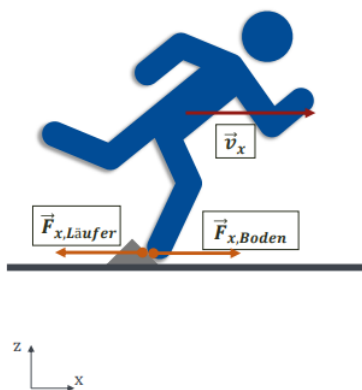
Die Definition eines Teilsystems kann in der Betrachtung biomechanischer Vorgänge nützlich sein.



$$\vec{F}_{x,Ball} + \vec{F}_{x,Nacken} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{x,Kopf}}{dt}$$

Teilsysteme am Beispiel Läufer

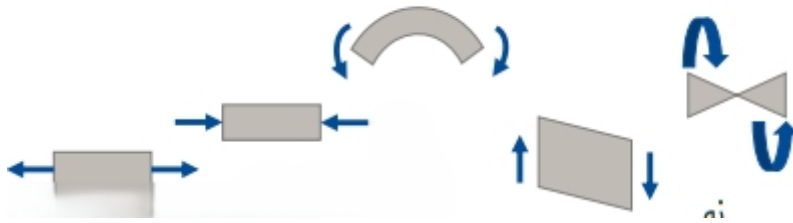
Betrachtung des Menschen im Sprint.



$$\vec{F}_{x,Boden} + \vec{F}_{x,Hüfte} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{x,Bein}}{dt}$$

Art von Kräften, Deformations- und Spannungszustände

Belastungsarten:



Zug:

- Übertragung in Seilen und Stäben
- zwei Nachbarquerschnitte entfernen sich voneinander.

Druck:

- Übertragung in Stäben oder Balken
- zwei Nachbarquerschnitte nähern sich einander an.

- Formen von **Normalkraftbelastung** → Kraft entlang der Schwerpunkts-Achse
- **Zugbelastungen:**
 - o Sehnen, Knochen, Bänder -> Sprung nach oben
- **Druckbelastung:**
 - o Knochen (Oberschenkelknochen, bis zu 14,7 kN)

Biegung:

- Verursacht durch Kräfte oder Momente quer zur Balkenachse
- zwei Nachbarquerschnitte werden gegeneinander verdreht → Balken wird teils verlängert und teils verkürzt.

- Die angreifende Kraft wirkt orthogonal zur Schwerpunkts-Achse und in einer Entfernung L zur Einspannung
- **Knochen:** Oberschenkelknochen

Schub:

- Verursacht durch Kräfte quer zur Balkenachse
- Auftreten einer Abscherbewegung.

- Die angreifenden Kräfte wirken parallel
- in verschiedene Richtungen
- Knorpel, Blutbestandteile, Endothel
 - o Knorpel bei Kniebewegung

Torsion:

- Verdrehung eines Stabs oder Balkens um die Stab- / Balkenachse
- Achse bleibt gerade

- Die angreifenden Kräfte verursachen ein Moment um die Achse des Körpers
- Knochen: Drehbewegung bei festem Stand (Drehung auf einem Bein)

Lagerart	Symbol	Freischnitt	Freiheitsgrade
Feste Einspannung			keine
Loslager			Drehung und Verschiebung
Festlager			Drehung
Führung			Verschiebung

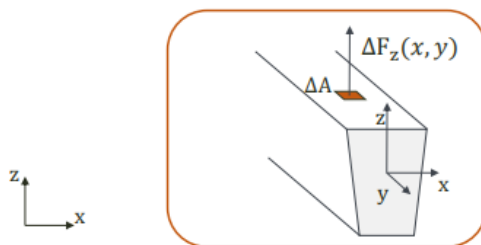
Spannungen

Spannungen sind, die auf einer gedachten Schnittfläche durch einen Körper verteilten inneren Flächenkräfte mit der Dimension Kraft pro Fläche.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Normalspannung σ :

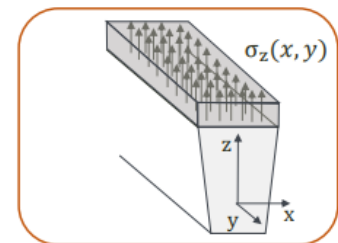
- Kraft, die **orthogonal** auf eine infinitesimale Flächeneinheit wirkt



$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z(x, y)}{\Delta A} = \sigma_z$$

Auf einer Teilfläche ΔA wirkt die senkrechte

Teilkraft ΔF_z als Funktion beider Koordinaten (x, y)

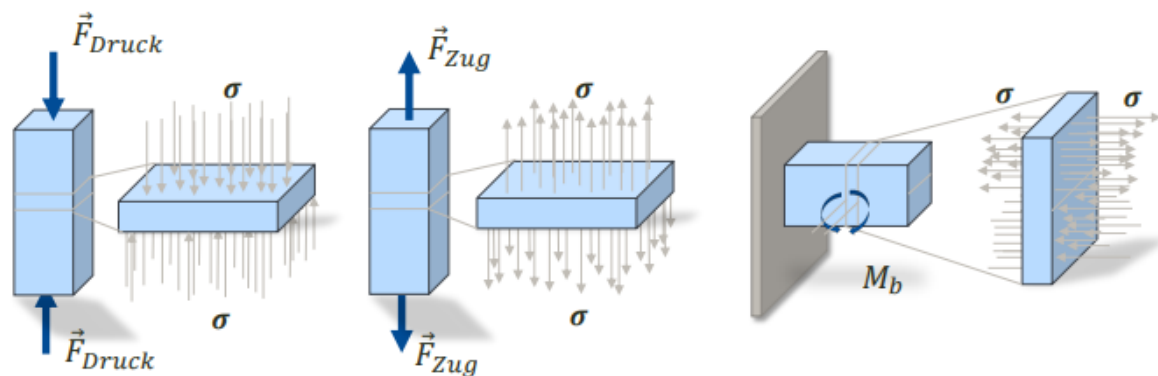


$$\int_A \sigma_z dA = F_z$$

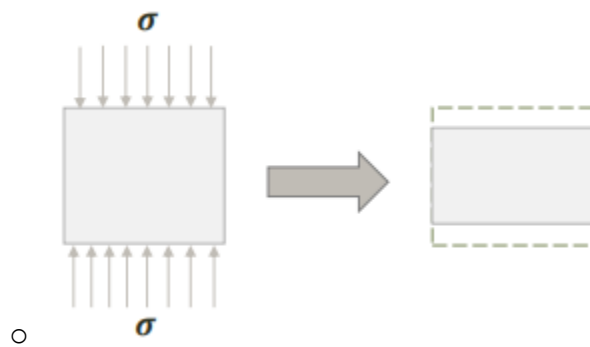
Orthogonale Kraft als Integral der

Normalspannung über die Oberfläche

- **Normalkräfte und Biegemomente führen zu Normalspannungen**

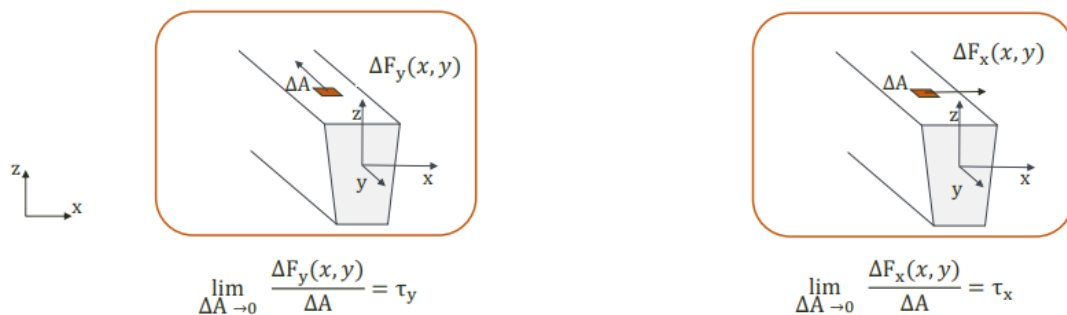


- **Längenänderungen**

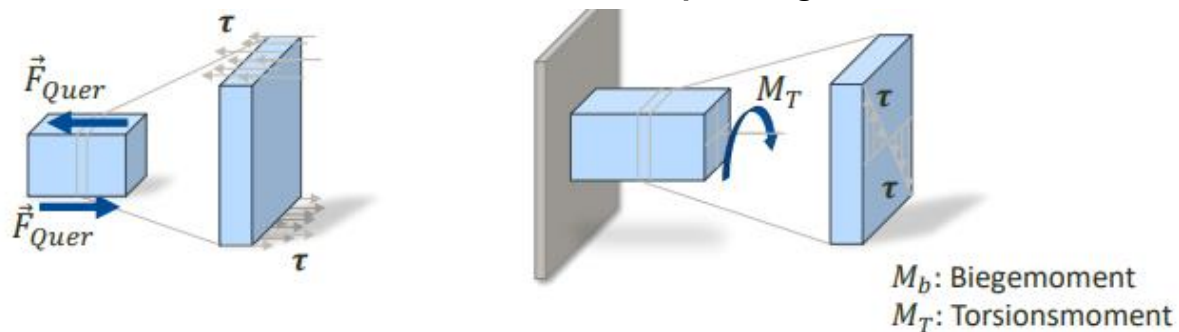


Schubspannung τ :

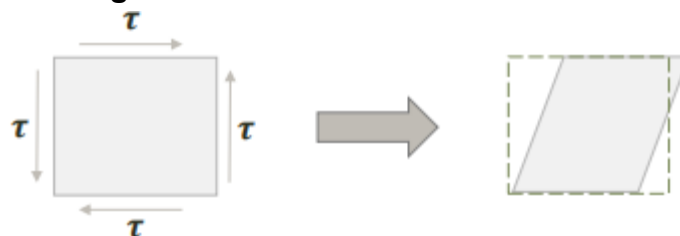
→ **tangentiale** Kraft, die sich auf eine infinitesimale Flächeneinheit auswirkt



- Auf einer Teilfläche ΔA wirken die tangentialen Teilkräfte ΔF_y und ΔF_x als Funktion beider Koordinaten (x, y) .
- **Querkräfte und Torsionsmomente führen zu Schubspannungen**



- **Winkeländerung**



Dehnung: räumliche Verlängerung eines Materials aufgrund von Krafteinwirkung
Stauchung: räumliche Verkürzung eines Materials aufgrund von Krafteinwirkung

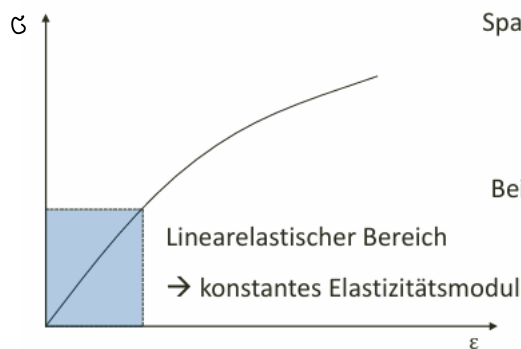
$$\varepsilon = \frac{\text{Länge nach Deformation} - \text{Länge vor Deformation}}{\text{Länge vor Deformation}} = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{mit } \Delta L = L_1 - L_0$$

Beispiel: auf den Knochen einwirkender Zug oder Druck rufen eine Längenänderung hervor.

Anmerkung: über längere Zeiten, Dehnung und Stauchung können **einen mechanischen Wachstumsreiz** hervorrufen. In dem Fall handelt es sich um einen mechanobiologischen Vorgang.

Das Hooksche Gesetz:

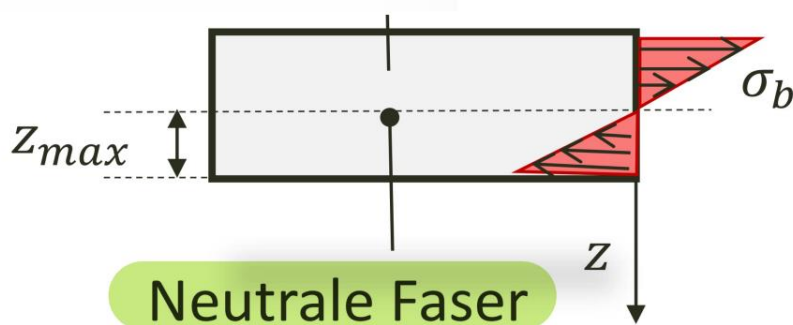


Der Elastizitätsmodul E stellt das Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung dar.

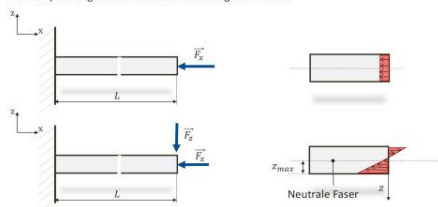
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Bei homogener Verteilung der Kraft $\vec{F}$ auf einer Fläche A

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\vec{F}}{A \cdot \varepsilon} \quad [E] = 1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa$$



Vorsicht: Bei einer überlagerten Normalkraft summieren sich die Normalspannungen, sodass die Normalspannung auf der neutralen Faser ungleich Null ist.



Durchbiegung von Balken:

$$M_b = \frac{E \cdot I}{\rho}$$

I : Flächenträgheitsmoment
 ρ : Krümmungsradius

$\sigma_b \rightarrow$ außen
 compression
 $\sigma_b \rightarrow$ innen
 compression

Biegespannung im Balken:

$z_{\max}$: größte Distanz zw. Randfaser & neutrale Faser

Betrachten wir den Biegemoment M_b

$$M_b = \vec{F} \cdot L \text{ [Nm]}$$

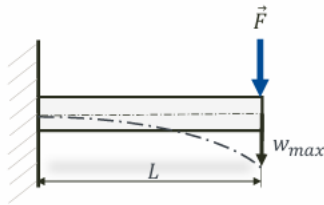
Die **maximale Biegespannung** ergibt sich aus:

$$\sigma_{b,\max} = \frac{M_b}{W} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

aus

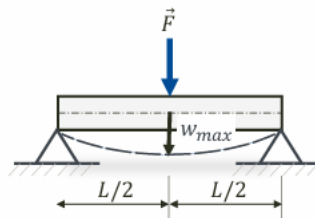
$$W = \frac{I}{z_{\max}} \text{ [m}^3\text{]}$$

Biegelinie → Verformte Balkenachse



Eingespannter Balken mit Einzellast

$$f_{\max} = \frac{\vec{F} \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$



Zweifach gelagerter Balken mit Einzellast

$$f_{\max} = \frac{\vec{F} \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Druck

$$\frac{F}{A}$$

Skalare Größe, welche das Verhältnis zwischen einer Normalkraft und einer Fläche (Normalspannung) darstellt, wobei die Kraft in alle Raumrichtungen gleichermaßen wirkt

→ Spezialfall der mechanischen Spannung im Fluid

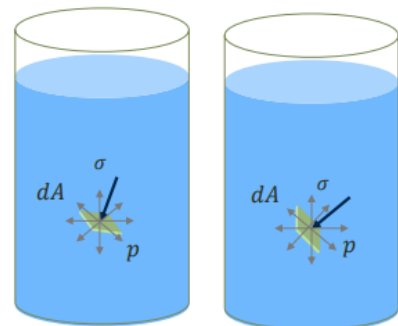
Die **Normalspannung (Vektor)**

- bleibt unverändert im Betrag
- ändert Richtung

Der **Druck (Skalar)**

- bleibt unverändert im Betrag

mit Änderung der Orientierung des Flächenelements dA



Infinitesimales Flächenelement

Compliance

Beschreibt Dehnbarkeit von Hohlkörpern

Entspr. Verhältnis zwischen Volumen- & Druckänderung

$$C_{abs} \left[\frac{m^4 \cdot s^2}{kg} \right] = \frac{\Delta V}{\Delta p_t}$$

wobei ΔV die Volumenänderung und Δp_t die Änderung des transmuralen Druckes darstellen.

Außen innen

Der **transmurale Druck** p_t entspricht dem Unterschied zwischen:

- Druck innerhalb des zylindrischen Hohlkörpers p_I und
- Druck außerhalb des zylindrischen Hohlkörpers p_A

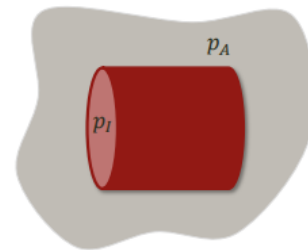
$$p_t = p_I - p_A$$

Im Körper wird in der Regel folgendes angenommen:

Druck im Äußeren des System = Atmosphärendruck

$$p_A = 0 \text{ (Relativer Druck)} \rightarrow p_t = p_I$$

Anmerkung: In den kommenden Folien $p_I = p$



Bei der **relativen Compliance** C_{rel} steht die Volumenzunahme im Verhältnis zu $V_0 = V(p = 0)$

$$C_{rel} \left[\left(\frac{kg}{m \cdot s^2} \right)^{-1} \right] = \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{1}{\Delta p}$$

mit $\frac{\Delta V}{V_0}$ (%): prozentuale Volumenzunahme

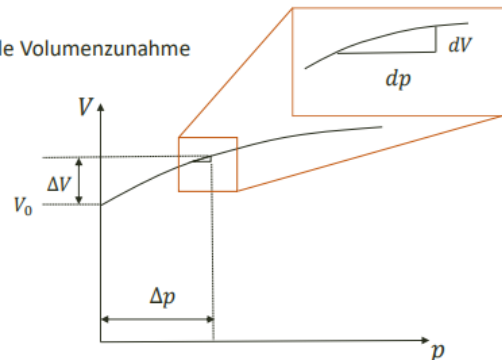
↳ Anfang Ende

Mit Betrachtung von infinitesimalen Volumenänderungen ergibt sich die **infinitesimale relative Compliance**:

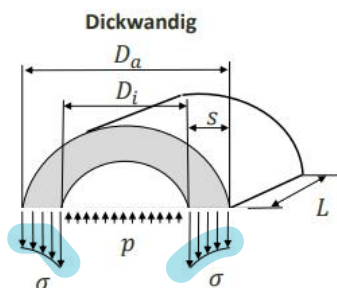
$$dC_{rel} \left[\left(\frac{kg}{m \cdot s^2} \right)^{-1} \right] = \frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dp}$$

mit $\frac{dV}{V}$ (%): prozentuale infinitesimale Volumenzunahme

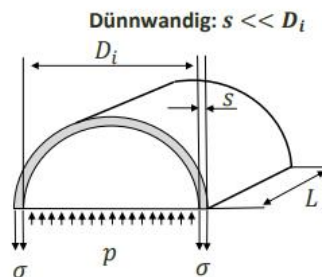
- Die infinitesimale Compliance lässt sich bei Berechnungen im Fall nicht-linearelastischer Verhältnisse einsetzen
- Über Integralrechnung lässt sich eine Volumenzunahme über die Compliance-Kurve bestimmen



- Bei genauer Betrachtung der Spannungsverteilung ergeben sich in **radialer Richtung abnehmende Normalspannungen σ** .
- Bei **dünnwandigen** zylinderförmigen Modellen ($s \ll D_i$, in der Regel $s < 0,05 \cdot D_i$) lässt sich σ_θ mit guter Annäherung als konstant über die Wandstärke betrachten



Heterogene Verteilung von σ über die Wandung



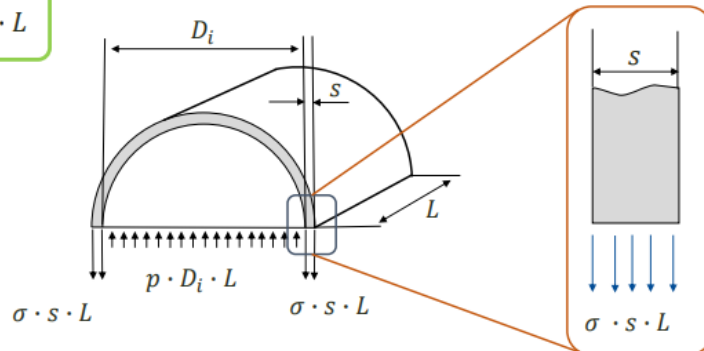
Homogene Verteilung von σ über die Wandung

s : Wandstärke
 D_i : Innendurchmesser
 D_a : Außendurchmesser
 L : Länge des Modells

!! Dünnwandig: Spannungsverteilung konstant

Über eine Bilanzierung der Kräfte und unter der Annahme eines konstanten σ ($s \ll D_i$) resultiert:

$$2 \cdot \sigma \cdot s \cdot L = p \cdot D_i \cdot L$$



Anmerkung: durch die Bilanzierung betrachten wir die Verformung im statischen Zustand.

- Bei einem linear elastischen Verhalten gilt eine lineare Beziehung zwischen Dehnung und Spannung:
 $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich eine Beziehung zwischen der Wanddehnung und dem angelegten äußeren Druck, die sogenannte **Laplace-Gleichung**:

$$2 \cdot \sigma \cdot s = p \cdot D_i \rightarrow 2 \cdot E \cdot \varepsilon \cdot s = p \cdot D_i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s}$$

Das Verhältnis zwischen der Wanddehnung und dem Druck innerhalb des zylinderförmigen Modells hängt von den geometrischen und materiellen Eigenschaften des Modells ab.

Bei welchem Reifen brauchen wir den höchsten Druck, um die gleiche Spannung zu bekommen?

Was könnte der Grund sein?



höherer Druck

$$\varepsilon = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s}$$

$$\sigma = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot s}$$

je größer Durchmesser $\rightarrow$ kleinerer Druck für gleiche Spannung

- Zur Berechnung der Compliance betrachten wir die Volumenänderung:

$$\Delta V = V(D_i) - V(D_{i,0}) = \frac{\pi \cdot (D_i^2 - D_{i,0}^2)}{4} \cdot L$$

- Basierend auf der **Laplace-Gleichung** kann der **Zusammenhang zwischen dem Druck und dem Modelldurchmesser** formuliert werden:

$$\varepsilon = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s} \Rightarrow \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s} = \frac{D_i - D_{i,0}}{D_{i,0}} \Rightarrow p(D_i) = \frac{2 \cdot E \cdot s \cdot (D_i - D_{i,0})}{D_{i,0} \cdot D_i}$$

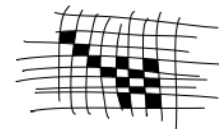
$$C_{abs} = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{\pi \cdot (D_i^2 - D_{i,0}^2)}{4} \cdot L \cdot \frac{D_i \cdot D_{i,0}}{2 \cdot E \cdot s \cdot (D_i - D_{i,0})} = \frac{\pi \cdot (D_i + D_{i,0}) \cdot D_i \cdot D_{i,0} \cdot L}{8 \cdot E \cdot s}$$

$$C_{rel} = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta p} = \frac{(D_i^2 - D_{i,0}^2)}{D_{i,0}^2} \cdot \frac{D_i \cdot D_{i,0}}{2 \cdot E \cdot s \cdot (D_i - D_{i,0})} = \frac{(D_i + D_{i,0}) \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s \cdot D_{i,0}}$$

Vereinfachte Compliance-Formel – dünnwandigen zylinderförmigen Modell

Für **kleine Durchmesservariationen** ($D_i - D_{i,0} \ll D_{i,0}$) und somit $D_i \approx D_{i,0}$ definieren wir den Durchmesser $\bar{D}_i$ als Durchschnitt zwischen beiden Durchmessern D_i und $D_{i,0}$:

$$\bar{D}_i = \frac{D_i + D_{i,0}}{2} \text{ mit } D_i \approx D_{i,0} \rightarrow \bar{D}_i = \frac{D_{i,0} + D_{i,0}}{2} \approx D_{i,0}$$



Es ergibt sich eine **vereinfachte Form der absoluten Compliance**:

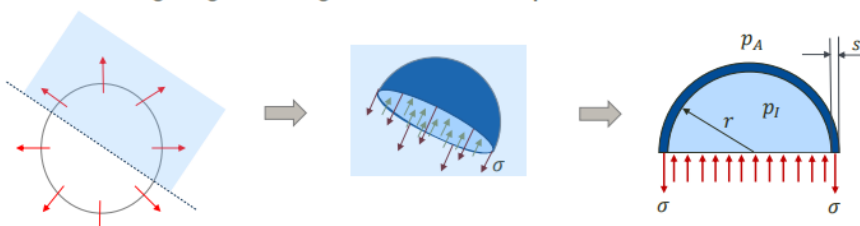
$$C_{abs} = \frac{\pi \cdot (D_i + D_{i,0}) \cdot D_i \cdot D_{i,0} \cdot L}{2 \cdot 4 \cdot E \cdot s} = \frac{\pi \cdot D_{i,0} \cdot D_{i,0} \cdot D_{i,0} \cdot L}{4 \cdot E \cdot s} \Rightarrow C_{abs} = \frac{\pi \cdot D_{i,0}^3 \cdot L}{4 \cdot E \cdot s}$$

und der **relativen Compliance**:

$$C_{rel} = \frac{(D_i + D_{i,0}) \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s \cdot D_{i,0}} = \frac{D_{i,0} \cdot D_{i,0}}{E \cdot s \cdot D_{i,0}} \Rightarrow C_{rel} = \frac{D_{i,0}}{E \cdot s}$$

Laplace-Gleichung eines kugelförmigen Modells

Auch bei kugelförmigen Strukturen besteht ein Zusammenhang zwischen **Normalspannung** σ und **Dehnung** ε . Im Fall einer Halbkugel ergibt sich folgende **modifizierte Laplace-Formel**.



$$(p_I - p_A) \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \pi \cdot r \cdot s \cdot \sigma$$

$$p_I - p_A = \frac{2 \cdot \sigma \cdot s}{r} = \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot s \cdot E}{r}$$

nice to know

Hilfreiches Muskelmodell

Überführung eines biologischen Muskels in ein vereinfachtes mechanisches Modell.

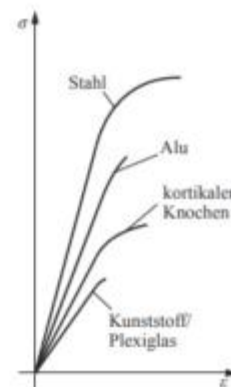


Der Muskel wird als kontraktiles Element dargestellt

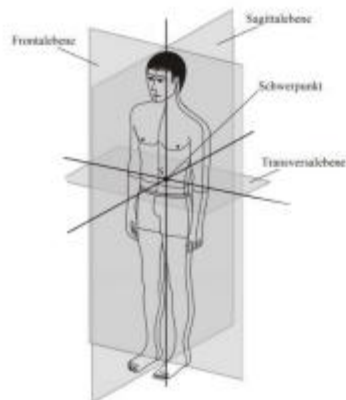
Bindegewebe und Sehnen verhalten sich mechanisch gesehen wie Federn:

- Anfang und Ende des Muskels: Sehnen
- Mittig: Muskel mit umgebendem Bindegewebe

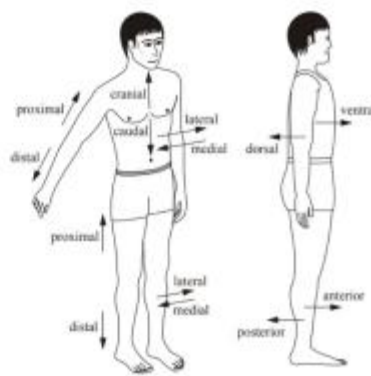
Material	Elastizitätsmodul (in MPa)
Knochen (Kortikalis)	17.000 – 27.000
Knochen (Spongiosa)	100 – 2.000
Bänder	2.000
Sehnen	2.000
Aluminium (rein, weich)	70.000
Stahl	210.000
Titan	110.000



Anatomische Ebene unterstützen eine eindeutige Bezeichnung von Position und Richtung.



Modifiziert nach Fickert, Biomechanik – Grundlagen 2011



Basierend: Biomechanik – Grundlagen und Anwendungen auf dem menschlichen Sportapparat 2013

Mechanisches Verhalten von festem Gewebe

Gewebe:

- Aus Zellen
- extrazelluläre, an Protein reichen Matrix

Kräfte:

- von **Proteinen innerhalb des Zytoplasmas** übertragen werden (Membran-Membran, Membran-Nucleus)
- **zwischen Zellen und extrazellulären Matrix**
- **durch Fluidbewegung innerhalb und außerhalb der Zellen**

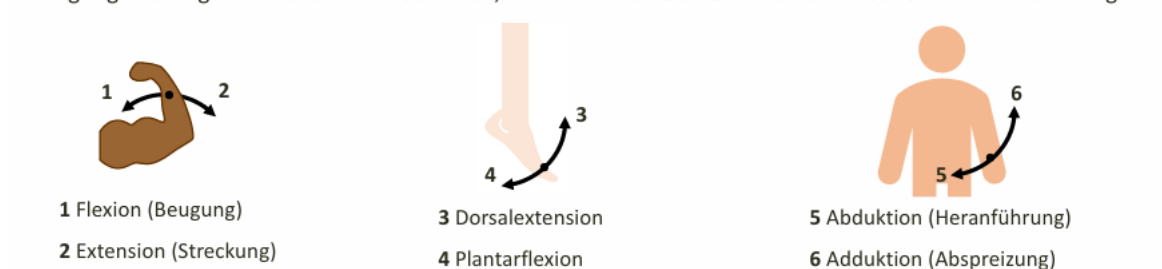
Gewebe als Kontinuum / Gewebemodell

- Ununterbrochener Körper
- Keine abrupte Änderung der Materialeigenschaften
- Über physikalische Größen definiert (Druck, Dichte, Geschwindigkeit, E-Modul)

Bewegungsapparat:

- ➔ Stützapparat
 - verleiht Form
 - ermöglicht Bewegung und Kraftübertragung
- Skelett mit Knochen und Gelenken
- Muskeln
- Sehnen und Bänder

Bewegungen erfolgen im Bereich der Gelenken, an denen die **Rotation** zwei von **Knochen** zueinander erfolgt.



KNOCHEN

→ Mechanische Stütze für Körper und schützen Skelett & innere Organe



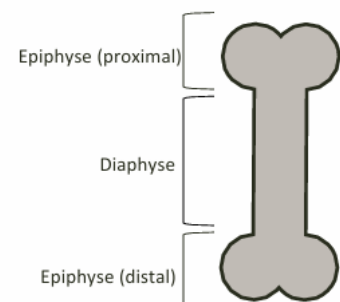
Knochen-Arten:

- **Platte Knochen:** Schädelknochen
- **Luftgefüllte Knochen** (Nasennebenhöhlen)
- **Unregelmäßige geformte Knochen** (Wirbelkörper)
- **Kurze Knochen** (Hand- und Fußwurzelknochen)
- **Röhrenknochen** (Oberschenkelknochen)

Aufbau:

Knochengrundsubstanz:

- 2/3 anorganische Matrix; hauptsächlich Hydroxylapatit-Kristalle
- 1/3 organische Matrix aus Proteoglykanen, Glykoproteinen und Kollagenfasern



- Kombination aus druckfesten Kristallen und zugfesten Kollagenfibrillen
→ **Biegeester Knoche**

Dreilagig:



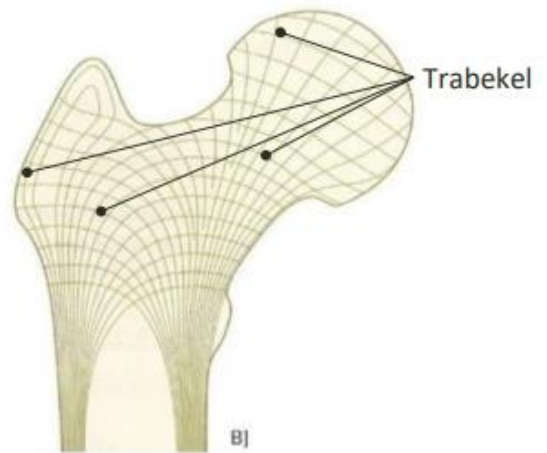
- **Kompakta** (auch Kortikalis) und **Spongiosa**
 - → bei stoßartiger Belastung für **maximale Energieaufnahme**, **minimale Knochenschädigung** (Schutz von umgebenen Organen)
- **Periost** (auch Knochenhaut) besteht aus Zellen und Bindegewebe
 - **sorgt für die Ernährung und Regeneration des Knochens**

Spongiosa:

- **Trabekel** (Knochenbälkchen) entlang der Lastrichtung (**Trajektorie**)
- **Trajektorien** sind graphisch darstellbare Linien der größten Druck- und Zugbelastung im Knochen
- Trajektorielle Ausrichtung der Trabekel entsteht durch Belastung



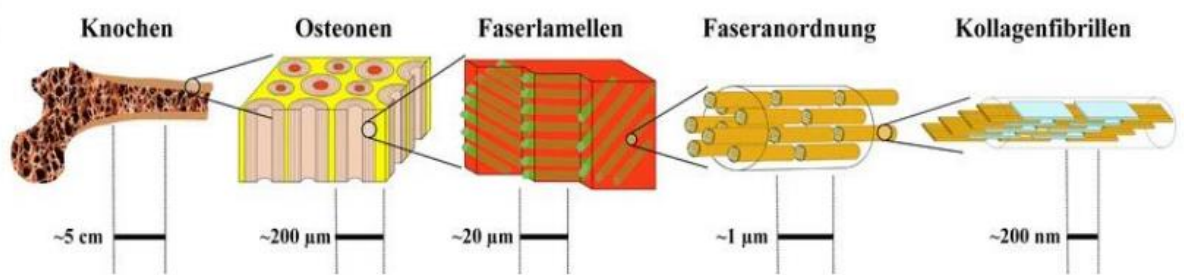
A)



B)

Kompakta:

- **Hierarchische Anordnung**
- **Deformationen** möglich → durch relative Bewegung von Fasern zueinander & von Kollagenfibrillen innerhalb Faser
- **Apatitkristalle**, welche im Kollagen eingebettet sind, sorgen für die Härte des Gewebes



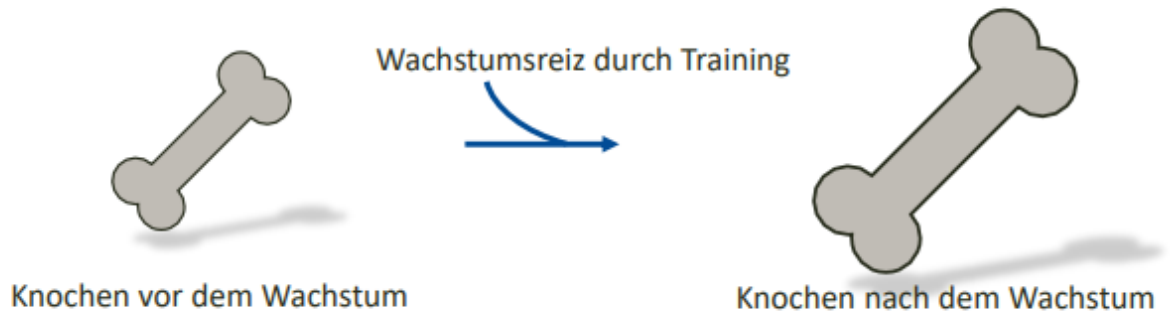
Verstärkungsmechanismen

- Belastung kann zu Verstärkungsmechanismen führen (mechanischer Wachstumsreiz)

Knochen wird auf Zug, Druck, Biegung, Dehnung und Torsion belastet

- > 0,10 % Dehnung: verstärkte Knochenbildung
- < 0,005 % Dehnung: Knochenabbau

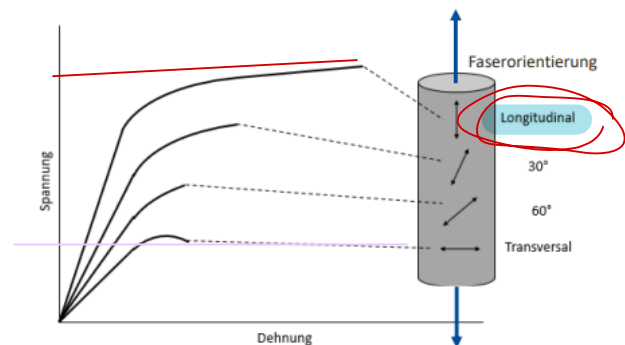
nicht Schub



Mechanische Parameter: Anisotropie (Orientierung)

Durch Heterogenität der Fasern und Osteone

- ➔ Maximale Spannung und maximale Dehnung bei longitudinaler Faserorientierung.
- ➔ Abnehmende maximale Spannung und maximale Dehnung bei zunehmendem Winkel der Faserorientierung.
- ➔ Minimale Spannung und minimale Dehnung bei transversaler Faserorientierung.



Gelenke:

- verbinden Knochen beweglich miteinander
- können beliebige Kräfte und Momente übertragen
- haben zumindest einen rotatorischen Freiheitsgrad

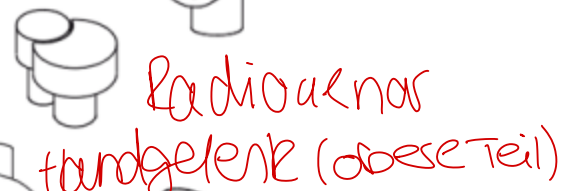
- **Kugelgelenk** mit drei Freiheitsgraden



- **Scharniergelenk** mit einem Freiheitsgrad



- **Zapfengelenk** mit einem Freiheitsgrad



- **Eigelenk** mit zwei Freiheitsgraden



- **Sattelgelenk** mit zwei Freiheitsgraden



Muskeln:

Die Muskulatur ermöglicht es Teile des Körpers in Bewegung zu versetzen. Hierzu zählen auch Organe wie die Lunge und das Herz

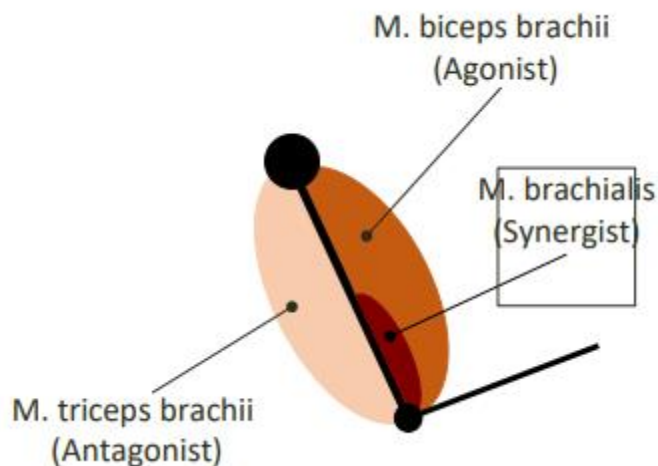
Muskelfasern -> Muskelfibrillen -> Sarkomer (mehrere kontraktile Einheiten) aus Aktin und Myosin

Muskelkontraktion:

- Elektrische Stimulation durch Nervenzellen
- Chemische Botenstoffe

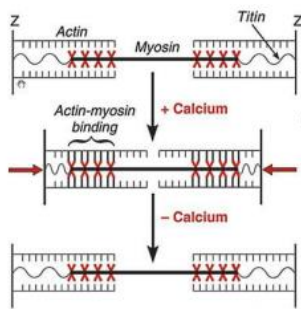
Zusammenspiel:

- **Agonist:** ausführender Muskel
- **Antagonist:** entgegengesetzter Muskel zum Agonist
- **Synergist:** Unterstützung des Agonisten

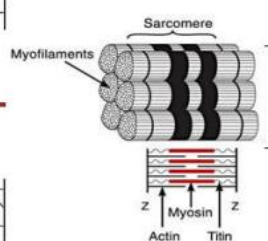


Muskelkontraktion:

1. Elektr. Reiz -> Depolarisation
2. Einstrom von Kalzium in Muskelzelle
3. Verschiebung der Myofilamente (Aktin Myosin) unter Verwendung von ATP



Das Sarkomer verkürzt sich von einer Anfangslänge von $\sim 2,0 \mu\text{m}$ um ca. $0,4 \mu\text{m}$.



Die Myofibrille, bestehend aus angereichten Sarkomeren, verkürzt sich entsprechend. Über die Verbindung von Myofibrillen mit der Zellmembran erfolgt die Verkürzung der Muskelzelle.

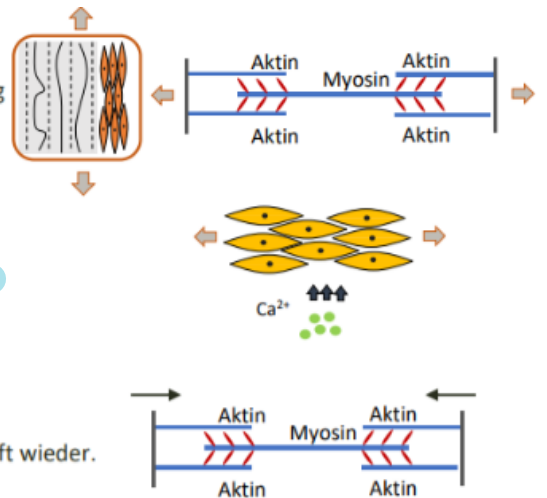
Dehnung

beeinflusst die Orientierung der Verbindungen zwischen den Myosin- und Aktinfilamenten

- ➔ Es resultiert eine Erhöhung der Kontraktionskraft bei einer erhöhten Streckung der Myofibrillen

Bis zu einer Sarkomerlänge von ca. $2,5 \mu\text{m}$ führt die Streckung der Sarkomere in den Myofibrillen zu folgenden Effekten:

- günstigere Überlappung der Aktin- und Myosinfilamente zur Krafterzeugung (optimal bei ca. $2,5 \mu\text{m}$) *=o Länge*
- Erhöhung der Ca^{2+} -Sensitivität und somit Ca^{2+} -Einstrom



Über eine kritische Sarkomerlänge (ca. $2,5 \mu\text{m}$) sinkt die Kraft wieder.

➔

Kraft-Längen-Relation

- ➔ Querbrücken zwischen Aktin und Myosin ermöglichen Kraftentwicklungen im Muskel

a) Große Vordehnung des Sarkomers; fehlende Überlappung zwischen Aktin und Myosin

➔ Kein Kraftaufbau möglich

b) Kürzere Sarkomerlänge; Ermöglichung eines Überlappungsbereiches zwischen Aktin und Myosin

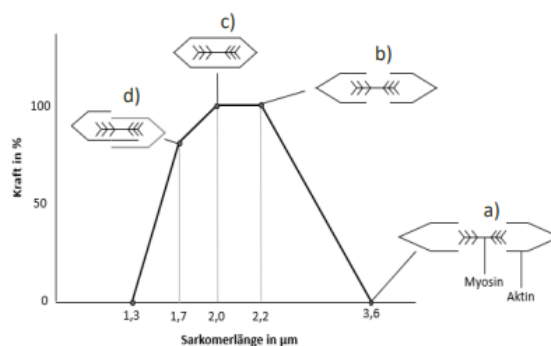
➔ Linearer Anstieg der Sarkomerlänge

c) Weitere Verkürzung der Sarkomerlänge führt zu keiner Kraftsteigerung mehr

➔ Werte bleiben maximal

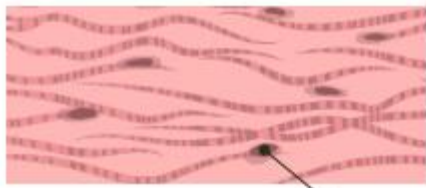
d) Aktinfilamente schieben sich übereinander, geringerer Überlappungsbereich

➔ Abnahme der Kraft



Muskel-Typen:

- **Glatte Muskulatur (unwillkürlich)** *nicht steuern*



• Zellkerne

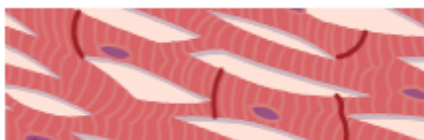
- - Langsame Bewegung
 - Möglichkeit der langen Kontraktion
 - Bsp.: Wände der Eingeweide und Blutgefäße

- **Quergestreifte Skelettmuskulatur (willkürlich)**



- - Muskulatur des Bewegungsapparates
 - Skelettmuskulatur Typ I:
 - langsames Zucken, langsames Ermüden, für Dauerleistung
 - Skelettmuskulatur Typ II:
 - schnelles, kurzes und kraftvolles Zucken, für kurzfristige Leistung

- **Herzmuskulatur (unwillkürlich)**



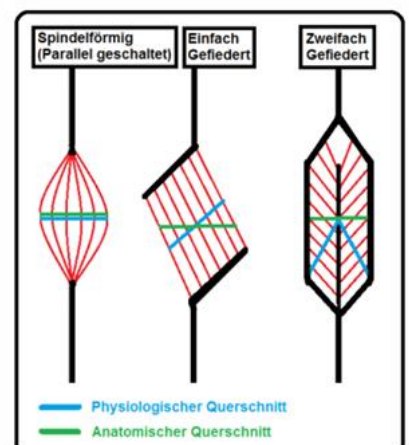
- - Übergangsform zwischen glatter und quergestreifter Muskulatur

Faseranordnung:

Muskelfaseranordnung ist ausschlaggebend für die Hubhöhe und die Kraftentwicklung des Muskels

Querschnitt:

- **Anatomischer Querschnitt:** Senkrecht zur Längsachse
- **Physiologischer Querschnitt:** Gesamtquerschnitt



Arbeit und Leistung:

$$W_M = F_M \cdot \Delta L \quad \text{Muskelarbeit}$$

$$P_M = F_M \cdot v_M \quad \text{Muskelleistung}$$

Kraft- und Dehnungsverhalten:

- Isotonische Kontraktion

- **Muskelverkürzung bei gleichbleibender Spannung**
- Bsp.: Halten eines Gewichtes in der Hand und gleichzeitige Beugung des Armes

- Isometrische Kontraktion

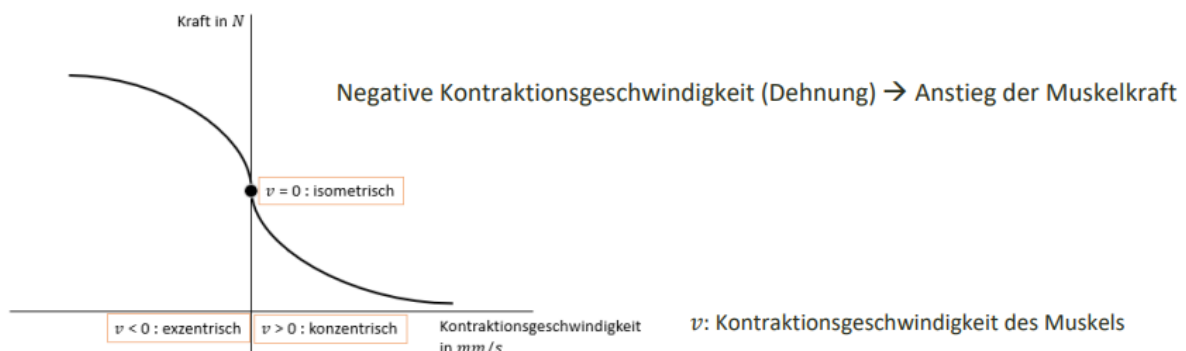
- **Gleichbleibende Muskellänge bei sich verändernder Spannung**
- Bsp.: Versuchen einen schweren Gegenstand hochzuheben

- Auxotonische Kontraktion

- **Änderung von Muskellänge und –spannung**
- Bsp.: Laufen

Exzentrisch: Verlängerung des Muskels und Erhöhung der Muskelspannung

Konzentrisch: Verkürzung des Muskels und Verringerung der Spannung



Gefäße:

→ Blutgefäße sind in bis zu drei Lagen (tunica) aufgebaut, welche in Wechselwirkung miteinander stehen

Aufbau:

- Tunica Intima

- Transport von Gasen und Nährstoffen
- Freisetzung von Botenstoffen
- Regelung der Hämostase

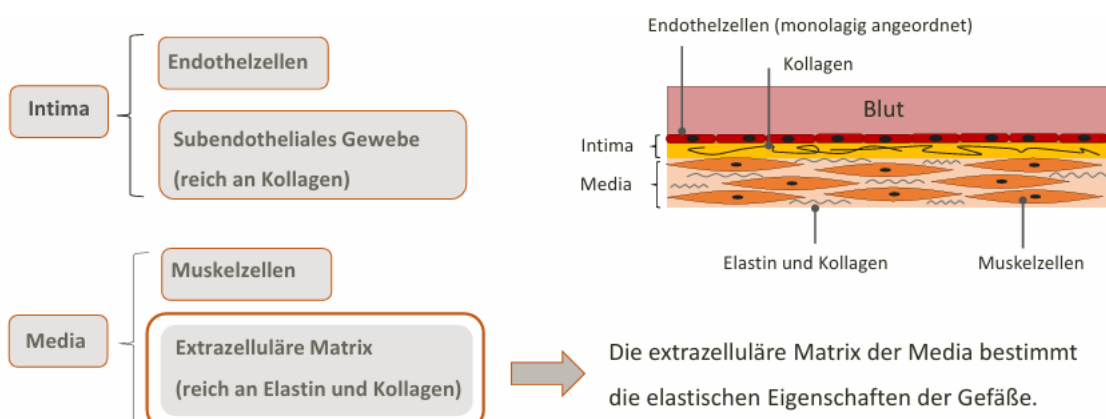
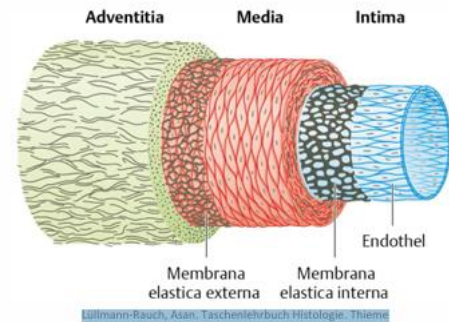
- Tunica Media

- Regulation des Widerstandes über den Spannungszustand (Gefäßtonus)

- Tunica Adventitia

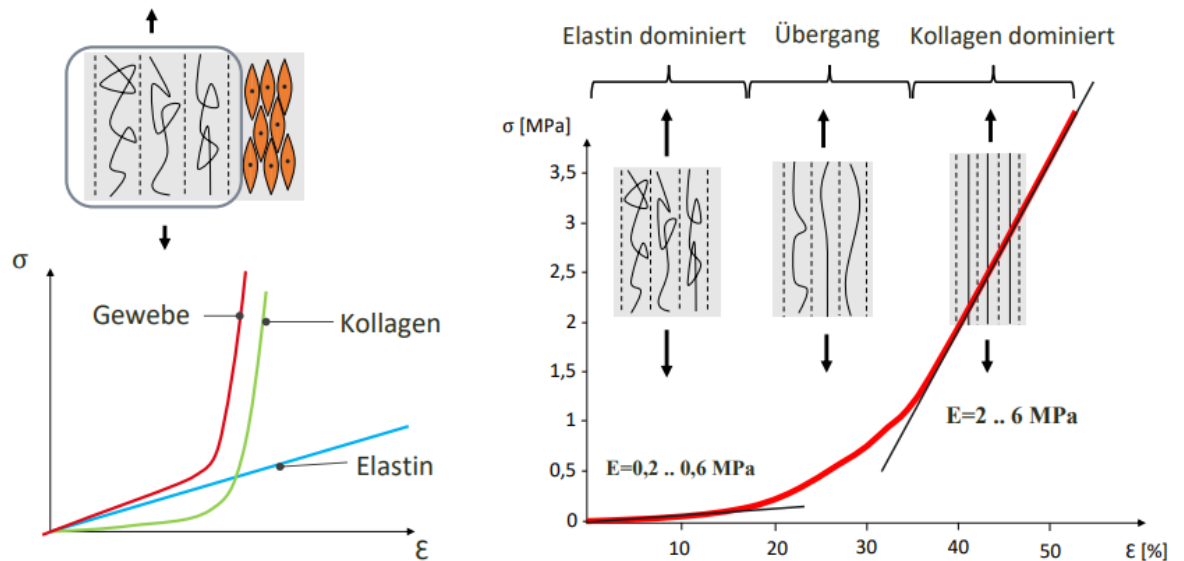
- Mechanische Stabilisierung
- Verbindung mit dem Außengewebe

→ Zwei Membrane (Elastica interna und externa) trennen die Lagen voneinander



Eigenschaften der Media:

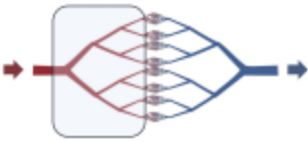
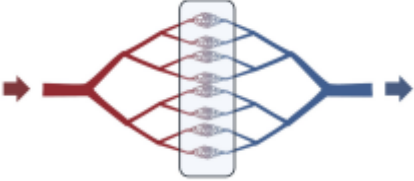
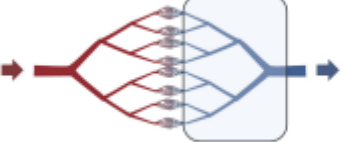
- Elastin-Fasern sind geradlinig gestreckt und weisen bei Dehnung ein linear-elastisches Verhalten auf.
- Kollagen-Fasern strecken sich erst bei Dehnung und resultieren in einem nicht linear-elastischen Verhalten



Unterscheidung der Gefäße

• Funktion

- Transportprozesse (Konvektive und Diffusive)
- Blutspeicherefähigkeit

Arterien und Arteriolen	Kapillaren	Venen und Venolen
 - Konvektiver Bluttransport bis zu Kapillaren - Dämpfung der Blutdruckkurve - Regelung des Blutflusses und der Gewebepfusion über Strömungswiderstand	 - Stofftransport zwischen Blut und Gewebe → durch Gefäßwand - Regelung der Gewebepfusion	 - Konvektiver Bluttransport aus Kapillaren in Herz - Speicherung von Blutvolumen, Kompensation von Volumenschwankungen

- Dimensionen

- Durchmesser des Lumens
- Länge
- Wandstärke

Elastische Arterien

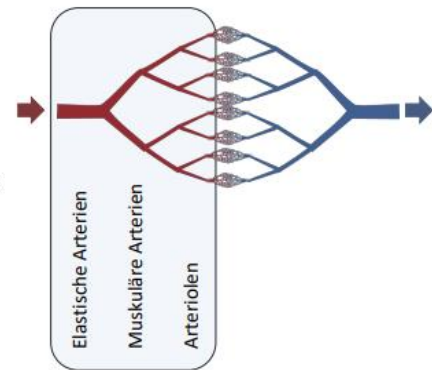
- Durchmesser $> 10 \text{ mm}$, Wandstärke $1 - 2 \text{ mm}$ (Aorta sowie großlumige Gefäße wie die Halsschlagader)

Muskuläre Arterien

- $0,1 \text{ mm} < \text{Durchmesser} < 10 \text{ mm}$, Wandstärke $\sim 0,5 - 1 \text{ mm}$

Arteriolen

- Durchmesser $< 0,1 \text{ mm}$, Wandstärke $\sim 20 - 50 \mu\text{m}$

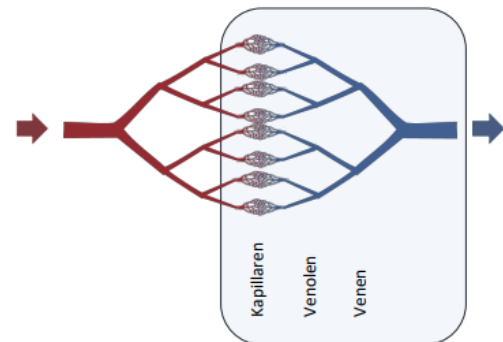


Kapillaren

- Durchmesser $< 10 \mu\text{m}$, Wandstärke $1 \mu\text{m}$
- Keine Muskelschicht, diffusiver und aktiver Transport mit dem umliegenden Gewebe

Venolen und Venen

- Durchmesser $\sim 20 \mu\text{m}$, Wandstärke $\sim 2 \mu\text{m}$ (Venolen)
- Durchmesser $\sim 0,1 - 5 \text{ mm}$, Wandstärke $\sim 500 \mu\text{m}$ (Venen)
- Durchmesser $\sim 30 \text{ mm}$, Wandstärke $\sim 1,5 \text{ mm}$ (Hohlvene)



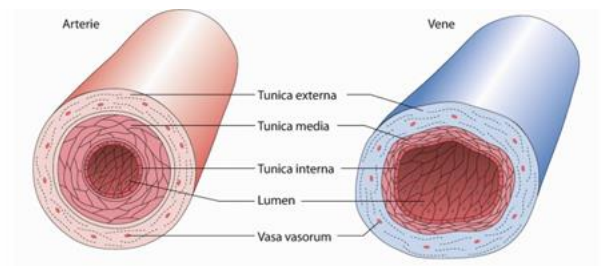
• Mechanische Eigenschaften

- Elastisches Verhalten (passiv)
- Muskelkontraktion (aktiv)

Aufbau Arterie vs. Vene

Arterien

- stark geprägte Tunica media
- widerstehen hohe Drücke
- regeln den Flusswiderstand
 - **Elastische Arterien:**
 - überwiegend passiv
 - dehnen sich bei sich ändernden Druck während des Herzzyklus
 - **Muskuläre Arterien:**
 - Aktiv
 - Über Muskelkontraktion wird der Flusswiderstand geregelt



Venen

- dünnere Muskelschicht
- niedrigen Drücken ausgesetzt
- passiv

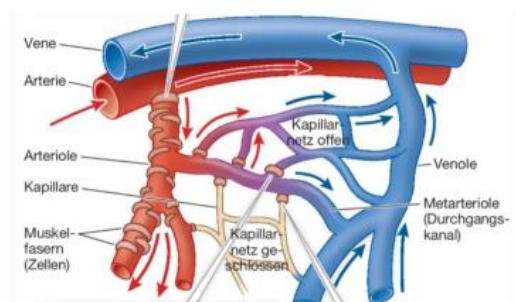
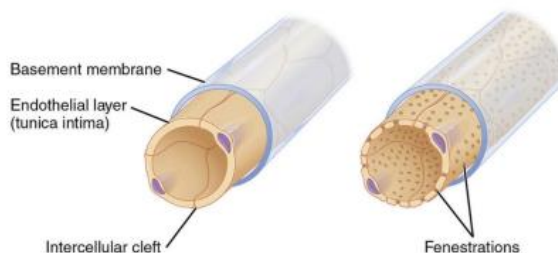
Venenklappen:

Venenklappen unterstützen die unidirektionale Strömung

- ➔ fördern den Blutrückfluss zum Herz.
 - Strömung grundsätzlich kontinuierlich
 - Pumpfunktion von den Muskeln oder anliegenden Arterien bereitgestellt
 - Keine muskuläre Arbeit
 - passiv

Aufbau der Kapillaren:

- aus einer Lage von **Endothelzellen**
- stabilisiert durch eine **Basalmembran**
 - **Fenestrierung** zwischen Zellen ermöglichen Transport von Flüssigkeit zwischen Blut und Gewebe
 - Einzelne **Muskelzelle** sind sowohl an den Arteriolen als auch an dem Eingang der Kapillaren (präkapillärer Sphinkter) angeordnet → sorgen für Regelung der Gewebepfusion



Mechanische Belastung in Gefäßen:

Blutfluss → Belastungen in Form von **Blutdruck** und **Schubspannung**

Wichtig für

- Regelungsmechanismen
- Entstehung pathologischer Zustände wie Artherosklerose und Gefäßdefekte

Blutdruck ist abhängig von	Schubspannung abhängig von
- Höhe - Blutvolumenstrom - Strömungswiderstand der Gefäße	- Blutvolumenstrom - Gefäßdimensionen

Gefäßreaktion: Lumen der Blutgefäße

Das Lumen der Blutgefäße verändert sich bei einer Änderung der Flussrate oder des Blutdrucks. Diese Veränderung basiert auf:

- **Biomechanische Abläufe (Kraft → Deformation)**
 - Der **Blutdruck** weitet das Gefäß entsprechend dessen elastischen Eigenschaften (passives Verhalten, Laplace-Formula).
 - Die **Muskelkontraktion** erhöht die Wandspannung und verringert das Gefäßlumen (aktives Verhalten)
 - **Mechanobiologisches Verhalten**
 - **Blutdruck und Schubspannungen** an der Gefäßwand führen zu einer Beanspruchung von Endothelzellen und Muskelzellen
 - Über biochemische Mechanismen werden die Muskelzellen gesteuert (kurzzeitige Reaktion) und Gewebe aufgebaut (langzeitige Reaktion)
- ➔ Außerdem spielen **Nervensignale und Botenstoffe** eine Rolle in der Gefäßregelung

Biomechanik des Blutgefäßes: passives & aktives Verhalten

Biomechanik des Blutgefäßes: Passives und aktives Verhalten

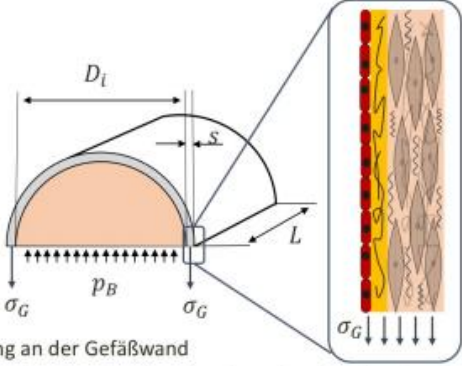
Biomechanik

Wenn die Muskelzelle nicht kontrahieren, ist das Gefäßverhalten passiv.

Die Spannung in der Gefäßwand ergibt sich aus dem Laplace-Gesetz (Betrachtung als Kontinuum).

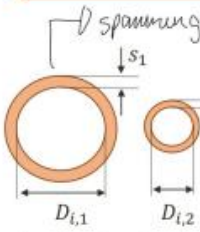
Die Tunica Media, bestehend aus Kollagen und Elastin, bestimmt das Verhalten.

Weitere Gefäßlagen und die zelluläre Bestandteile spielen eine untergeordnete Rolle



Welches Gefäß erfährt die höchste Spannung beim gleichen Blutdruck?

Spannung größer



$D_{i,1} = 2 \cdot D_{i,2}$

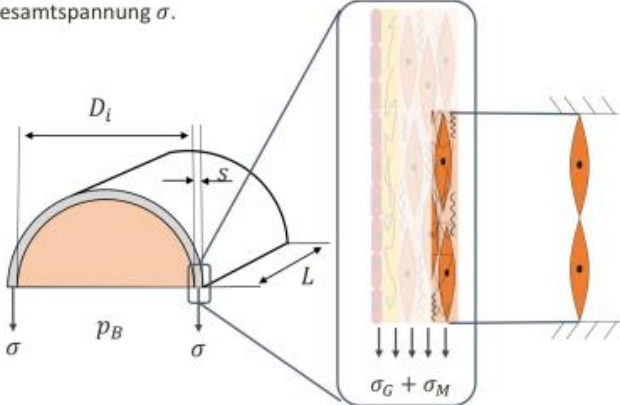
$s_1 = 1,5 \cdot s_2$

σ_G : Spannung an der Gefäßwand

Wenn sich die Muskelzelle kontrahieren, ist das mechanische Gefäßverhalten aktiv.

Die sich kontrahierenden Muskelzellen üben eine Kraft, welche die Spannung σ_M hervorruft.

Die Summe von beide Spannungen σ_M und σ_G , welche aus der passiven Gewebedehnung resultiert, ergeben die Gesamtspannung σ .



$$\sigma = \sigma_G + \sigma_M = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot s}$$

Windkessel Effekt

Der Windkessel Effekt bezieht sich auf die **Speicherung von Blut über passives Gefäßdehnung**.

Die **Arterienelastizität** nimmt Einfluss auf den örtlichen Verlauf des Blutdruckes:

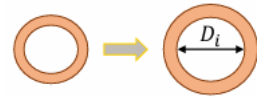
- Während **Systole** erhöht sich Druck in Aorta und weiteren elastischen Gefäßen
- → weiten sich auf → wirken als Speicher
- Über elastische Rückstellkraft wird Blut in distaler Richtung während der Diastole weiter gefördert

$$\sigma = \sigma_G + \sigma_M = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot s}$$

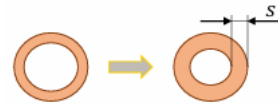
Mechanobiologie des Blutgefäßes:

- Kurzzeit-Antwort bei erhöhtem Durchfluss

- Hohe Schubspannungen an der Gefäßwand → Muskelentspannung → Weitung der Blutgefäße → Reduzierung der Schubspannungen



- Erhöhter Blutdruck (Hypertension) → Muskelkontraktion → Erhöhung des Gefäßwiderstandes → Reduzierung des Blutdruckes → Schonung von Gewebe



D_i : Innendurchmesser
 s : Wanddicke

- Langzeit-Antwort bei erhöhtem Durchfluss

- Hohe Schubspannungen an der Gefäßwand → **Adaptive** Weitung der Blutgefäße → Reduzierung von Schubspannungen an der Gefäßwand
- Erhöhter Blutdruck (Hypertension) → Verdickung der Blutgefäße → Reduzierung der Wandspannung

Ohr:

Das Ohr als Sinnesorgan ist verantwortlich für das Hören und den Gleichgewichtssinn.

Aufgliederung:

- Äußeres Ohr

- Ohrmuschel und Gehörgang

- Mittelohr

- Trommelfell und Gehörknöchelchenkette
- Ovale Fenster und Ohrtrumpete (Eustachische Röhre)

- Innenohr

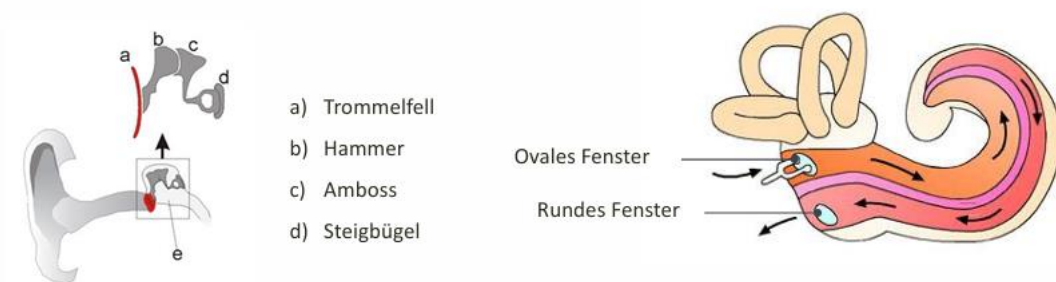
- Hörschnecke (Cochlea) und Gleichgewichtsorgan, eingebettet im Felsenknochen

Hörvorgang:

- **Schalleinkopplung im äußeren Ohr:**
 - ➔ Weiterleitung der Schallwellen vom äußeren Gehörgang zum Trommelfell
- **Schallübertragung im Mittelohr:**
 - ➔ Trommelfell wird durch Schalldruckschwankungen in Schwingung versetzt
 - ➔ gibt Schallenergie über die Gehörknöchelchen an das Innenohr über das Ovale Fenster
- **Schallumwandlung und Weiterleitung im Innenohr:**
 - ➔ Druckwellen verursachen Biegung der Haarsinneszellen → lösen elektrische Impulse aus, geben die an Hörnerv weiter

Schallübertragung:

- **Schwingung des Trommelfells** setzt drei Gehörknöchelchen (Gehörknöchelchen) in Bewegung.
- **Schwingung der Gehörknöchelchen** wird an das Ovale Fenster an der Wandung der Cochlea übertragen.
- **Schwingung des Ovale Fenster** erzeugt eine Druckwelle in der Flüssigkeit innerhalb der Cochlea (Perilymphe).
- Das **Runde Fenster** am weiteren Ende der Cochlea kompensiert die Volumenänderungen



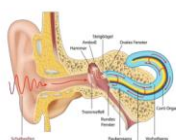
Das Mittelohr überträgt mechanische Energie in Form einer Druckwelle zwischen zwei Medien

- Luft im äußeren Ohr
- Flüssigkeit im Innenohr

Beide Fluide haben unterschiedliche **Schallwellenwiderstände** (Impedanzen)

(Wasser hat eine ca. 3600-mal höhere Impedanz als Luft)

Was passiert mit der Schallwelle an der Grenzfläche?



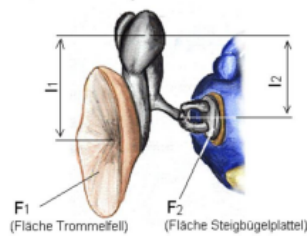
Impedanzanpassung im Mittelohr:

Gehörknöchelchenkette im mittleren Ohr ermöglicht eine sogenannte „Impedanzanpassung“

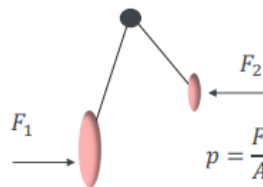
Eine **Druckerhöhung am ovalen Fenster** gegenüber dem Druck am Trommelfell (Verhältnis ca. 22:1) wird ermöglicht durch:

- **Flächenverhältnis** von Trommelfell zu Steigbügelfußplatte am Ovalen Fenster
- **Längenverhältnisse der wirksamen Hebel** der Gehörknöchelchen

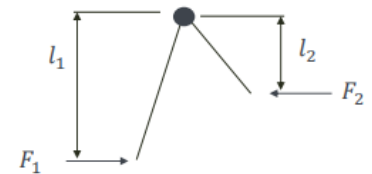
l_1, l_2 : Wirksame Länge der Gehörknöchelchen



Druck als Verhältnis
zwischen Kraft und Fläche

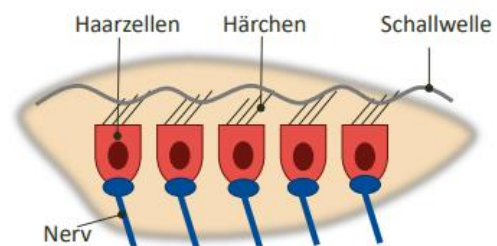
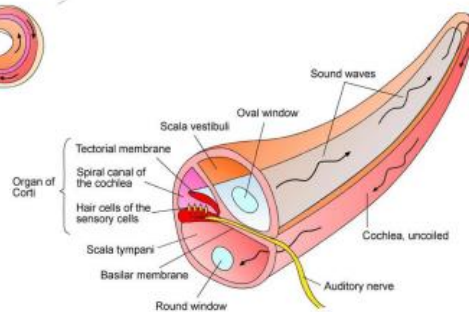


Hebeltheorie (stark simplifizierte Geometrie!)



Schallumwandlung:

1. Haarzellen, entlang der Chochlea, werden durch Bewegung der Perilymphe stimulierte
2. **Schubspannungen zu einer Biegung von Härchen** an der Zellmembran, Muster ist abhängig der Frequenz der Druckwelle
3. Zellen leiten Signal an das Gehirn weiter



Eustachische Röhre:

Wenn **verschlossen** → unterschiedliche Drücke im Außen- (Gehörgang) und Innenraum (Mittelohr) → Beanspruchung/Verformung des Trommelfeldes

- ermöglicht Schwingung des Trommelfelles beim Hören
- führt zu Überdehnung bei großen Druckunterschiede (zB beim Tauchen)

Wenn **offen** → Drücke in Gehörgang und Mittelohr gleichen sich aus → verhindert eine Überdehnung des Trommelfelles.

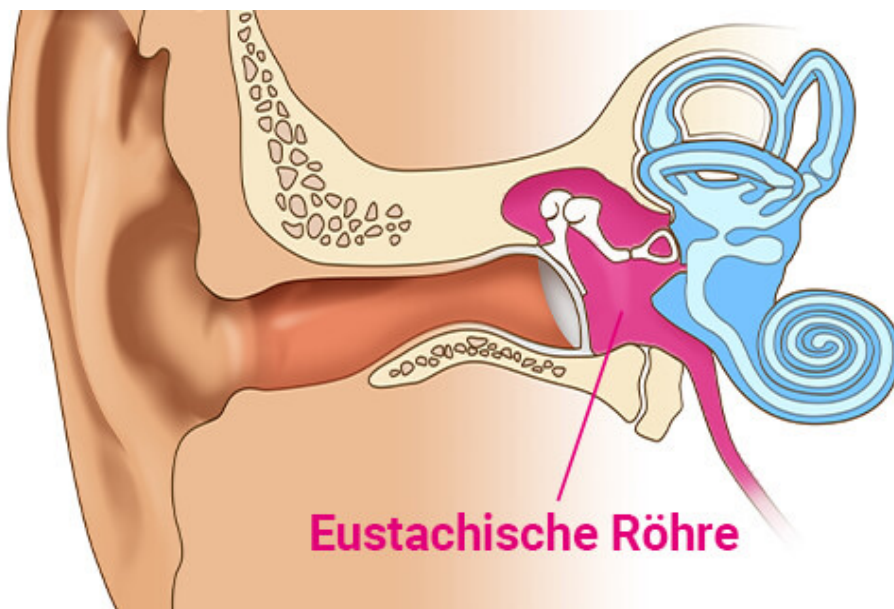
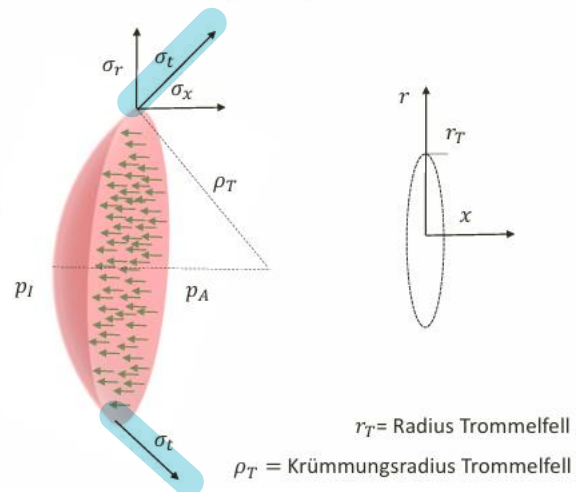
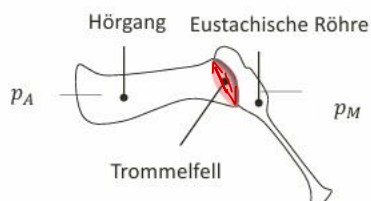
kann geöffnet werden über

- Muskelspannung (z.B. Gähnen)
- Druckerhöhung im Nasen- und Rachenraum

Spannung des Trommelfells:

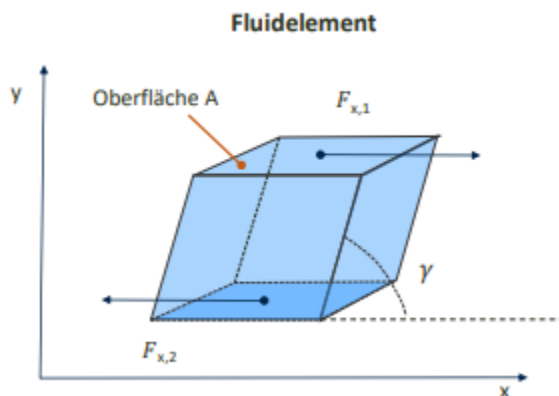
Ein Druckunterschied zwischen beiden Seiten des Trommelfelles führt zu einer Beanspruchung des Trommelfell mit einer tangentialen Spannung σ_t .

Die Komponente der Spannung in x-Richtung (senkrecht zum Trommelfell) steht im Gleichgewicht mit dem Druck (in Analogie zum Laplace-Gesetz für zylindrischen Körpern).



Fluidmechanik

Fluid:



- Stoff, der sich unter Einwirkung von Scherkräften – unabhängig von deren Betrag – kontinuierlich deformiert
- Das Verhältnis zwischen **Scherkraft und Verformungsgeschwindigkeit** wird als Viskosität bezeichnet

Kinematik: Betrachtung der Bewegung

- Teilchenfeste Betrachtungsweise (Lagrange) - Ball
- Ortsfeste Betrachtungsweise (Euler) - Wasserhahn

Lagrange:

Teilchenfeste Betrachtungsweise:

→ **Betrachtung eines Körpers auf seiner Bewegungsbahn**

- Grenzflächen des Körpers geschlossen → kein Massentransport mit Umgebung
- Eignung für die Beschreibung der Bewegung von Festkörpern

Bei Fluiden

- starke Verformung von Fluidvolumenelementen entlang Laufbahn → erschwert mathematische Berechnung nach Lagrange
 - bei Wasser Lagrange nicht sinnvoll

Eulersche Betrachtung

Ortsfeste Betrachtungsweise:

→ Betrachtung eines Körpers an festen Beobachtungsstellen

- Die Grenzflächen der Beobachtungsstelle sind offen → durch Bewegung des Körpers erfolgt Massentransport über Grenzflächen
- Eignung für die Beschreibung von Fluiden

Bei Fluiden:

- **Betrachtung von fixen Volumenelementen über die Zeit**
- Die Geschwindigkeit ist als Feldgröße definiert, abhängig von der Zeit t und von der Position $s(x, y, z)$

Feld:

Verteilung einer physikalischen Größe (als Feldgröße definiert) in einem Raum (zum Beispiel x, y, z im kartesischen Koordinatensystem)

→ Eine Feldgröße kann ein Vektor oder ein Skalar sein

Für die **Beschleunigung eines Massenteilchens** ergibt sich

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot v_z = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Der Operator ∇ wird Nabla-Operator genannt und das Skalarprodukt aus dem Geschwindigkeitsvektor und dem Nabla-Operator kann auch geschrieben werden wie folgt:

$$\vec{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_z$$

Arten von Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

← Lokale Beschleunigung Konvektive Beschleunigung

Wissen!

- **Zeitabhängige Änderung:**
 - durch Herzpulsation Geschwindigkeitsänderung in der Aorta
- **Räumliche Änderung:**
 - durch Stenose Geschwindigkeitsänderung auf Grund der Querschnittsänderung

Aufgabe 8

Bei der Eulerschen, ortsfesten Betrachtungsweise des Elementes wird die Beschleunigung durch die unten angegebene Formel beschrieben. Tragen Sie die Beschleunigungen für die beiden Terme auf den angegebenen Linien ein.

Erweitern Erweitern Erweitern Erweitern

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z$$

Lokale Beschleunigung Konvektive Beschleunigung

Aufgabe 9

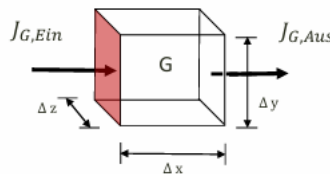
Vervollständigen Sie folgenden Lückentext:

Die Bilanzgleichung kann als Erhaltungsgleichung definiert werden, wenn die Erhaltungseigenschaft vernachlässigt wird und nur für oder Abstrakt betrachtet werden. Die Erhaltungseigenschaft einer beliebigen Größe ϕ kann dann als Erhaltung $\frac{d\phi}{dt} = 0$ oder $\frac{d\phi}{dt} = \text{const.}$ formuliert werden.

Bilanzgleichung $\triangleq$ Erhaltungsgleichung

- **Zusammenhang zwischen zeitlichen Änderung einer extensiven (ausgedehnt) Größe (G) innerhalb eines Volumenelements und dem Transport der Größe über die Grenzflächen des Volumens**
- **Mögliche physikalische Größen:**
 - Masse m , Impuls $v \cdot m$, Energie E
- **Zeitliche Änderung von G durch dG/dt :**
 - Zu- oder Abstrom, ausgedrückt durch die Stromstärke (J_G) (transportierte Menge durch Zeit)
 - Erzeugung oder Vernichtung, ausgedrückt durch die Erzeugungsrate Φ_G (erzeugte Menge durch Zeit)
 - Erzeugungsrate wird in folgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt (bei chem. Reaktionen aber relevant)

$$\frac{dG}{dt} = J_{G,Ein} - J_{G,Aus} + \Phi_G$$



G : Größe innerhalb des Volumenelements
 J_G : Stromstärke der Größe G über die Elementfläche ($\Delta z \cdot \Delta y$)
 (transportierte Menge/Zeit)

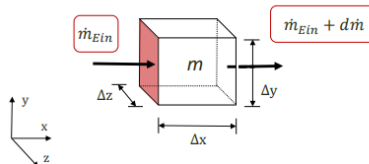
zeitl. Änderung

- Änderung im Inneren = Was kommt rein – Was geht raus + Was erzeugt wird (extensive Größe)

Massenerhaltung:

$$\frac{dG}{dt} = J_{x,Ein} - J_{x,Aus}$$

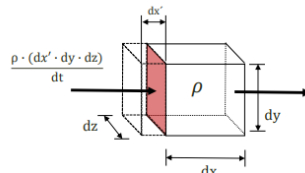
$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{Ein} - \dot{m}_{Aus}$$



Infinitesimales Volumenelement

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\dot{m}_{Ein} = \frac{\rho \cdot (dx') \cdot dy \cdot dz}{dt} = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz$$



$$\dot{m}_{Ein} = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz$$

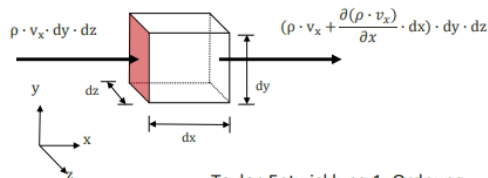
$$\dot{m}_{Aus} = (\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \cdot dx) \cdot dy \cdot dz$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{Ein} - \dot{m}_{Aus}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$$

Infinitesimales Volumenelement



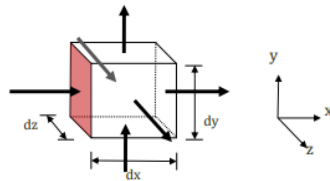
Taylor-Entwicklung 1. Ordnung

$$\int = \frac{m}{V} \quad \sqrt{\int} = \sqrt{\frac{m}{V}} \quad \sqrt{\rho} = m \cdot V^{-1}$$

Masse ist Dichte über Volumen integriert

Differenziale Form:

Für Ströme in allen drei Raumrichtungen kann die Formel erweitert werden:



$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz}_{\text{Speicher}} = \underbrace{- \left(\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \right)}_{\text{Massenflüsse}}$$

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = - \left(\cancel{\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z}} \right) = \boxed{-\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v})} \quad \text{Für inkompressible Flüssigkeiten} \rightarrow \boxed{\rho \nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Integrale Form:

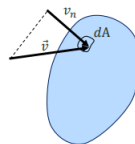
$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} \quad \text{Die Variation der Masse innerhalb eines finiten Volumens gleicht dem Nettomassenstrom}$$

$$\text{Masse des Fluids in einem Volumen: } m = \int_V \rho(r, \theta, \varphi) dV$$

$$\text{Zeitliche Änderung der Masse: } \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(r, \theta, \varphi) dV$$

$$\text{Massenstrom: } \dot{m} = \int_A \rho(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{v}(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{n} \cdot dA$$

$$\text{Massenerhaltung: } \frac{d}{dt} \int_V \rho(r, \theta, \varphi) dV = \int_A \rho(r, \theta, \varphi) \cdot v_n \cdot dA$$



Mit $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ als Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur infinitesimalen Oberfläche dA .

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = \int_A \rho \cdot v_n \cdot dA$$

Betrifft unter anderem alle folgende Beispiele und Aufgaben!

zeitl.
Änderung
Masse

Massenstrom

Annahme:

Konstantes Volumen V und Dichte des Blutes ρ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = 0 \rightarrow \rho \cdot \int_A v_n \cdot dA = 0$$

$$\rightarrow \int_A v_n \cdot dA = 0$$

Mit $\int_A v_n \cdot dA$ als Nettovolumenstrom

**Annahme:**

Konstantes Volumen V und Dichte des Blutes ρ :

$$\int_A v_n \cdot dA = 0$$

Strömung parallel zur Gefäßachse x : $\int_A v_x \cdot dA = 0$

$$\int_A v_x \cdot dA = \int_A v_{x,E} \cdot dA_E - \int_A v_{x,A} \cdot dA_A = 0 \rightarrow$$

Mittlere Geschwindigkeit über Fläche A : $\bar{v}_x = \frac{\int_A v_x \cdot dA}{A}$

$$\bar{v}_{x,E} \cdot A_E - \bar{v}_{x,A} \cdot A_A = 0 \rightarrow \bar{v}_{x,E} \cdot A_E = \bar{v}_{x,A} \cdot A_A$$



Bei der Wahl der Zeichen ist die Richtung von $\bar{v}_{x,A}$ „weg vom Volumen“ bereits berücksichtigt.

Massenerhaltung im Gefäß III**Biomechanik**

$$\bar{v}_{x,E} \cdot A_E - \bar{v}_{x,A} \cdot A_A = 0$$

Gefäß mit konstantem Durchmesser

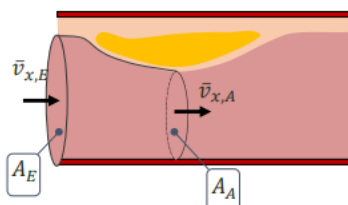
$$A_E = A_A$$



$$\bar{v}_{x,A} = \bar{v}_{x,E}$$

Gefäßverengung

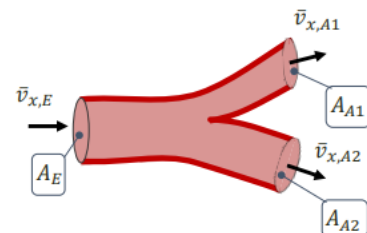
$$A_A < A_E$$



$$\bar{v}_{x,A} = \bar{v}_{x,E} \cdot \frac{A_E}{A_A}$$

Bifurkation

$$A_A = A_{A1} + A_{A2}$$



$$\bar{v}_{x,A1} \cdot A_{A1} + \bar{v}_{x,A2} \cdot A_{A2} = \bar{v}_{x,E} \cdot A_E$$

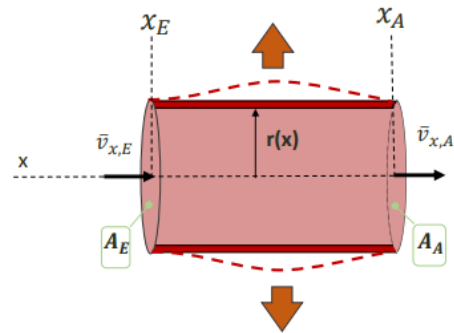
Annahmen:

- Zeitabhängiges Volumen V
- Axial gerichtete Strömung v_x
- Konstante Dichte ρ

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = \int_A \rho \cdot v_n \cdot dA$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho \cdot (\bar{v}_{x,E} \cdot A_E - \bar{v}_{x,A} \cdot A_A)$$

Massenänderung



$$\rho \cdot (\bar{v}_{x,E} \cdot A_E - \bar{v}_{x,A} \cdot A_A) = \rho \frac{\int_{x_E}^{x_A} \pi r(x)^2 dx}{dt}$$

Massenerhaltung: Beispiel in den Alveolen

Biomechanik

Einatmung: Aufweitung Alveolen

- Betrachtung der Gesamtmasse oder eines einzelnen Gases
- Axial gerichtete Strömung v_x am Einlass
- Normal gerichtete Strömung v_n am Auslass
- Variable Dichte $\rho = \rho(t, x, y, z)$
- Zeitabhängiges Volumen V

$$\rho \cdot \bar{v}_{x,E} \cdot A_E$$

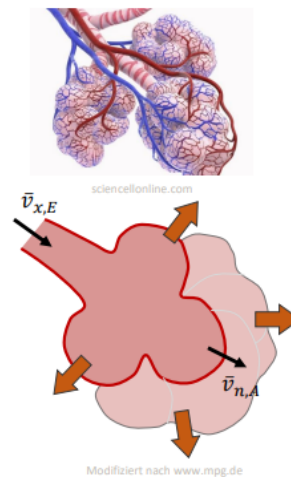
Masse / Einlass

$$- \rho \cdot \bar{v}_{n,A} \cdot A_A$$

Masse / Auslass

$$= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

Massenänderung



Impulserhaltungssatz:

Impuls:

→ **Vektorielle Größe, welche den mechanischen Bewegungszustand eines Objektes beschreibt, wobei:**

- die Richtung der Bewegungsrichtung des Objektes entspricht
- der Betrag dem Produkt von Objektmasse und Geschwindigkeit entspricht

$$i [kg \cdot m \cdot s^{-1}] = m \cdot v \quad (\text{auch in } [N \cdot s] \text{ ausgedrückt})$$

Für eine zeitlich konstante Masse gilt:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Mit $\vec{a}$: Beschleunigungsvektor des Objektes

Nach dem zweiten newtonschen Gesetz:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Das 2. Newtonsche Gesetz:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

wurde **NUR** für Objekte mit zeitlich konstanter Masse formuliert.

Die korrekte, vollständige Formulierung lautet:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} = \vec{F}$$

Impuls in der Bilanzgleichung:

$$\text{Impuls } m \cdot \vec{v} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$



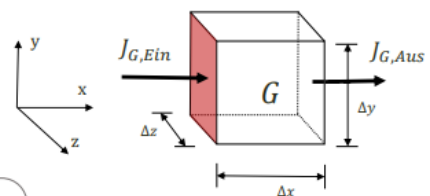
$$G = m \cdot \vec{v}$$

Nach der Definition von Bilanzgleichungen

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{J}_{(m \cdot \vec{v}), \text{Ein}} - \vec{J}_{(m \cdot \vec{v}), \text{Aus}}$$

Nach der Definition von Kraft

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}$$



Wir verwenden im Folgenden nur die Gleichung mit der **Definition von Kraft** nach dem 2. Newtonschen Gesetz.

Impulserhaltung bei inkompressiblen Fluiden:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

In einem **infinitesimalen Volumenelement** gilt:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d(\rho \cdot \vec{v})}{dt} dx \cdot dy \cdot dz = \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\rho}{dt} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

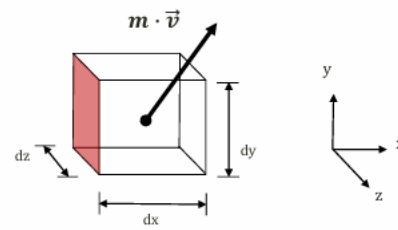
$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Wir betrachten **inkompressible Flüssigkeiten**:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Lokale Beschleunigung

Konvektive Beschleunigung



Zur Erinnerung

$$\vec{v} \cdot \nabla = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_z$$

Kräfte:

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

Aufteilung der Kräfte:

$$\vec{F} = \vec{F}_V + \vec{F}_O$$

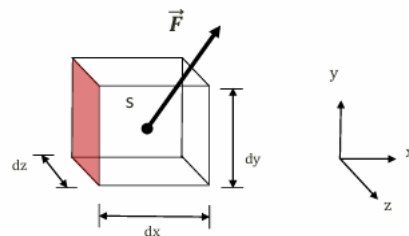
- $\vec{F}_V \rightarrow$ Volumenkräfte
- $\vec{F}_O \rightarrow$ Oberflächenkräfte

Volumenkräfte

Volumenkräfte werden von Feldern verursacht (auch als Feldkräfte bezeichnet).

Wir betrachten im Folgenden lediglich das Gravitationsfeld $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_V = \vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$$



Oberflächenkräfte in x-Richtung

Normalspannungen auf beiden Seiten des Volumenelements parallel zur yz-Ebenen:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{xx} + d\sigma_{xx}$$

Schubspannungen auf beiden Seiten des Volumenelements parallel zur xz-Ebenen:

$$\tau_{yx}, \tau_{yx} + d\tau_{yx}$$

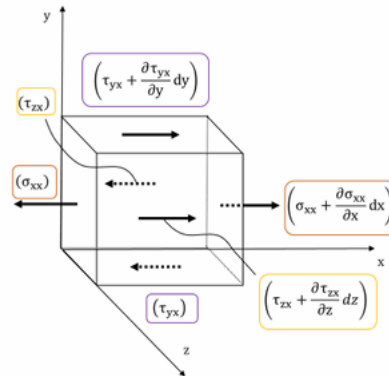
Schubspannungen auf beiden Seiten des Volumenelements parallel zur xy-Ebenen:

$$\tau_{zx}, \tau_{zx} + d\tau_{zx}$$

Zur Berechnung der Kräfte werden die Spannungen mit den jeweiligen Oberflächen multipliziert, auf die sie wirken.

$$F_{ox} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy$$

$$F_{ox} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$



Impulserhaltung in x-Richtung

Resultierende Kraft in Richtung x

$$F_x = F_{ox} + F_{Vx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \right) dx dy dz$$

Resultierender Kraftvektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

$$F_y = F_{oy} + F_{Vy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \right) dx dy dz$$

$$F_z = F_{oz} + F_{Vz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \right) dx dy dz$$

Impulserhaltung in x-Richtung

$$\frac{d(mv_x)}{dt} = F_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \right) dx dy dz$$

Zeitliche Änderung des Impulses in x-Richtung Resultierende Kraft in x-Richtung

Der Impulserhaltungssatz wird verwendet, um folgende Informationen über die Fluidströmung zu erhalten:

- Der **Druck** p
- Die **Geschwindigkeitskomponenten** v_x, v_y, v_z

In der Biomechanik haben diese Größen eine grundsätzliche Bedeutung in Bezug auf die Perfusion von Organen im Blutkreislauf und auf die Respiration.

Außerdem spielen **Spannungen** eine Rolle in Bezug auf die Grenzflächen, zum Beispiel an den Gefäßwänden.

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \right) dx dy dz$$



In der Fluidmechanik besteht die Möglichkeit, **Spannungen** als Funktion der **Geschwindigkeit** und des **Druckes** zu beschreiben.

Reibungsgesetz:

Linearer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsgradienten und Spannungen, basierend auf der „Hypothese von Stokes“

Impulserhaltung in x-Richtung

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

$\mu \left[\frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$: Viskosität

Impulsbilanz

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \right) dx dy dz$$

Impulserhaltung in x-Richtung

$$\begin{aligned} \frac{d(mv_x)}{dt} &\Rightarrow \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \\ F_x &\Rightarrow \left(\frac{\partial \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right)}{\partial z} + \rho g_x \right) dx dy dz \end{aligned}$$

Die Impulserhaltung in x-Richtung reduziert sich auf eine Gleichung mit vier Variablen p, v_x, v_y, v_z .

Impuls- und Massenerhaltung:

Differentialgleichungssystem

- 3 Gleichungen der Impulserhaltung (in den jeweiligen 3 Raumrichtungen)
- 1 Gleichung der Massenerhaltung
- 4 Variablen: p, v_x, v_y, v_z

Wir betrachten **inkompressible** und **newtonsche*** Fluide.

*newtonsche Fluide: **konstante Viskosität**

Aus der Massenerhaltung :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Damit vereinfacht sich der Impulserhaltungssatz zu (**hier in x-Richtung**):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Navier-stokes-Gleichung

Für **dreidimensionale** Strömungen von **inkompressiblen** und **newtonschen** Fluiden ergibt

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

In Vektorschreibweise ergibt sich:

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad \text{Navier-Stokes Gleichung}$$

Viskosität:

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$$

Viskoser Term in der Erhaltungsgleichung

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v}$$

→ Fluidgröße, welche den Zusammenhang zwischen Spannungen und Geschwindigkeitsgradienten im Fluid beschreibt

- **Hohe Viskosität:** dickflüssiges Medium (Honig, Öl, Blut, Glas >>)
- **Niedrige Viskosität:** dünnflüssiges Medium (Wasser, Ethanol, Essig)

→ $\mu \cdot \nabla^2 v$ den Widerstand des Fluids gegenüber einer Deformation

Vereinfachung der Impulserhaltung:

- **Stationäre Strömung ohne Schubspannungen: Strömung ohne Reibung Energieerhaltung → Bernoulli Gleichung**
- **Unidirektionale und stationäre Strömung im Rohr mit konstantem Querschnitt Laminare Strömung im Rohr → Hagen-Poiseuille Gleichung**

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad \text{Navier-Stokes Gleichung}$$

Bei idealen (nicht viskosen) Fluiden:

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} = 0$$

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$$



Euler Gleichung

Stationäre Strömung (führt zu Bernoulli)

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v})$$

Keine Strömung (Hydrostatik)

$$\rho \vec{g} - \nabla p = 0$$

Die resultierende Strömung wird auch als **reibungsfrei** definiert.

Bernoulli ist Navier-Stokes ohne viskosen Term

Reibungslose Strömung: Bernoulli-Gesetz und Energieerhaltung

Impulserhaltung in einer reibungsfreien und stationären Strömung

Eine **stationäre Strömung** liegt vor, wenn alle Größen **nur** Funktionen von Ortskoordinaten sind. Die Zeit tritt nicht als Variable auf.

Euler Gleichung

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right)$$



Euler Gleichung bei stationärer Strömung

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Trajektorien bleiben in **stationären Strömungen** unverändert!



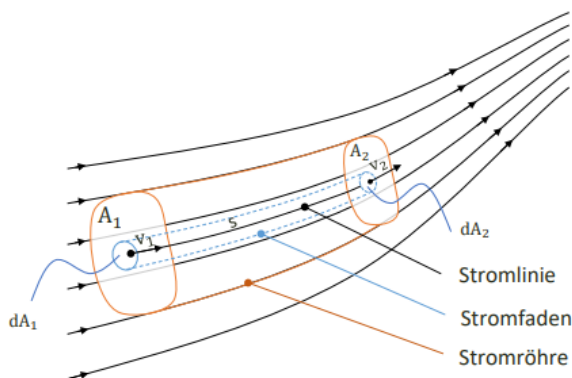
Trajektorien können sich **nicht kreuzen**, weil an einer Position ein über die Zeit gleichbleibender Geschwindigkeitsvektor definiert ist.

Stromlinien:

Stromlinie: Bahnkurve von Fluidteilchen, zu der die Geschwindigkeit $\vec{v}$ in jedem Punkt tangential ist.

Stromfaden: Volumen mit infinitesimalem Querschnitt dA entlang einer Stromlinie.

Stromröhre: ein Stromfaden mit endlichen Querschnitten A_i (kann variieren entlang der Stromlinie).



Die Modellvorstellung in Stromlinien ermöglicht es, den Impulserhaltungssatz auf **eine einzelne Koordinate „s“** zu reduzieren.

Die Koordinate „s“ stellt dabei den zur Stromlinie tangentialen Einheitsvektor dar.

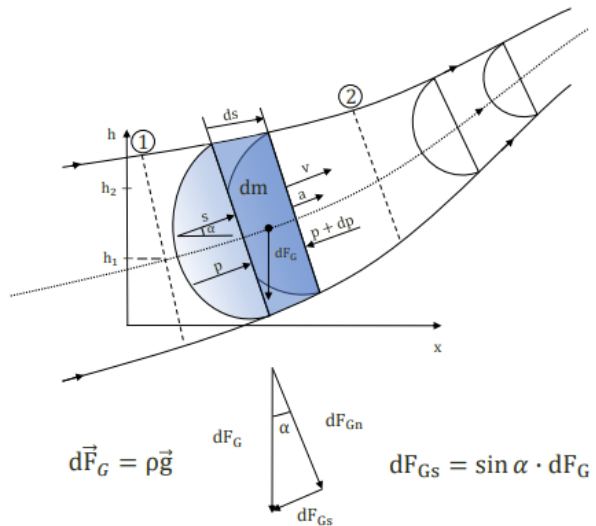
Aus der Impulserhaltung:

$$\rho \vec{g} - \nabla p = \rho ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v})$$

Über Modellvorstellung von Stromlinien ändert sich das Koordinatensystem. Die Geschwindigkeit hat nun lediglich die Komponente s .

$$-\rho g \cdot \sin \alpha - \frac{dp}{ds} = \rho \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Der Vektor $\vec{g}$ ist der Achse h entgegengerichtet, daher das Zeichen (-)



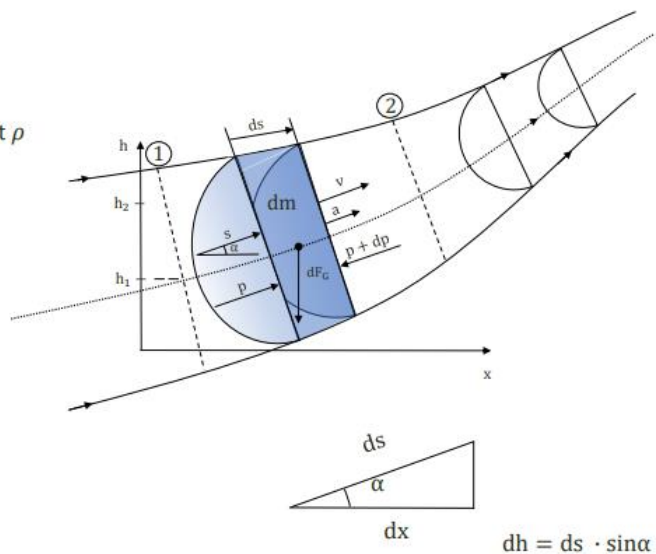
$$-\rho g \cdot \sin \alpha - \frac{dp}{ds} = \rho \frac{dv}{ds} \cdot v$$

Die Terme werden mit ds multipliziert und mit ρ dividiert:

$$\frac{dp}{\rho} + (g \cdot \sin \alpha) ds + dv \cdot v = 0$$

Mit $dh = ds \cdot \sin \alpha$ folgt:

$$\frac{dp}{\rho} + g \cdot dh + dv \cdot v = 0$$

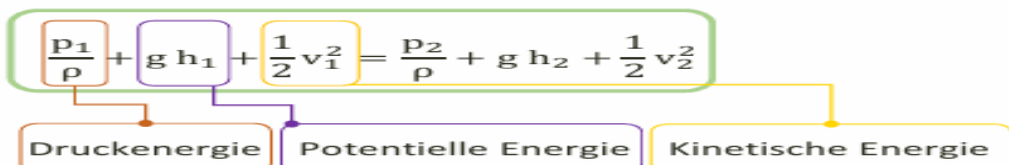


Bernoulli- Gleichung

→ In einem geschlossenen System ohne Reibung bleibt die Summe aus Druck-, potentieller und kinetischer Energie konstant. Es kommt zu keiner Energieumwandlung in Wärme.

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp + \int_{h_1}^{h_2} g dh + \int_{v_1}^{v_2} v \cdot dv = 0$$

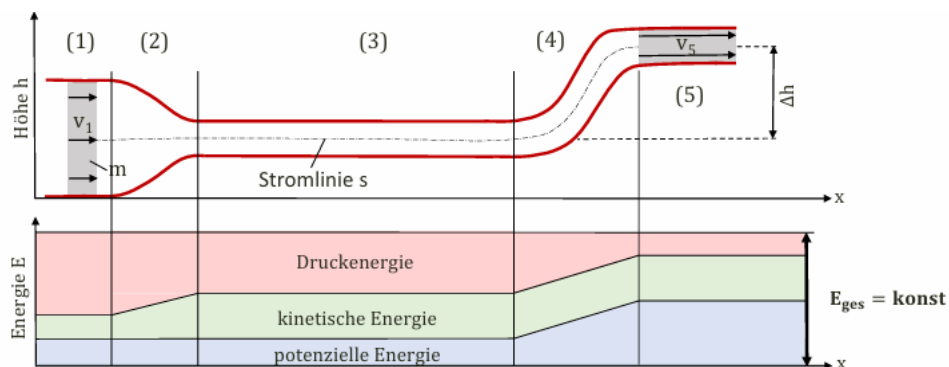
$$\frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) + g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 0$$



Die drei Terme haben die Dimension der spezifischen Energie.

Druckänderung nach Bernoulli

- Querschnittsänderungen → Änderung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit gemäß der Massenerhaltung.
- Höhenänderungen → Änderungen der potenziellen Energie.
- Gesamtenergie einer reibungsfreien Strömung bleibt gemäß der Energieerhaltung entlang des Stromfadens konstant
- → Aus diesen drei vorangegangenen Bedingungen ergibt sich der Wert des Drucks an jeder Stelle der Leitung

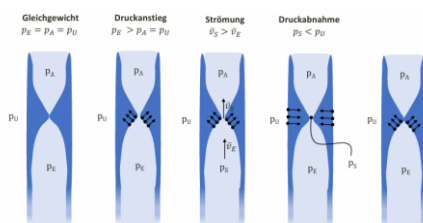


Hydrostatik:

$$\frac{p_1}{\rho} + g h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + g h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

Die Gleichung ist in drei Teile unterteilt: Druckenergie ($\frac{p}{\rho}$) und Potentielle Energie ($g h$).

Bernoulli beim Sprechen

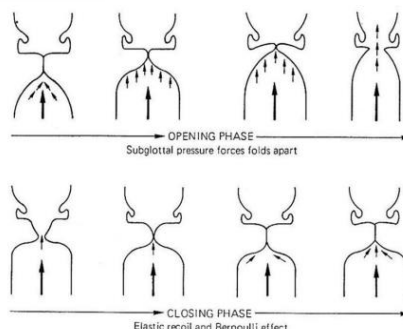


Schwingung der Stimmlippen

Öffnung durch Überdruck in den Lungen.

Schließung durch:

- elastische Gewebekraft
- Druckabnahme in der Öffnung bei hoher Luftgeschwindigkeit



Strömung in Kanälen: Hagen-Poiseuille

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) \quad \text{Navier-Stokes Gleichung}$$

- Der viskose Term der Erhaltungsgleichung $\mu \cdot \nabla^2 \vec{v}$ wird nun berücksichtigt (viskoses Fluid)
- Die Strömung ist stationär

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = \rho \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

- Die Strömung ist **unidirektional** und **laminar**

Bei gleichbleibender Höhe ($\vec{v} \perp \vec{g}$)

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\mu \cdot \nabla^2 \vec{v} - \nabla p = 0$$

- Der Querschnitt ist **konstant**

(führt zu **Hagen-Poiseuille**)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \cdot \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} - \nabla p = 0$$

Laminare Strömung:

→ Strömung in „Schichten“, die sich nicht miteinander vermischen

Vor allem dann, wenn:

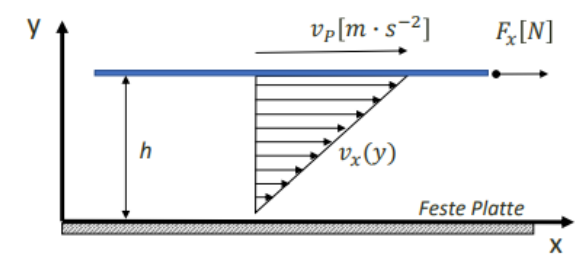
- der durchströmte Querschnitt sich in Wert und Richtung nicht ändert
- besondere fluiddynamische Bedingungen bestehen → **Reynolds-Zahl**

Veranschaulichung

Eine Platte mit Fläche A bewegt sich in x-Richtung relativ zu einer festen Platte mit Geschwindigkeit v_P . Der Zwischenraum ist gefüllt mit einem Fluid.

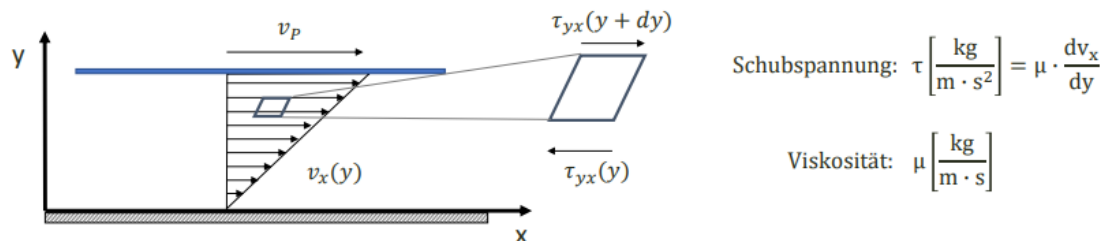
Haftbedingung (Annahme):

die relative Fluidbewegung an der Kontaktstelle mit den Platten ist gleich null. Nach den Eigenschaften von Fluiden, ist eine Kraft F_x [N] für die kontinuierliche „Deformation“ des Fluides erforderlich



Schubspannung, Scherrate und Viskosität

- Der Geschwindigkeitsgradient $\frac{dv_x}{dy}$ (in senkrechter Richtung zur Geschwindigkeit) wird auch als **Scherrate** bezeichnet
- Die **Schubspannung** τ [N/m^2] oder [$kg/(m \cdot s^2)$] ist die Kraft pro Flächeneinheit, welche die relative Bewegung der Schichten zueinander ermöglicht
- Die **Viskosität** μ [$\frac{kg}{m \cdot s}$] als Materialeigenschaft stellt das Verhältnis zwischen der Schubspannung und der Scherrate dar

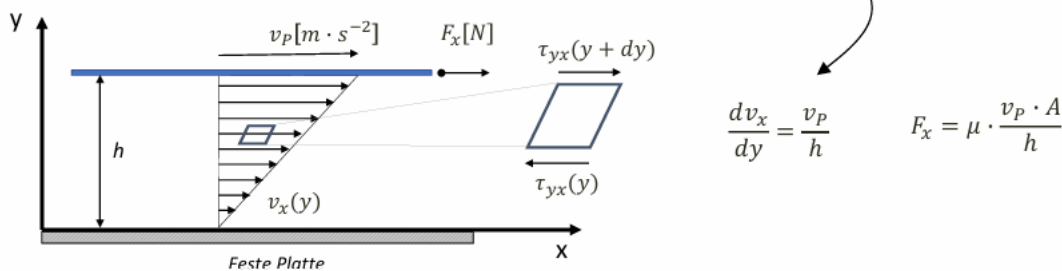


Berechnung von Kräften in laminarer Strömung

Am Beispiel der Platte lässt sich die Kraft $F_x[N]$ aus den Schubspannungen an deren Oberfläche wie folgt berechnen:

$$F_x[N] = \tau_{yx} \cdot A$$

- Mit Blick auf die Bilanz der Kräfte in einer stationären Strömung ist $\tau_{yx}(y)$ konstant in y-Richtung
- Bei $\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$ ist der Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ auch konstant in y-Richtung



Reynolds-Zahl → Geschwindigkeit (Zeit) hat Einfluss auf Reynolds-Zahl

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Kennzahl, welche das Verhältnis zwischen inertialen Kräften (Trägheit) und viskosen Kräften beschreibt.

Reynolds-Zahl (Re)

$$Re = \frac{\rho \cdot h \cdot v}{\mu}$$

ρ : Dichte

h : charakteristische Länge (Geometrien abhängig)

v : Geschwindigkeit

μ : Viskosität

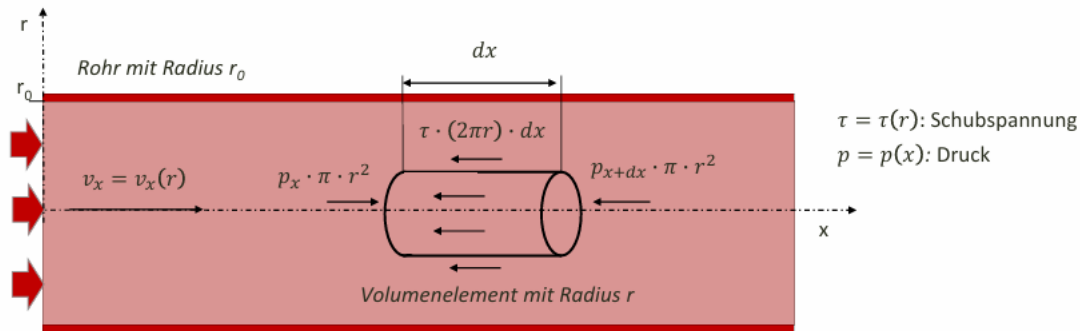
- Die Größen im Zähler begünstigen die inertialen Kräfte → Je größer der Zähler, desto leichter führen „Perturbationen“ in der Strömung zur Wirbelbildung und Vermischung der Schichten
- Die Viskosität im Nenner fördert die laminare Strömung. Die Schichten bestehen auch im Fall von Perturbationen weiter.

Eine laminare Strömung tritt auf, wenn die viskosen Kräfte gegenüber inertialen Kräften überwiegen.

Empirisch ermittelter Wert: Eine laminare Strömung besteht bei $Re < 2.300$

Impulserhaltung bei laminarer Strömung im Gefäß

Darstellung der Kräfte, welche auf ein zylindrisches Volumenelement bei stationärer Strömung wirken.

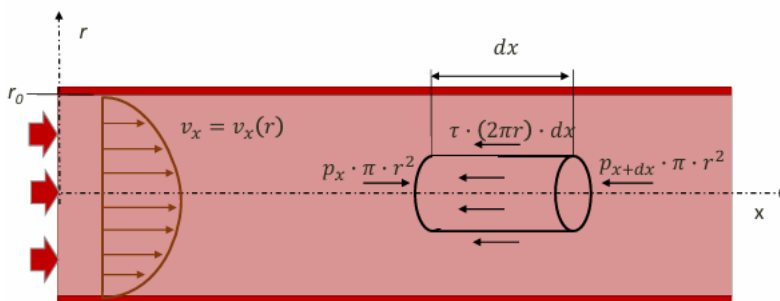


$$(p_x - p_{x+dx}) \cdot \pi \cdot r^2 = \tau \cdot (2\pi r) \cdot dx$$

mit $p_{x+dx} = p_x + \frac{dp}{dx} \cdot dx$ $\Rightarrow$ $\tau(r) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow \tau(r) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$\tau(r) = \mu \cdot \frac{dv_x}{dr} \Rightarrow \frac{dv_x}{dr} = -\frac{r}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow v_x = \int -\frac{r}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx} dr \Rightarrow v_x = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot r^2 + c$$



Mit Haftungsbedingung

$$v_x(r_0) = 0$$

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} [r_0^2 - r^2]$$

parabolisches Strömungsprofil

Das Hagen-Poiseuille Gesetz

$$\Rightarrow v_x = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dx} [r_0^2 - r^2]$$

$$Q = \int_A v_x \cdot dA$$

Herleitung des Volumenstroms Q

$$Q = -\frac{\pi \cdot r_0^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{8 \cdot \mu}{\pi \cdot r_0^4} \cdot Q$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

Druckabfall im Rohr über eine Länge Δx

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{8 \cdot \mu}{\pi \cdot r_0^4} \cdot Q \Rightarrow \Delta p = \frac{-8 \cdot \mu \cdot \Delta x}{\pi \cdot r_0^4} \cdot Q$$

$$\Delta p = R \cdot Q \quad \text{mit} \quad R = \frac{-8 \cdot \mu \cdot \Delta x}{\pi \cdot r_0^4}$$

Der **Strömungswiderstand R** entspricht dem Verhältnis aus **Druckabfall Δp** und **Durchfluss Q** . Es handelt sich hierbei um eine elektrotechnische Analogie zum ohmschen Gesetz.

Anmerkung: Die Formel lässt sich in Analogie zum elektrotechnischen Vorgang interpretieren, wobei:

Druck p	$\rightarrow$	Elektr. Spannung U
Volumenfluss Q	$\rightarrow$	Elektr. Strom I

Biomechanik von komplexen Systemen

Bedeutung des Blutes

Bluteigenschaften → Entstehung kardiovaskulärer Krankheiten → Organerkrankung

Kardiovaskuläre Krankheiten:

- Ischämie (Unterversorgung)
- Hämorrhagie (Blutung)

→ Behandlung kardiovaskulärer Krankheiten → Wechselwirkung zwischen Blut und Implantaten

Negative Folgen:

- Thrombenbildung
- Hämolyse (Erythrozyten sterben)

Funktionen des Blutes:

→ Gewebe, bestehend aus Zellen und Plasma

- Transport von Sauerstoff und Nährstoffen in die Gewebe
- Abtransport von Kohlendioxid und Stoffwechselprodukten
- Transport von weiteren Stoffen (Elektrolyten, Hormonen)
- Abwehr von Infektionen und Steuerung inflammatorischer Vorgänge
- Wärmetransport zur Regulation der Körpertemperatur

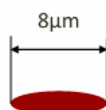
Blutzusammensetzung:

Erythrozyten (rote Blutkörperchen)

Konzentration ca. $5 \text{ Mio} / \mu\text{L}_{\text{Blut}}$

Lebensdauer: ~ 120 Tage

99 % Gesamtvolumen der Blutzellen

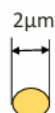


→ zuständig für den Transport von O_2

Thrombozyten (Blutplättchen)

Konzentration ca. $250.000 / \mu\text{L}_{\text{Blut}}$

Lebensdauer: ~ 8-12 Tage

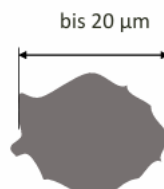


→ zuständig für die Hämostase

Leukozyten (weiße Blutkörperchen)

Konzentration ca. $5.000 / \mu\text{L}_{\text{Blut}}$

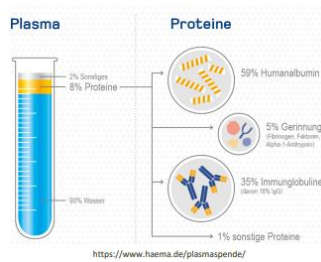
Lebensdauer: ~ Tage bis Monate



→ zuständig für die Immunabwehr, inflammatorische Prozesse und Geweberegeneration

Das Blutplasma:

→ Blut ohne korpuskulare Bestandteile → Plasma



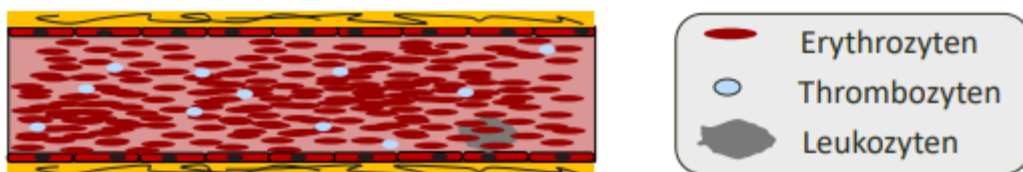
bestehend aus:

- Wasser (ca. 90 %)
- Proteinen (ca. 8 %) → davon Albumin (59 %) und Fibrinogen (5 %)
- Elektrolyten (ca. 2 %)
- Nährstoffen (wie Glukose und Lipide) und Abbauprodukten
- Gasen
- Hormonen

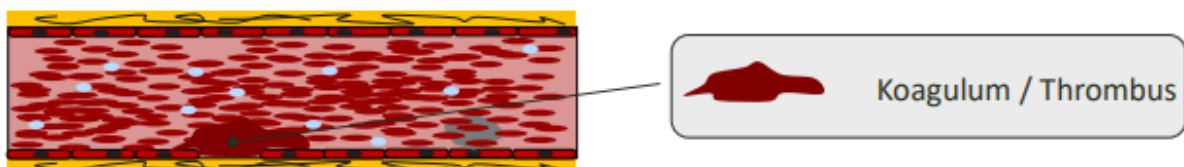
Plasma ohne Fibrinogen → Serum

Das Blut als Fluid:

- **Suspension** → korpuskulare Bestandteile (Zellen) in Plasma vermischt
- **Erythrozyten** (hohen Konzentration) (Hämatokrit (Volumenanteil von Zellen im Blut, von denen die Erythrozyten 99% ausmachen) → ca. 45 %
 - Bestimmen Viskosität → Verhältnis von Druck und Flussrate bei Blutströmung



- **Thrombozyten und Plasmabestandteile**
 - Hämostase (Blutstillung)
- → Über Hämostase nimmt Blut festen Zustand an → Änderung Strömungsprofil im Gefäß



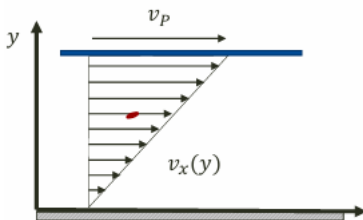
Blutströmung in unterschiedlichen Gefäßen

Die Auswirkung der Erythrozyten auf das Strömungsprofil des Blutes ist abhängig vom Gefäßlumen (D_G).

$D_G > 100 \mu\text{m}$ (Arterien)

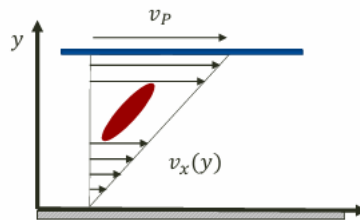
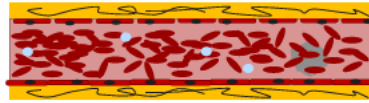
Betrachtung als Kontinuum

Zellen beeinflussen die Viskosität.



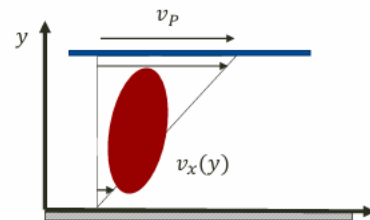
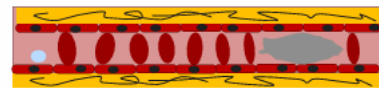
$10 \mu\text{m} < D_G < 100 \mu\text{m}$ (Arteriolen)

Verformung der Erythrozyten und komplexeres Strömungsprofil.



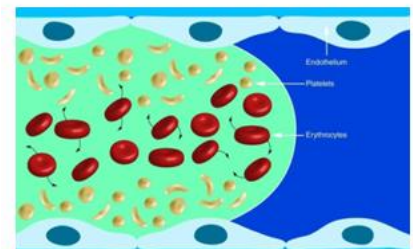
$D_G < 10 \mu\text{m}$ (Kapillaren)

Verformung der Erythrozyten mit Strömung in Reihe.



Verteilung der Erythrozyten:

- rotieren im parabolischen Strömungsprofil unter Einwirkung der Schubspannungen
- Rotation $\rightarrow$ radial gerichtete Kraft auf Zelle (Tennisball mit Spin)
- Die Erythrozyten bewegen sich zur Mitte, die Thrombozyten zur Wand



Die Blutviskosität:

Scherrate: wie stark Flüssigkeit durch Scherkraft verformt wird, wie stark sich benachbarte Flüssigkeitsschichten relativ zueinander bewegen

- Das Blut verhält sich als newtonsches Fluid (konstante Viskosität) bei einer Scherrate $\dot{\gamma} > 100 \text{ (s}^{-1}\text{)}$
- Bei niedrigeren Scherraten nimmt die Viskosität wegen einer Aggregation von Erythrozyten zu.

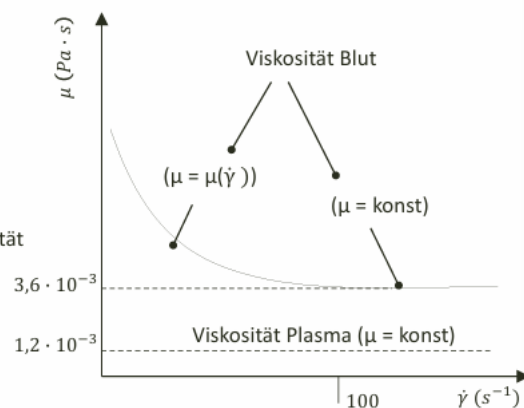
Scherrate $\dot{\gamma} > 100 \text{ s}^{-1}$

$$\mu_{\text{Blut}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

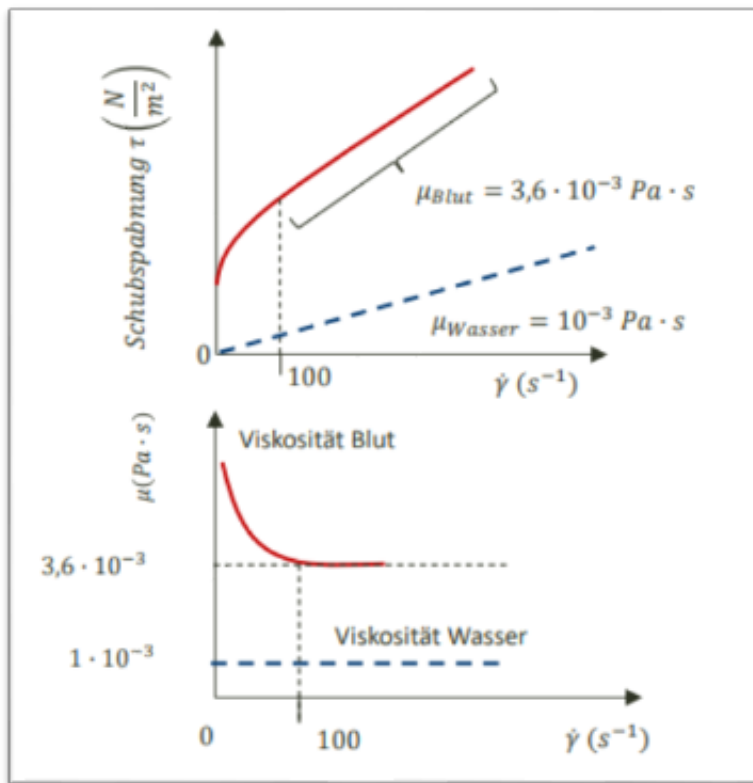
Scherrate $\dot{\gamma} < 100 \text{ s}^{-1}$

Erhöhung der Viskosität, $\mu_{\text{Blut}} = \mu_{\text{Blut}}(\dot{\gamma})$

- Die Erythrozytenkonzentration beeinflusst den Wert der Viskosität
- Viskosität des Plasmas: $\mu_{\text{Plasma}} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Die Viskosität des Plasmas ist unabhängig von der Scherrate.



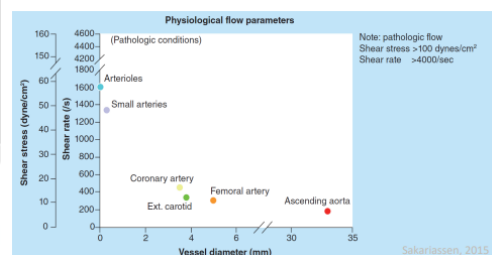
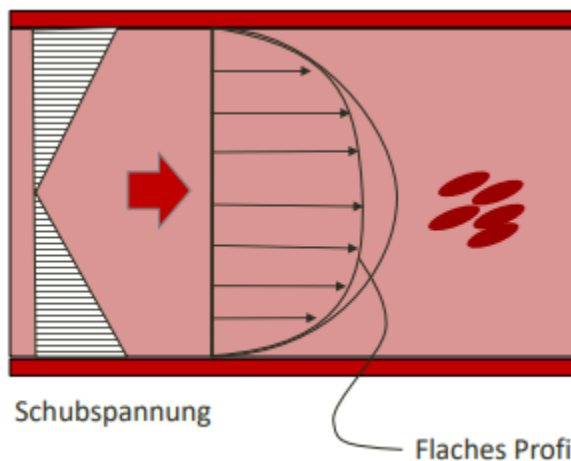
- **Niedrige Scherrate** $\rightarrow$ Erythrozyten kleben zusammen, bilden größere Strukturen, erschweren Fluss
- Viskosität des Plasmas ist unabhängig von Scherrate $\rightarrow$ Plasma verhält sich newtonsch



-
- Die Steigung der **Schubspannung-Scherrate-Kurve** entspricht der **Viskosität (μ)**
- **Blut:** Mindestschubspannung erforderlich für Bewegung, bei Wasser nicht

Scherraten an der Gefäßwand

- Scherraten an der Gefäßwand am höchsten

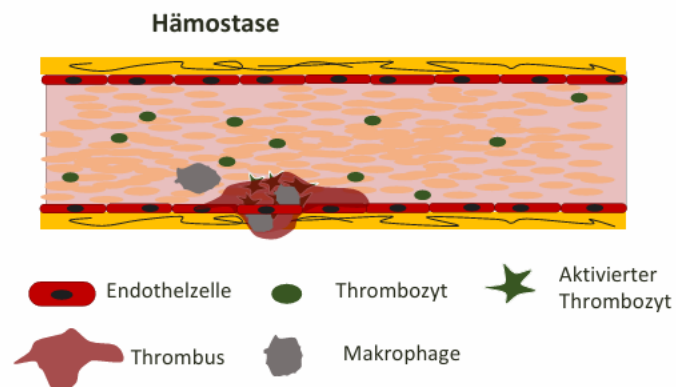
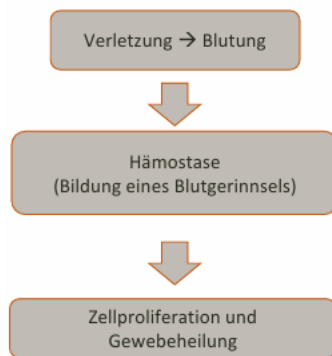


-
- **Je kleiner das Gefäß, desto höher die Scherrate und Schubspannung**
- In Arterien verschiedener Größe sind die Scherraten an der Wand $> 100 s^{-1}$
 - ➔ Wir betrachten das Blut als newtonsche Flüssigkeit mit einer die Viskosität von $3,6 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$
- **Richtung Gefäßmitte** ➔ Schubspannung und Scherrate nehmen ab
- **niedrigen Scherraten** ➔ Rouleaux (geldrollenförmig Agglomeraten von Erythrozyten)
 - ➔ Verantwortlich für Erhöhung Viskosität ➔ leichte Abflachung Strömungsprofil (bei Berechnung vernachlässigt)

Hämostase:

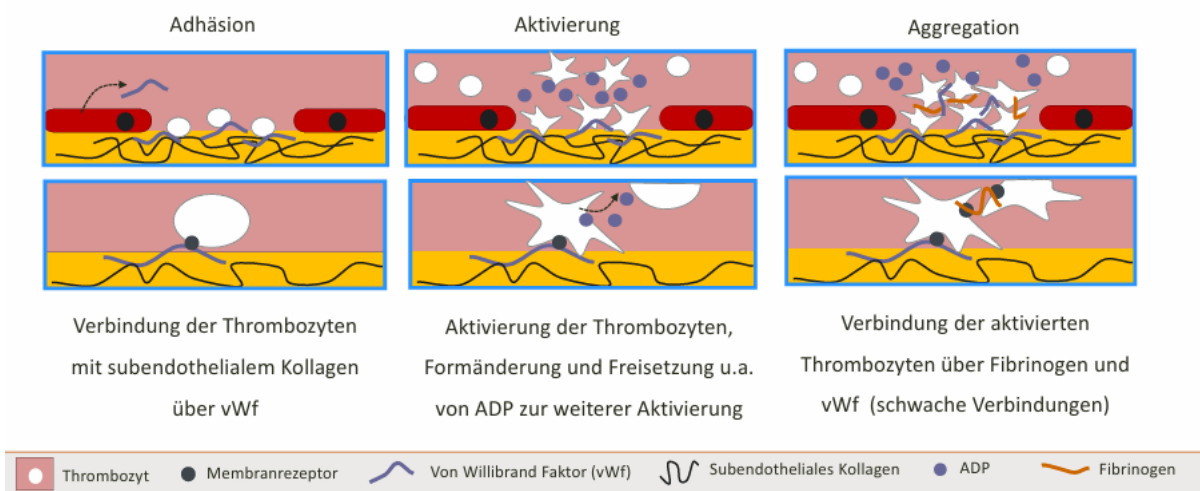
- Physiologischer Prozess zum Stillen einer Blutung
- Differenzierung in zelluläre (primäre) und plasmatische (sekundäre) Hämostase

Trigger der Hämostase ist der Kontakt von Blut mit Gewebe unterhalb des Endotheliums (subendotheliales Gewebe)



Zelluläre Hämostase (Blutstillung) über Thrombozyten

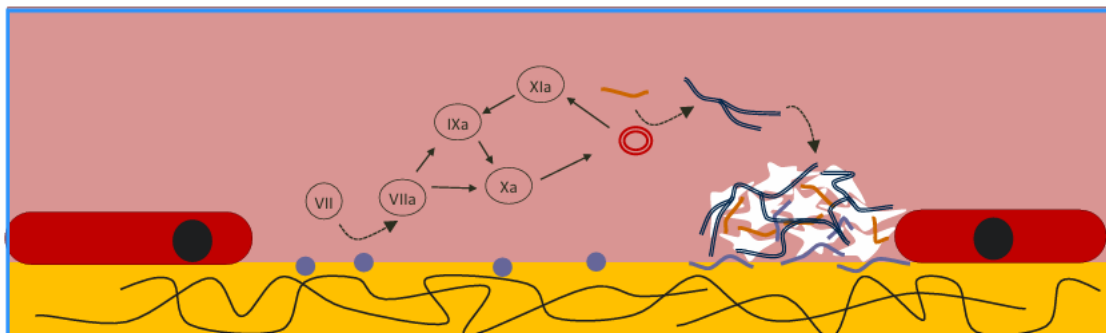
(vereinfachte Darstellung)



Plasmatische Hämostase (Koagulation)

Komplexe biochemische Reaktion zur Bildung eines Fibrinnetzwerkes zur Stabilisierung des Blutgerinnsels.

(vereinfachte Darstellung)



Der Thrombus:

→ Blutgerinnsel innerhalb Gefäßes

Ein Thrombus kann aus verschiedenen Gründen fluiddynamischer und biochemischer Natur entstehen:

- Erhöhte Schubspannung mit resultierender Aktivierung von Thrombozyten
- Wirbelbildung, Blutstagnation und somit Stagnation von Gerinnungsfaktoren
- Kontakt mit erkranktem Endothelium
- Kontakt mit Fremdmaterial bei endovaskulärer Implantation

Einfluss des Thrombus auf die Strömung

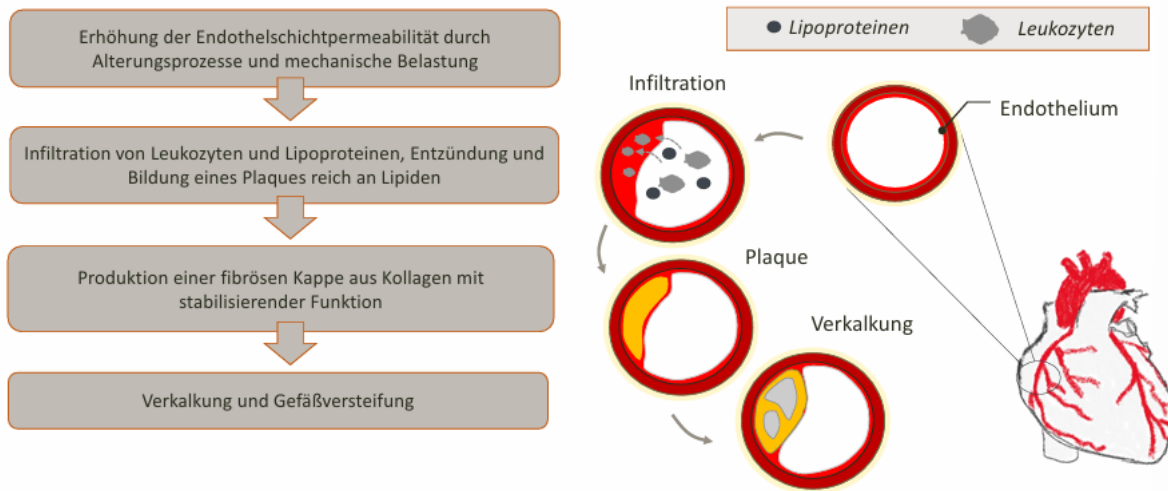
- Beschleunigung des Blutes
- Erhöhung der Schubspannung
- Ablösen von Teilen des Thrombus (Embolien)

Das Blutgerinnsel:



- Ergebnis der Hämostase
- Zusammensetzung des Blutgerinnsels: Fibrin, Thrombozyten, eingefangene Erythrozyten
- Blutgerinnsel werden im Lauf der Gewebeheilung wieder abgebaut

Atherosklerotische Plaque

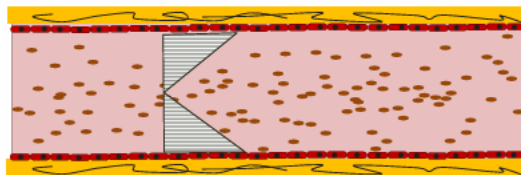


Hämodynamik in Stenosen

Stenosen

→ Verengungen von Hohlorganen, welche in Gefäßen meistens von atherosklerotischen Prozessen verursacht werden. Sie haben Einfluss auf die Blutströmungsverhältnisse.

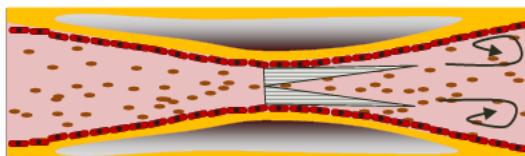
Gesundes Gefäß



$$\tau(r) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Die maximale Schubspannung tritt an der Gefäßwand auf.

Gefäßstenose



$$\tau_R = \frac{4 \cdot \mu}{\pi \cdot r^3} \cdot Q$$

Im Bereich der Stenose nimmt die Schubspannung zu.

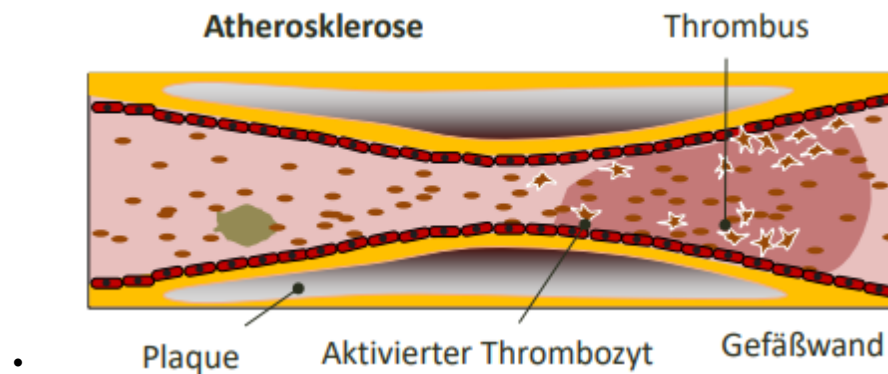
Hinter der Stenose kommt es zur Wirbelbildung und Blutstagnation.

Blutgerinnung und Erkrankungen

Kardiovaskuläre Erkrankungen beruhen auf dem plötzlichen Verschluss einer Arterie → häufigsten Todesursache weltweit

im Bereich von Atherosklerosen zustande auf Grund von:

- Hämodynamische Änderungen (Schubspannung und Stagnation)
- Erkranktes, durchlässiges Endothelium

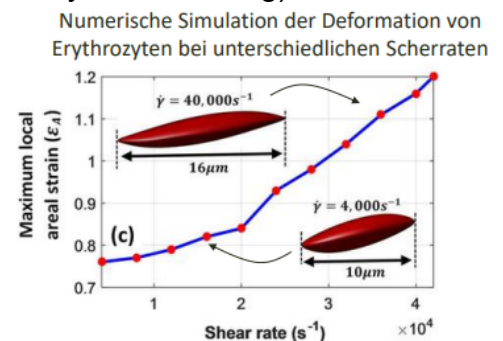


Die Hämolyse

Beschädigung der Erythrozytenmembran mit Austritt von Hämoglobin

- In Plasma aufgelöste Hämoglobin → schädlich für Organismus (v.a. Niere)
- Hämolyse wenn hohe Strömungsraten in kleinen Kanälen stattfinden (Blutpumpen / extrakorporalen Kreisläufen für die Dialysebehandlung)

Studien weisen auf eine Scherrate von über $\sim 40.000 \text{ s}^{-1}$ als Auslöser von Hämolyse unter unphysiologischen Bedingungen hin. Bei hohen Schubspannungen öffnen sich Poren an der Zellmembran, durch welche Hämoglobin austritt. Die Einwirkzeit der Schubspannungen beeinflusst den Grad der Hämolyse.



Implantat in der Blutbahn

→ Stents → stenotische Gefäße aufweiten → physiologischen Blutdurchfluss wiederherstellen

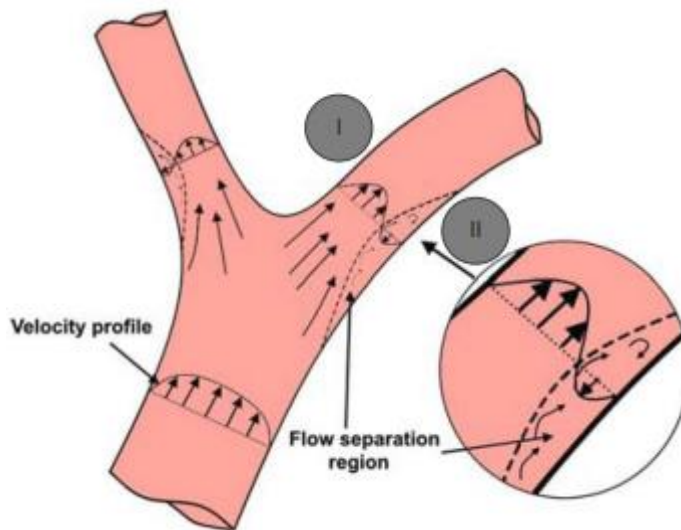
- **Änderung der Hämodynamik:**
 - hohe Schubspannungen und Blutstagnation hinter den Stentelementen
- **Biochemische Reaktion:**
 - Adhäsion von Plasmaproteinen am Fremdmaterial, Thrombozytenadhäsion
- **Verletzung des Endotheliums:**
 - Kontakt zwischen Blut und subendotheliale Gewebe

Medikamente werden eingesetzt, um die Aggregation von Thrombozyten zu vermindern

Schubspannungen in Bifurkationen:

Durch die Krümmung im Bereich von Abzweigungen kommt es zu:

- Abweichung vom laminaren Geschwindigkeitsprofil
- Erhöhung der Schubspannungen an der konkaven Seite (Stelle I)
- Umkehr der Strömungsrichtung an der konvexen Seite (Stelle II)



• → Umkehr des Druckgradienten und Strömungsablösung

Schubspannungsverteilung an Gefäßwand in pulsativer Strömung gehört zu den Faktoren, welche zur Entstehung einer Atherosklerose führen können (mechanobiologischer Effekt)

Erythrozyten in kleineren Kapillaren

- Erythrozyten reihen sich in Kapillaren aneinander
- Kontakt mit der Gefäßwand verringert den Widerstand des Gastransports mit den Alveolen und mit dem Gewebe
- Fluidynamik kann dabei nicht mit den Gesetzen des Kontinuums beschrieben werden → dünne Schicht von Plasma ermöglicht das Gleiten der stark verformten Erythrozyten an der Gefäßwand

Der Gefäßkreislauf:

- Besteht aus Herz & Blutgefäßen
- Für Transport von Blut zu und aus Körpergeweben

Unterscheidung:

- Körperkreislauf (großer Blutkreislauf)
- Lungenkreislauf (kleiner Blutkreislauf)

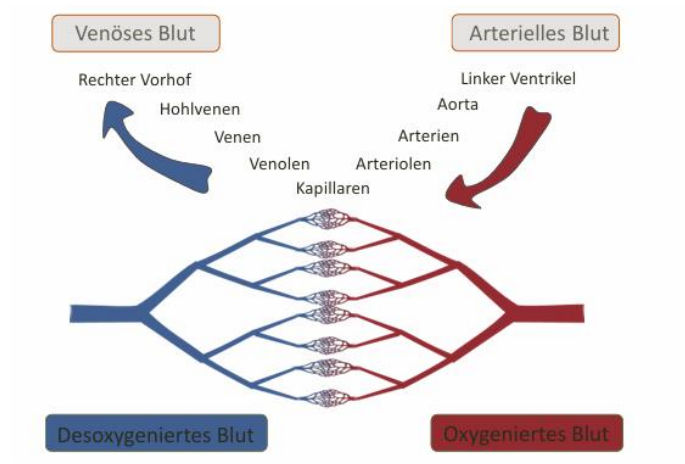
Transportrichtung

- Arterielles Blut: von Herz in Körpergewebe
- Venöses Blut: aus Körpergeweben in Herz zurück

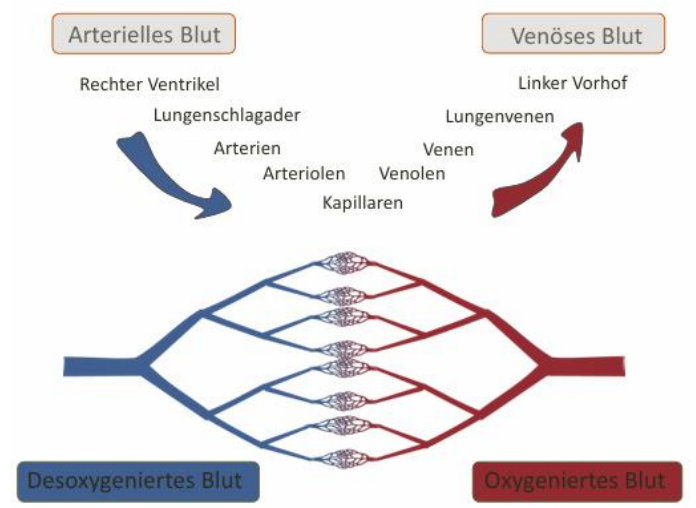
Sauerstoffsättigung

- Oxygeniertes Blut → mit Sauerstoff gesättigt
- Desoxygeniertes Blut → sauerstoffarm

Körperkreislauf:

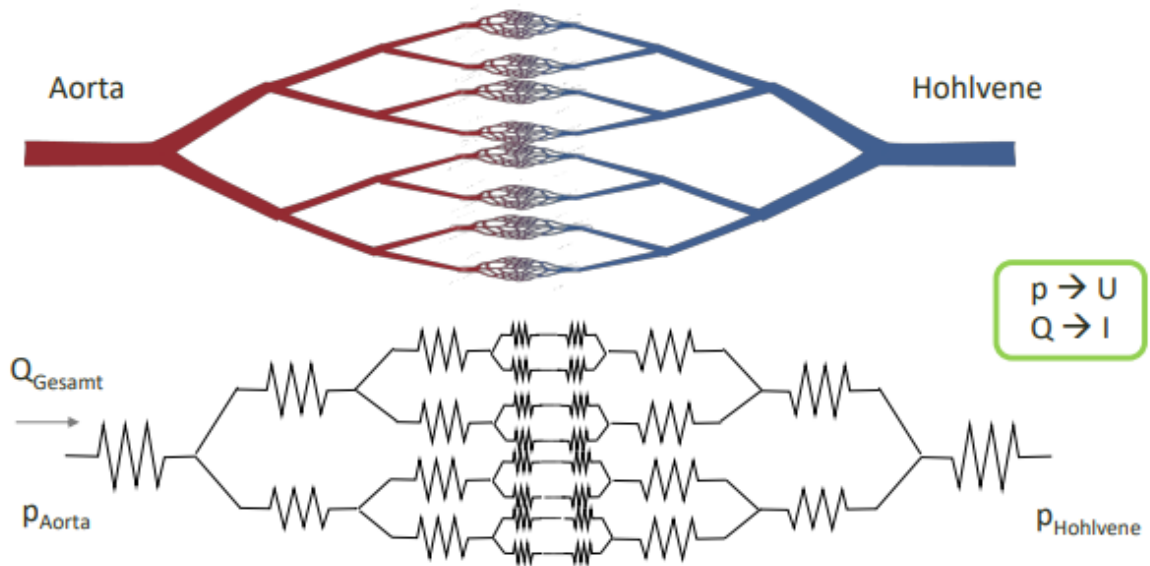


Lungenkreislauf:



Blutkreislauf in elektrotechnischer Analogie

- **Serielle und parallele Anordnung** von Strömungswiderständen
- Widerstandssymbole aus der Elektrotechnik



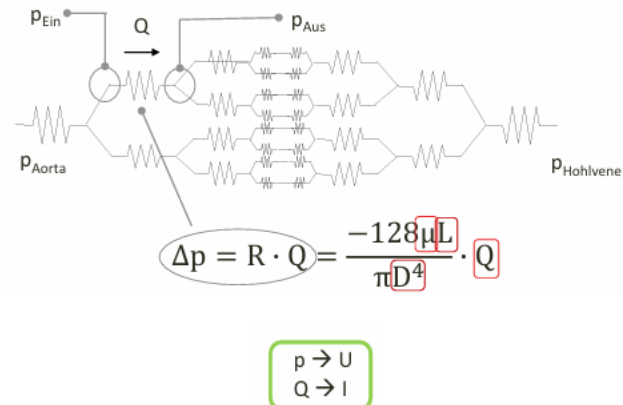
Strömungswiderstände in Gefäßen → Blutdruck sinkt auf Weg von Arterien über Kapillarbett bis zu Venen

Druckabfall $\Delta p = p_{Aus} - p_{Ein}$ in jedem Gefäßabschnitt ist abhängig von Gefäßgeometrie:

- Länge (L)
- Durchmesser (D^4)

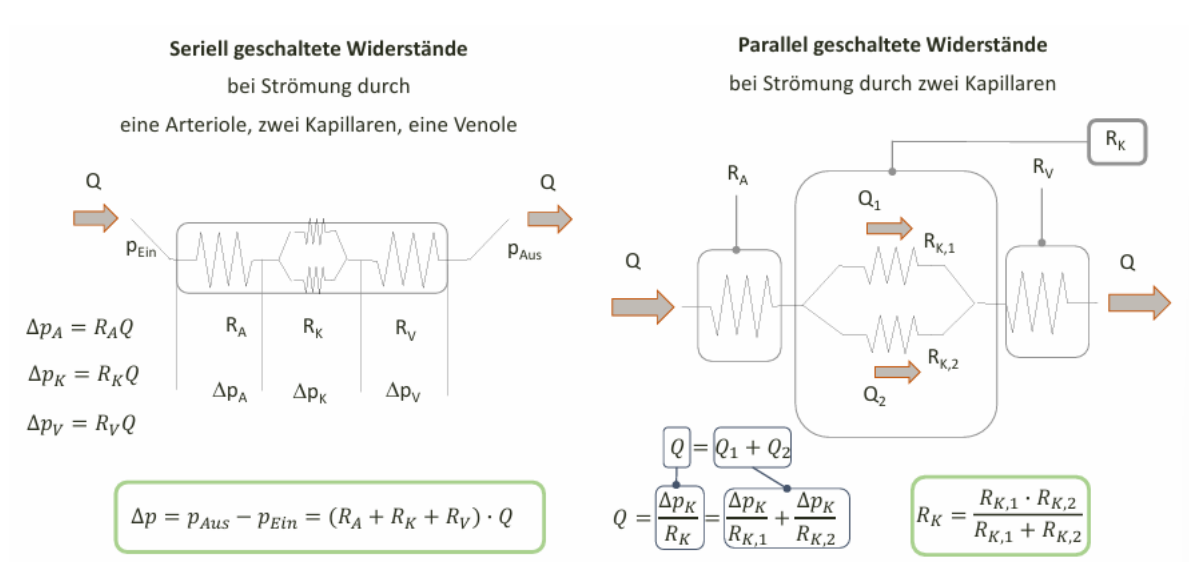
Außerdem ist der Δp abhängig von:

- Blutfluss (Q)
- Blutviskosität (μ)



→ Gefäße werden als zylindrisch, Strömung als stationär angenommen → > Höhenunterschied nicht berücksichtigt

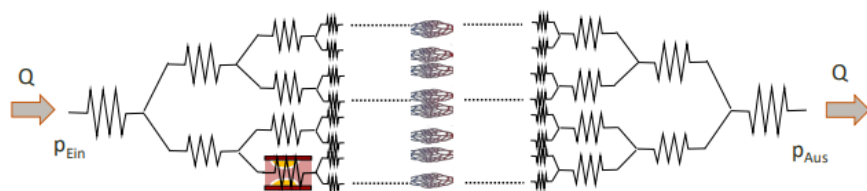
Berechnung der Widerstände



Auswirkung Durchmesseränderung

→ Änderung Gefäßdurchmesser (z.B. Krankhafte Verengung) → Änderung Druckverhältnis nach Hagen-Poiseuille

- entlang des verengten Gefäßes
 - in seriell angeordneten und parallel geschalteten Gefäßen
- Konsequenz:
- Bei gleichbleibendem Druckunterschied $p_{Ein} - p_{Aus}$ nimmt der Gesamtfluss Q ab

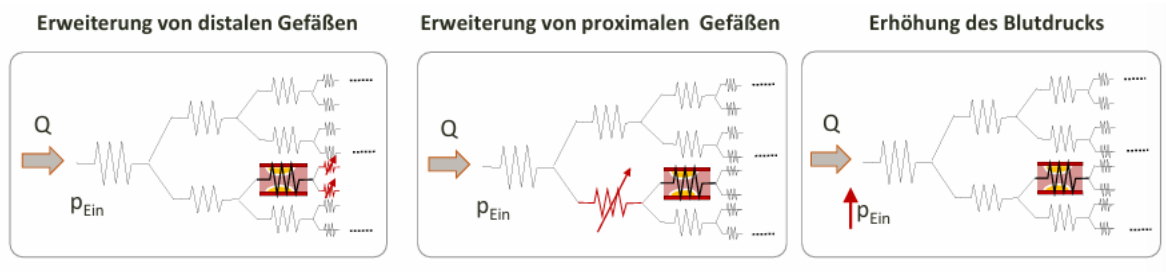


- **Anmerkung:**
 - Verengung einzelnen Gefäßes → Einfluss auf Druckverhältnisse in weiten Kreisläufbereichen vernachlässigbar
 - Verengung in mehreren Gefäßen → Einfluss nimmt Bedeutung zu

Regelung der Blutversorgung:

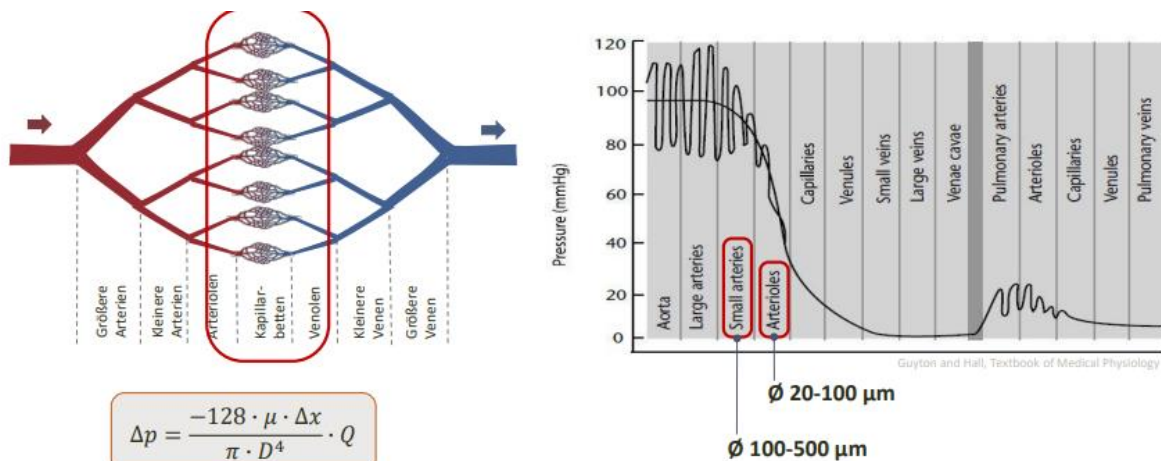
Kreislauf verfügt über Regulationsmechanismen → wirken Unterversorgung von Organen bei Zunahme Strömungswiderstandes in Gefäß entgegen

- Regelung der seriell geschalteten Widerstände, sowohl proximal als auch distal
- Erhöhung des Blutdruckes

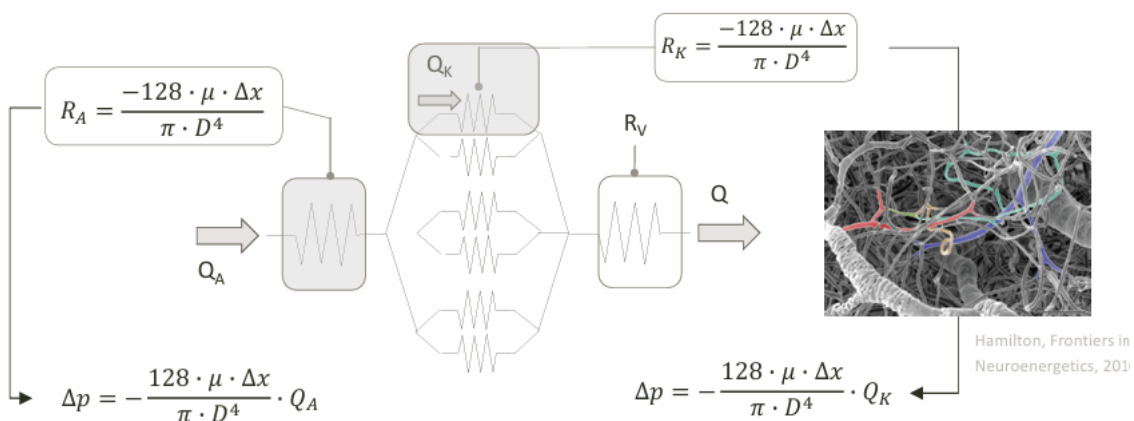


Blutdruck in Abhängigkeit der Strömungswiderstände

- Arteriolen, Kapillaren und Venolen (geringer Durchmesser) → Strömungswiderstände maßgeblich für den Druck verantwortlich



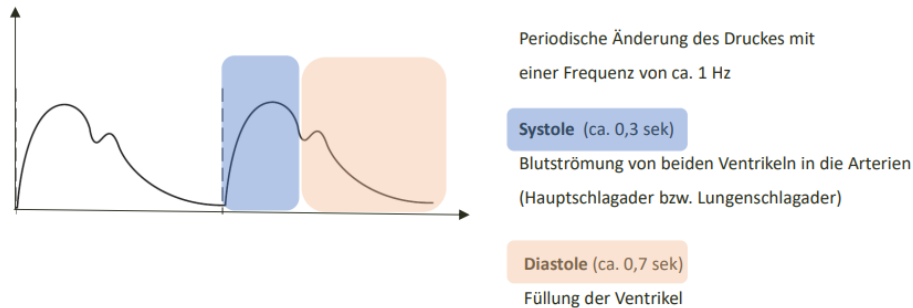
Der Druckabfall im Bereich der kleinen Arterien und Arteriolen ist größer als in den noch kleineren Kapillaren.



Die hohe Anzahl an Kapillaren bedingt einen niedrigen Volumenstrom Q_K durch die einzelne Kapillare.

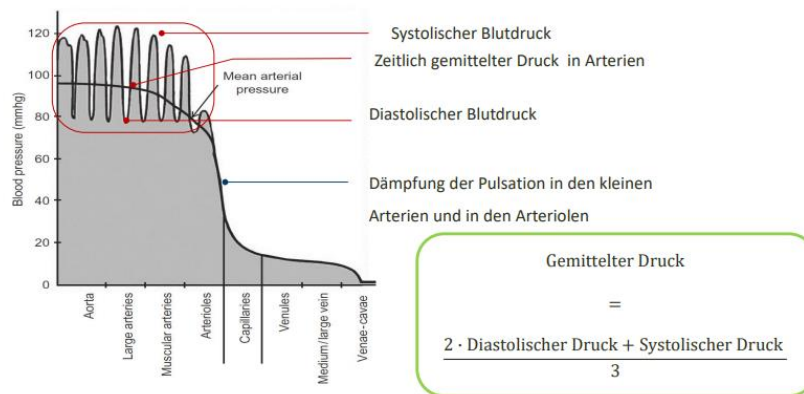
Pulsation: Blutströmen in der Aorta

→ Ändert sich während des Herzzyklus



Herzpulsation → periodischen Änderung des Drucks (Frequenz ca. 1 Hz) → periodische Änderung Gefäßdurchmesser (ca. 10 bis 15 %) in großen Gefäßen, → schwächt Pulsatilität ab

Blutdruck bei Pulsation:



Blutdruck in Abhängigkeit der Höhe:

→ große Arterien und Venen (geringe Strömungswiderstände, Höhenunterschiede relevant) → Bernoulli mit Vernachlässigung der kin. Energie

$$\frac{p}{\rho} + g h + \frac{1}{2} v^2 = \text{konst} \quad \frac{1}{2} v^2 \text{ vernachlässigbar} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} + g h = \text{konst}$$

Liegend – Druck im zeitlichen Durchschnitt:

- ca. 100 mmHg in großen Arterien
- 5 mmHg in großen Venen

Der venöse Druck auf Herzhöhe beträgt ca. 5 mmHg

$$p_{V, \text{Herz}} = 5 \text{ mmHg}$$

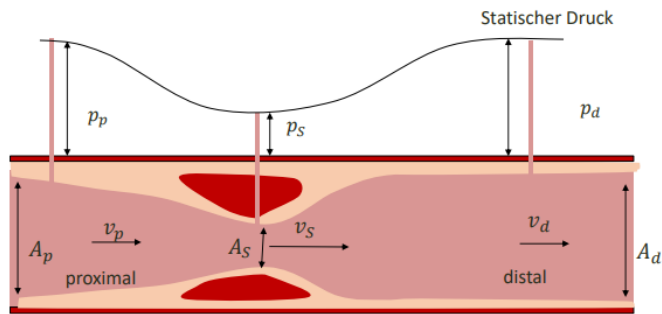
Der venöse Druck auf einer Höhe des Gehirns (20 cm über dem Herz) beträgt:

$$p_{V, \text{Hirn}} = 1060 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-0,2 \text{ m}) = -2.080 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = -15 \text{ mmHg}$$

- *Wir betrachten den relativen Blutdruck zur Atmosphäre.

Blutdruck bei Stenosen

Unter der Voraussetzung der Energieerhaltung bleibt die Gesamtenergie über eine Verengung konstant.



v : Durchschnittsgeschwindigkeit

Bei $A_p = A_d$ $v_p = v_d$

$p_p = p_d$

$$p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 = \text{konst} \quad p_p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_p^2 = p_s + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2 = p_d + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_d^2$$

Lokale Widerstände lassen sich als Funktion
der kinetischen Energie berechnen,

$$p_d - p_p = \Delta p = -\zeta \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_s^2$$

- ! wobei der Druckverlustbeiwert ζ ein empirisch ermittelter Faktor ist, der von der Gefäßgeometrie abhängig ist.

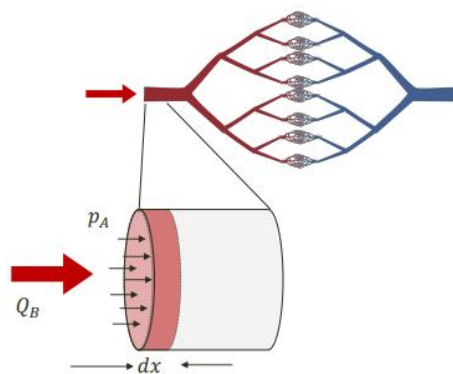
Herz

Basics:

- **Masse:** ca. 300 g (< 0,5% Gesamtkörpermasse)
- **Herzzeitvolumen** (vom Herzen geförderte Blutmenge pro Zeiteinheit):
→ ca. 5 l/min in Ruhezustand
- **Durchblutung** des Herzes über die Koronararterien:
→ ca. 250 ml/min in Ruhezustand (ca. 5% des Herzzeitvolumens)
- **Sauerstoffextraktion:**
→ 14 mlO₂ / 100 mlBlut (entsprechend 70% Extraktion bei 20 mlO₂ / 100 mlBlut in oxygeniertem Blut)
- **Zeitliche Sauerstoffextraktion:**
→ ca. 35 mlO₂ / min in Ruhezustand (entsprechend 10% Gesamtkörper)
- **Chemische Energie** bereitgestellt bei Verstoffwechselung
→ 1 mlO₂ = 19,5 J
- **Chemische Leistung:**
→ 19,5 J / mlO₂ · 35 mlO₂ / min ≈ 680 J min ≈ 11W

Herz leistet bei Förderung von Blut gegen Kreislaufwiderstand mechanische Arbeit:

→ **Mechanische Arbeit** resultiert aus Kraft und Bewegung



Mechanische Arbeit resultiert aus Kraft und Bewegung.

Mechanische Arbeit dW zur Förderung von Blut durch den Querschnitt $\pi \cdot r^2$ um den Weg dx:

$$dW = \underbrace{p_a \cdot \pi \cdot r^2}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{Weg}} = p_a \cdot dV_B$$

Q_B : Blutvolumenstrom
 p_a : Arterieller Druck

mit $dV_B = \pi \cdot r^2 \cdot dx$ (gefördertes Blutvolumen)

Mechanische Leistung:

- Mechanische Arbeit $dW = p_a \cdot dV_B$

- Mechanische Leistung $P = \frac{dW}{dt} = p_a \cdot \frac{dV_B}{dt} = p_a \cdot Q_B$ (Q_B = Volumenstrom)

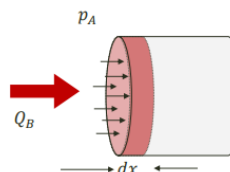
- Physiologische Mittelwerte in Ruhezustand:

$$Q_B = 5 \frac{l}{min}, p_a = 100 mmHg \text{ (Körperkreislauf) } / 20 mmHg \text{ (Lungenkreislauf)}$$

$$\rightarrow P_{\text{Körperkreislauf}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{60} \cdot \frac{m^3}{s} \cdot 13.300 \frac{kg}{m \cdot s^2} = 1,1 \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = 1,1 W$$

$$\rightarrow P_{\text{Lungenkreislauf}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{60} \cdot \frac{m^3}{s} \cdot 2.660 \frac{kg}{m \cdot s^2} = 0,22 \frac{kg \cdot m^2}{s^3} = 0,22 W$$

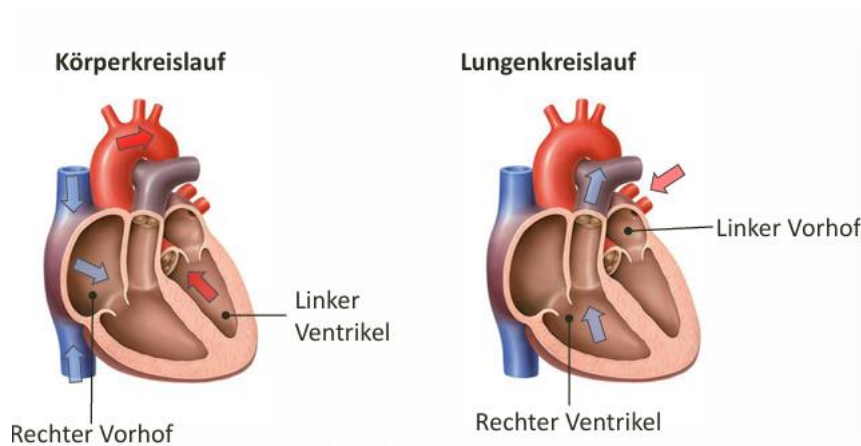
$$\text{mit } 1 mmHg \approx 133 \frac{kg}{m \cdot s^2}$$



Herzkammern:

vier Kammern → zwei Vorhöfe und zwei Ventrikel

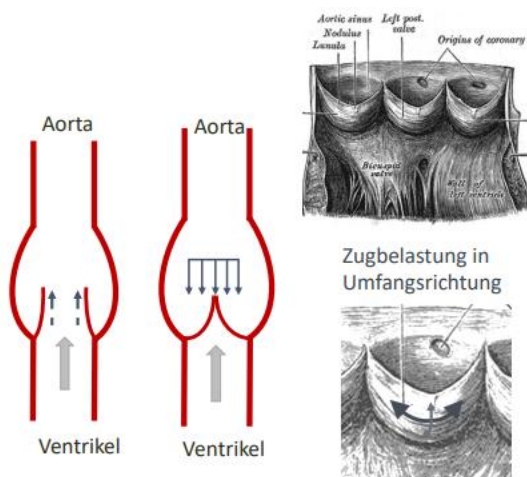
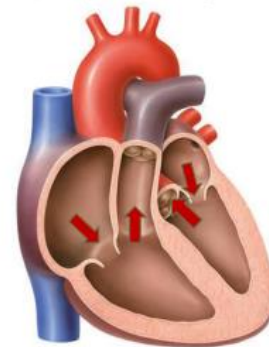
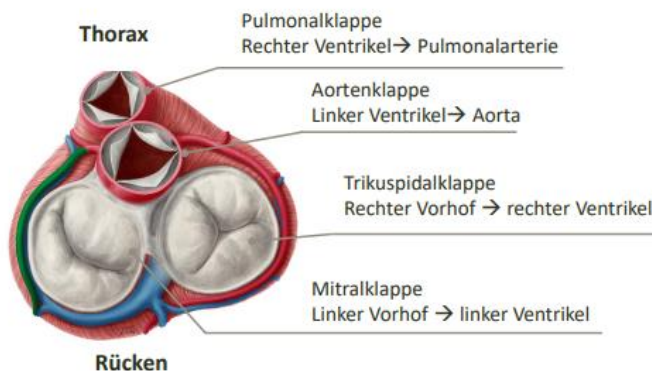
- Vorhöfe → Blutaufnahme im Herzen
- Ventrikel → Förderung von Blut aus dem Herzen



Herzklappen

→ Ventile → gewährleisten unidirektionale Strömung

- **Segelklappen** (Mitralklappe und Trikuspidalklappe): Vorhof → Ventrikel
- **Taschenklappen** (Aortenklappe und Pulmonalklappe): Ventrikel → jeweilige Arterie (Haupt- und Lungen Schlagader)



im geöffneten Zustand:

- Schubspannung auf ventrikulärer Seite
- Dehnung von elastischen Fasern in Richtung der Strömung

im geschlossenen Zustand:

- Axiale Druckbelastung an der Aortenseite
- Zugbelastung, überwiegend in Umfangsrichtung der Klappe

→ Herzklappen-Flügel besitzen anisotrope (Richtungsabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften) eigenschaften

Mechanischer Parameter	Aortenklappe
E-Modul in Radialrichtung in MPa	$1,95 \pm 0,15$
E-Modul in Umfangsrichtung in MPa	$15,34 \pm 3,84$



Die linke Herzseite

→ erbringt höhere mechanische Leistung gegen Widerstand des Körperkreislaufs im Vergleich zur rechten Herzseite → anfälliger für Erkrankungen

Phasen des Herzschlags (Frequenz ca. 1 Hz in Ruhezustand):

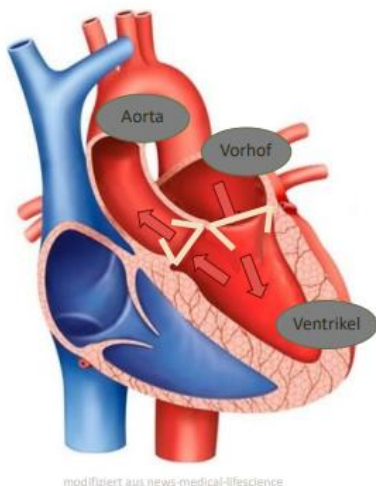
Diastole (ca. 0,7 sek):

- Entspannung des Ventrikels
- Öffnung der Mitralklappe zwischen Vorhof und Ventrikel → Füllung des Ventrikels

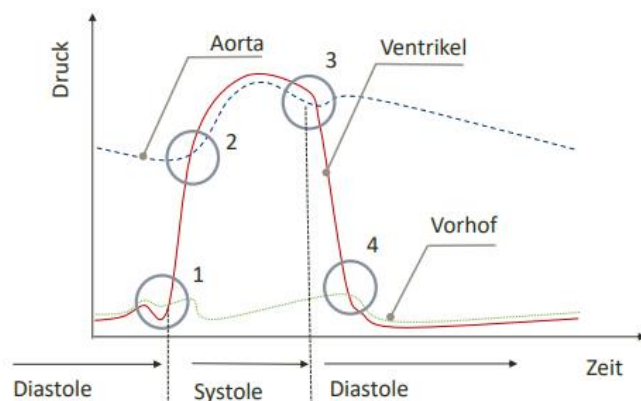
Systole (ca. 0,3 sek):

- Kontraktion des Ventrikels
- Öffnung der Aortenklappe zwischen Ventrikel und Aorta → Blutfluss in die Aorta

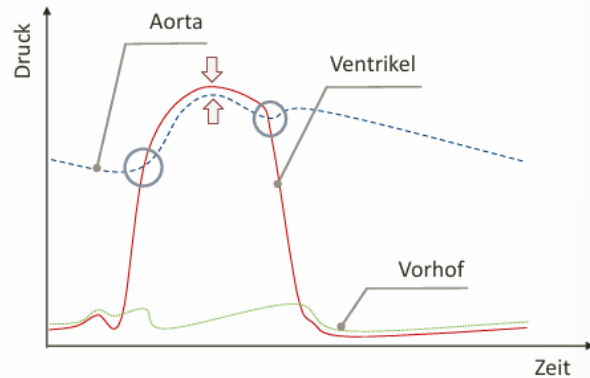
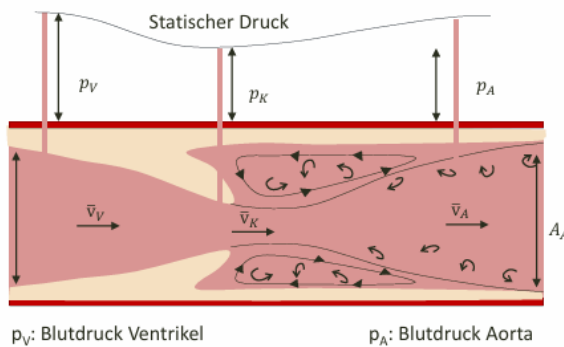
Druckverhältnisse an der linken Herzseite



modifiziert aus news-medical-lifescience



- 1 Anfang der Ventrikelkontraktion – Schließung der Mitralklappe
- 2 Öffnung der Aortenklappe, Blutströmung in die Aorta
- 3 Entspannung des Ventrikels – Schließung der Aortenklappe
- 4 Öffnung der Mitralklappe – Füllung des Ventrikels



Lokaler Strömungswiderstand

Einsatz des Bernoulli-Gesetzes in erweiterter Form

$$\frac{p_V}{\rho} + g h_V + \frac{1}{2} \bar{v}_V^2 = \frac{p_A}{\rho} + g h_A + \frac{1}{2} \bar{v}_A^2 + \zeta \frac{1}{2} \bar{v}_K^2$$

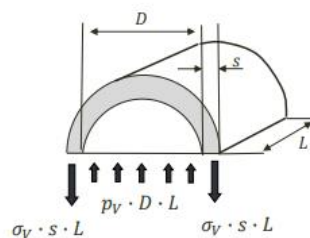
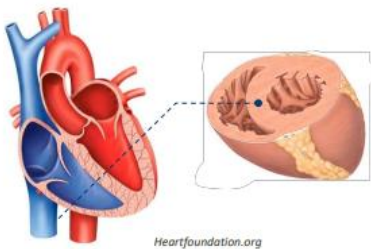
Mit der Annahme: $h_V \cong h_A$ und $\bar{v}_A \cong \bar{v}_V$

Energieverlust

$$p_V - p_A = \zeta \cdot \rho \cdot \frac{1}{2} \bar{v}_K^2$$

Unter physiologischen Bedingungen sind die Energieverlust $\zeta \frac{1}{2} \bar{v}_K^2$ und somit $p_V - p_A$ sehr gering

Der Spannungszustand des (linken) Ventrikels bestimmt die Druckverhältnisse während der Systole und der Diastole.



p_V : Blutdruck im Ventrikel
D: Durchmesser
L: Länge
 σ_V : Normalspannung im Ventrikel
s: Wandstärke

Diastole: passive Füllung des Ventrikels mit Blut aus dem Vorhof $\sigma_V = E_V \cdot \varepsilon_V$ (Betrachtung als Kontinuum)

E_V : Elastizitätsmodul des Ventrikels

ε_V : Dehnung des Ventrikels

Systole: aktive Kontraktion des Ventrikels $\sigma_{ges} = E_V \cdot \varepsilon_V + \sigma_M$

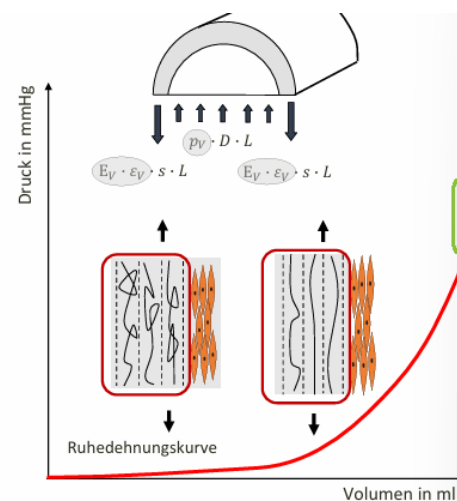
σ_M : von der Kontraktion des Herzmuskels hervorgerufene Spannung

Füllung des Ventrikels -> Ruhedehnungskurve

Ruhedehnungskurve

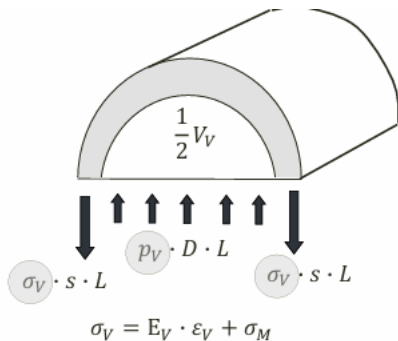
→ Beschreibt Beziehung zwischen Füllvolumen des Ventrikels und intraventrikulärem Druck bei ruhendem Herzen

- **Füllung des Ventrikels → Herzwandung in Umfangsrichtung gedehnt** → Es kommt zu einer Druckerhöhung
- Dehnung von **Elastin und Kollagen** → bestimmt Verlauf Druck-Volumen-Kurve (EV nimmt bei zunehmender Dehnung zu, ähnlich wie in Gefäßen)
- **Muskelzellen** gedehnt → tragen im geringen Maß zur Spannung bei



Frank-Starling Mechanismus:

- Erhöhung Ventrikelfüllung → erhöhte Dehnung Myozyten.
- Dehnung → erhöhte Kontraktionskraft der Myofibrillen während Systole
- Spannung in Ventrikelwand nimmt zu



Mit Betrachtung der **Laplace Gleichung**

(Annahme: dünne Wandung und homogene Spannungsverteilung)

$$2 \cdot (E_V \cdot \epsilon_V + \sigma_M) \cdot s = p_V \cdot D \quad (\text{im Gleichgewichtszustand})$$

$$V_V \uparrow \Rightarrow \epsilon_V \uparrow \Rightarrow \sigma_M \uparrow \Rightarrow p_V \uparrow$$

Der Blutdruck im Ventrikel nimmt bei Zunahme der Ventrikelfüllung zu

V_V : Volumen des Ventrikels

Druckentstehung im linken Ventrikel:

Kritisches Füllvolumen

- **Enddiastolisches Volumen:** ca. 120 ml (physiologisch)
- **Kritische Sarkomerlänge:** ca. 2,5 μm → **Kritisches Füllvolumen:** ca. 150 ml
→ Ventrikelspannung sinkt

Statische Betrachtung

→ Laplace- Gleichung → geht von statischem Zustand aus → Kräfte im Gleichgewicht.

- **Auswurfphase:** Muskelwand und Blut erfahren starke Beschleunigung → Kraftgleichsetzung: Vereinfacht Darstellung
- **Kraftgleichgewicht:** nur in isovolumetrischer Kontraktion und Entspannung

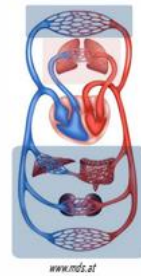
Physiologische Bedeutung des Frank-Starling-Mechanismus

→ Kurzfristige und gegenseitige Anpassung der Auswurfvolumina der rechten und linken Herzseite:

- Beide Ventrikel fördern ungefähr gleiche Blutmenge
- Kleine Abweichungen sind in Natur unvermeidbar
- Unterschied in geförderter Blutmenge → lebensbedrohliche Volumenverschiebung zwischen Körper- und Lungenkreislauf

Beispielrechnung:

- Das Herzschlagvolumen vom rechten Ventrikel ist 1 *ml* größer als vom linken Ventrikel
- Würde der Zustand halten, so würde sich bei einer Herzschlagfrequenz von 1 *Hz* innerhalb von ca. 15 *Minuten* ein Liter Blut vom Körper- in den Lungenkreislauf verlagern
- Der Druck nimmt allerdings im Lungenkreislauf und im linken Vorhof zu, somit auch die Füllung des linken Ventrikels. Die Spannung im linken Ventrikel nimmt nach dem Frank-Starling Mechanismus zu, somit auch das Herzschlagvolumen

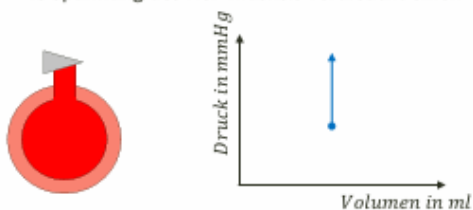


Körperkreislauf (ca. 4.500 ml)
Lungenkreislauf (ca. 500 ml)

Kontraktion des Ventrikels:

Isovolumetrische Kontraktion

- Der Blutausschuss ist durch die geschlossene Aortenklappe verhindert
- Die Spannung des Herzmuskels verursacht einen Druckanstieg im Ventrikel



Isovolumetrische Maxima

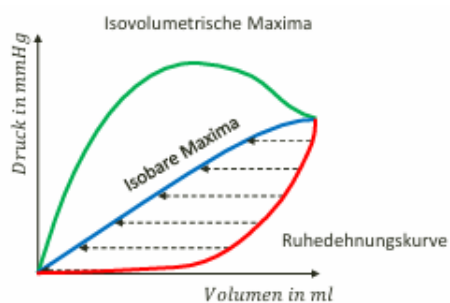
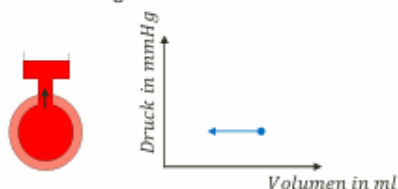
Beziehung zwischen Füllung des Ventrikels und Druckanstieg im Ventrikel (experimentell ermittelt).

Nach dem Frank-Starling Mechanismus erhöht sich die Spannung und somit der Druck bei steigendem Volumen.

Ab dem kritischen Volumen (ca. 150 ml) sinkt der vom Ventrikel erzeugte Druck wieder.

Isobare Kontraktion

- Der Blutausschuss ist durch die offene Klappe ungehindert
- Der Auswurf erfolgt bei konstantem Druck



Isobare Maxima

Beziehung zwischen Füllung des Ventrikels und gefördertem Volumen bei konstantem Druck (experimentell ermittelt).

Nach dem Frank-Starling Mechanismus erhöht sich die Muskelspannung. Der Druck ist allerdings konstant.

Die höhere Spannung führt - bis zum kritischen Füllvolumen - zu einer Erhöhung des ausgeworfenen Blutvolumens.

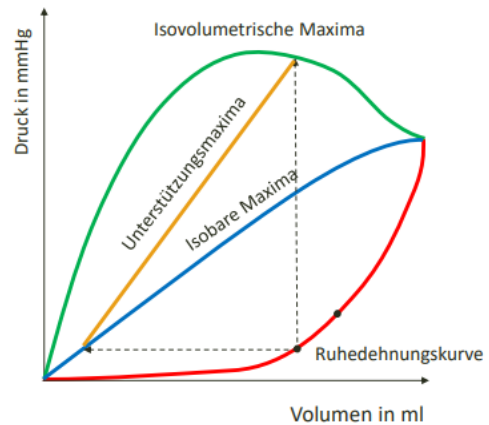
➔ Sowohl isovolumetrische als auch isobare Maxima stellen fiktive, experimentell ermittelte Kurven dar.

Auxobare Kontraktion - reeller Kontraktionsvorgang

- Der Auswurf erfolgt bei gleichzeitiger Abnahme des Volumens und Druckzunahme
- Die Druckzunahme erfolgt durch die Compliance der Aorta

Kurve der Unterstützungsmaxima

- Für jeden Punkt auf der Ruhedehnungskurve ergibt sich eine Gerade (Unterstützungsmaxima) aus der Verbindung der isobaren mit der isovolumetrischen Maxima
- Sie dient der Ermittlung des geförderten Volumens bei einem sich ändernden Druck in der Aorta.

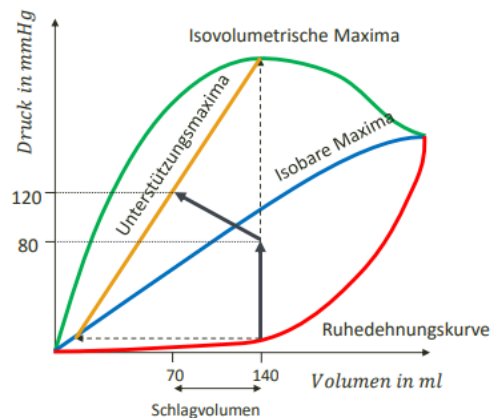
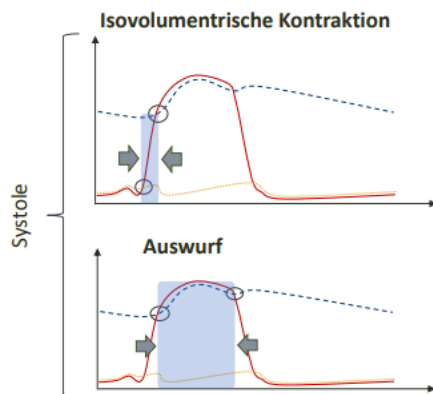


Druckverlauf im linken Ventrikel - Systole

Biomechanik

Über die Kurve der Unterstützungsmaxima lässt sich das ausgeworfene Blutvolumen darstellen als Funktion von:

- enddiastolisches Füllvolumen im Ventrikel
- systolischer Aortendruck

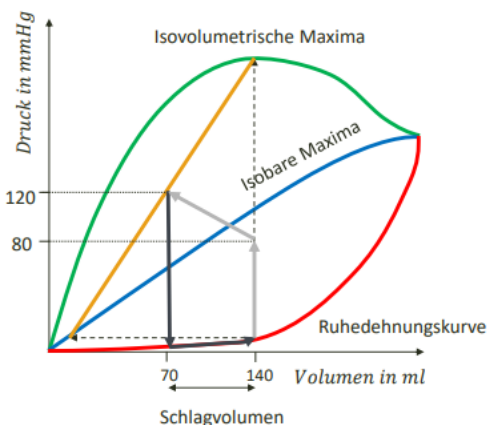
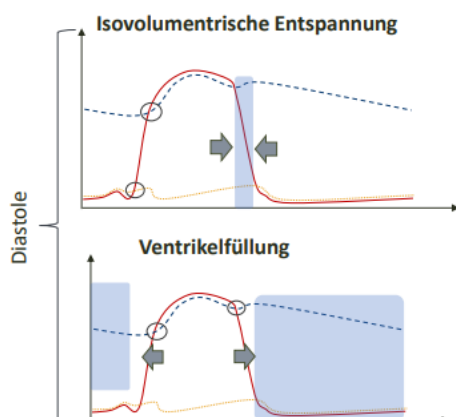


Druckverlauf im linken Ventrikel - Diastole

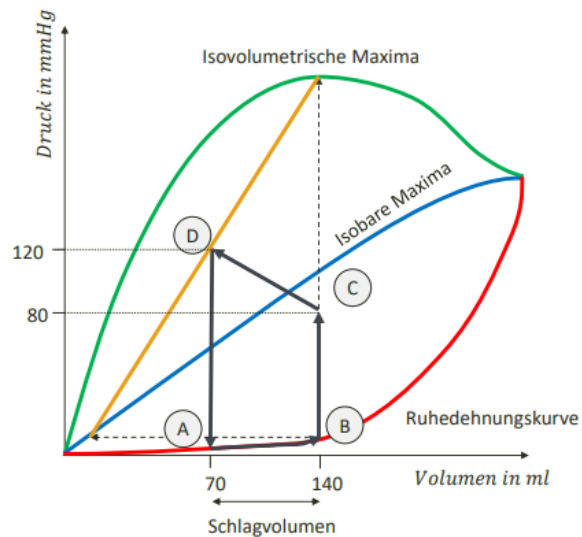
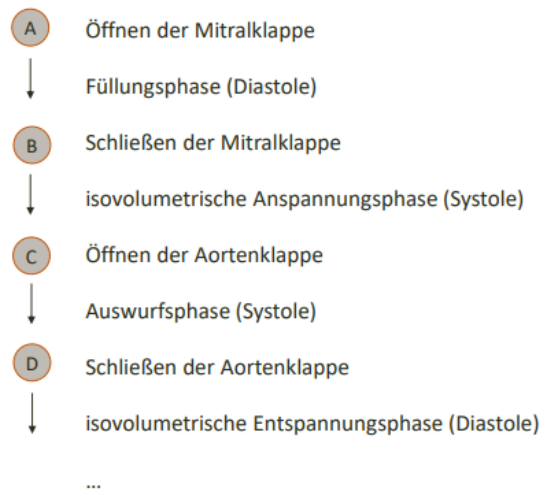
Biomechanik

Während der Diastole nimmt zunächst der Druck bei gleich bleibendem Volumen ab (isovolumetrische Entspannung).

In einer zweiten Phase nimmt das Volumen im Ventrikel wieder zu (Füllung).



Mechanik der Herztätigkeit



Herzarbeit

In den verschiedenen Phasen des Herzzyklus ergibt sich die vom Herzen geleistete mechanische Arbeit aus:

- ausgeworfenem Blutvolumen
- Druck, gegen den das Blutvolumen gefördert wird.

$$W_{B \rightarrow C} = p_a \cdot dV_B = 0 \quad W_{C \rightarrow D} = - \int_C^D p_a \cdot dV_B$$

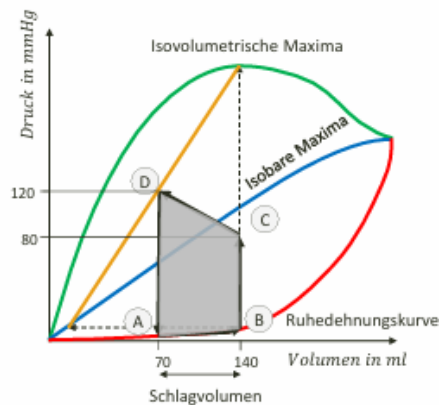
$$W_{D \rightarrow A} = p_a \cdot dV_B = 0 \quad W_{A \rightarrow B} = \int_A^B p_a \cdot dV_B$$

$$W_{\text{Zyklus}} = - \int_C^D p_a \cdot dV_B + \int_A^B p_a \cdot dV_B$$

In der Auswurfsphase wird Arbeit vom Herzen geleistet (-).

In der Füllphase wird elastische Energie im Herzen gespeichert (+).

Die Ventrikulararbeit entspricht der durch die Verbindung der vier Punkte A-D im Diagramm gebildeten Fläche.



Frank-Starling Mechanismus

Frank-Starling Mechanismus

Biomechanik

Vorlast = Blutdruck im Ventrikel am Ende der Diastole. Daraus resultiert eine Vorspannung des Myokards.

Nach dem Frank-Starling Mechanismus reagiert das Herz auf eine Änderung der Vorlast mit einer Änderung des Auswurfvolumens.

Eine Verschiebung von Volumen in den Lungenkreislauf verursacht eine Erhöhung des Druckes (Effekt der Gefäß-Compliance)



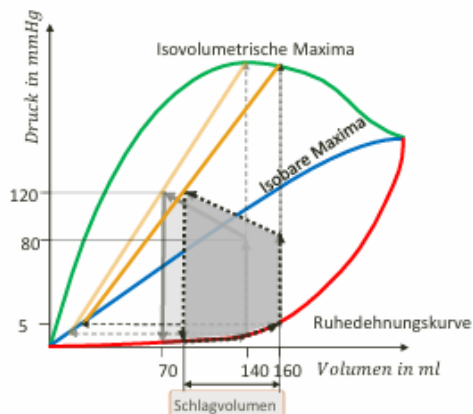
Die Erhöhung des Druckes in den Venen des Lungenkreislaufs verursacht eine Erhöhung des Druckes im linken Vorhof



Die resultierende Erhöhung des enddiastolischen Füllvolumens im Ventrikel verursacht eine Erhöhung der Muskelspannung und des ausgeworfenen Volumens und somit eine Volumenverschiebung in den Körperkreislauf

Änderungen der Vorlast

Auswurfvolumen und somit Herzarbeit erhöhen sich



Nachlast = mittlerer Blutdruck, gegen den der Ventrikel das Blut auswirft. Im physiologischen Zustand entspricht dies dem Aortendruck.

Aus einem erhöhten Kreislaufwiderstand resultiert eine Druckerhöhung in der Aorta



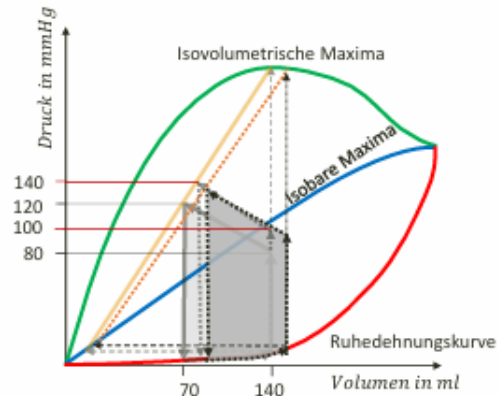
Der linke Ventrikel fördert zunächst ein kleineres Volumen. Ein größeres endsystolisches Volumen verbleibt im Ventrikel.



Die Volumenverlagerung verursacht eine Erhöhung des Vorhofdrucks, somit der Ventrikelfüllung und des ausgeworfenen Volumens gegen den erhöhten Druck

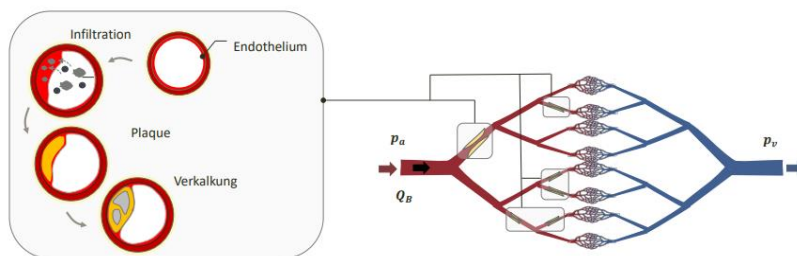
Änderung der Nachlast

Das Auswurfvolumen bleibt konstant, die Herzarbeit nimmt zu

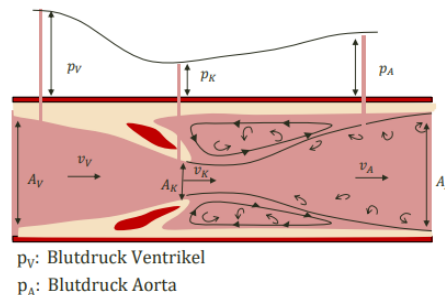


→ Artherosklerose; Erhöhung der Nachlast

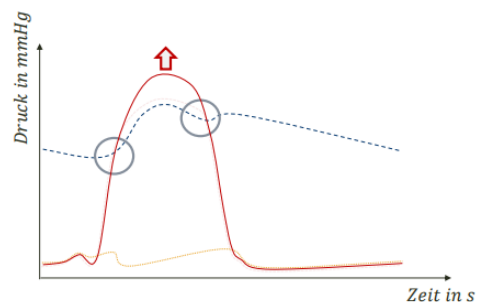
- Resultierende Stenose → Erhöhung Kreislaufwiderstand
- Erhöhung Blutdruck in Aorta → Nachlast erhöht



- Aortenklappenstenose → Strömungswiderstand erhöht sich



$$\uparrow p_v - p_A = \zeta \cdot \rho \cdot \frac{1}{2} \bar{v}_A^2 \uparrow$$



- Erhöhung des Strömungswiderstand
- Zunahme des Drucks im Ventrikel

Herzinsuffizienz:

→ wenn das Herz die vom Körper benötigte Blutversorgung nicht mehr gewährleisten kann

Mögliche Ursachen:

- Erhöhung der Nachlast → Erhöhung erforderlichen Herzarbeit
- Unterversorgung des Herzens auf Grund von Atherosklerose in Koronargefäßen, Verringerung der Herzarbeit
- Erkrankung des Herzmuskels (Kardiomyopathie)

Akutes Herzversagen (kardiogener Schock)

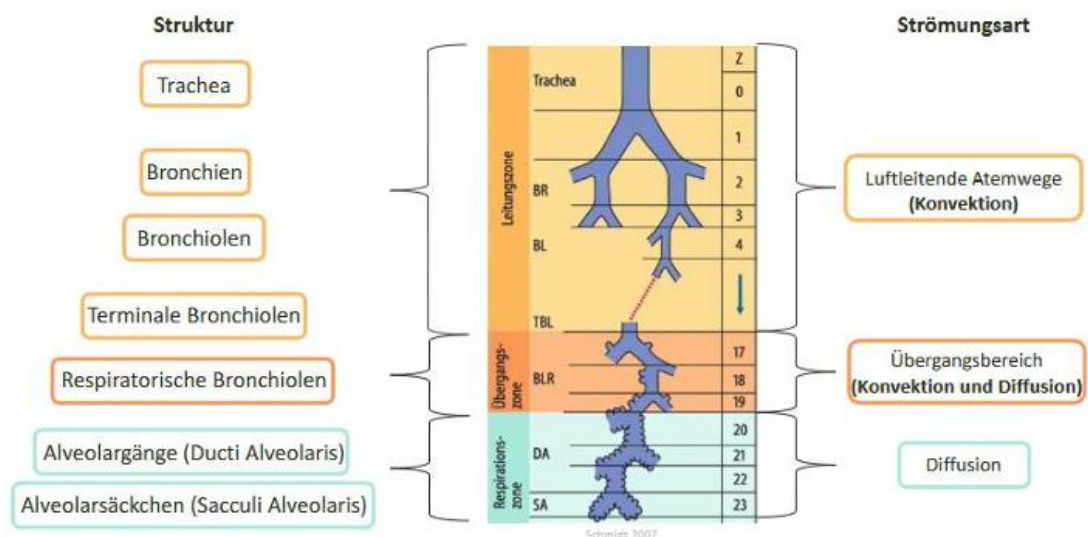
→ Plötzliche Unfähigkeit des Herzens, weitere Organe mit ausreichendem Blutfluss zu versorgen

- Herzinfarkt, eine plötzliche Unterversorgung des Herzens auf Grund eines Koronararterienverschlusses
- Der Verschluss ist in der Regel von einem Thrombus verursacht, der sich im Bereich einer Stenose bildet

Respiratorisches System

- **Obere Atemwege**
 - Nasen-, Mundhöhle, Rachenraum
- **Untere Atemwege**
 - Kehlkopf mit Stimmbändern, Lunge (Trachea, Bronchien, Bronchiolen, Alveolen) – Bronchialbaum
- **Lunge:**
 - 2 Flügel (links 2 Lappen, rechts 3 Lappen)
- **Funktion:**
 - → **Austausch von Sauerstoff O₂ und Kohlenstoffdioxid CO₂ zwischen der Umgebung und dem Blut über eine Austauschoberfläche**
 - **Gaskonvektion:**
 - Trachea, Bronchien, Bronchiolen
 - **Gasdiffusion:**
 - Respiratorische Bronchiole, Alveolarraum
 - → **Übergangsbereich:** konvektive und diffusive Transportmechanismen relevant
 - Gasaustausch zwischen Alveolarraum und Blut in Lungenkapillaren erfolgt über Lösungs-Diffusions-Prozess

Strukturen des Bronchialbaums:



Ventilation

→ mechanischer Vorgang, der über muskuläre Arbeit die alternierende Zufuhr von Luft und Abfuhr von CO₂ ermöglicht -> belüftet die Lunge über Lungenmuskulatur

- Volumenänderung durch Zusammenwirkung von Atemmuskulatur
- vegetatives Nervensystem -> unbewusste Funktion
- durch willkürliche Muskelkontraktion ist bewusste Steuerung möglich
- wesentlicher an Atmung beteiligter Vorgang

Atmung

→ Austausch von O₂ und CO₂ zwischen Umgebung und Organismus

- Vorgänge zur Energiegewinnung auf zellulärer Ebene -> Verbrauch von O₂ und Erzeugung von CO₂

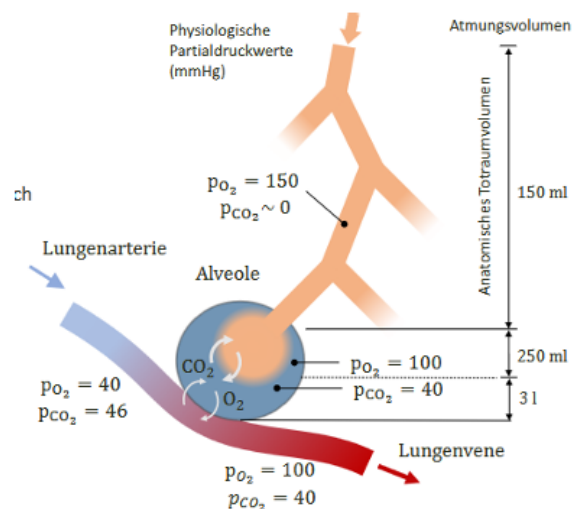
Lungenmechanik und Gasaustausch

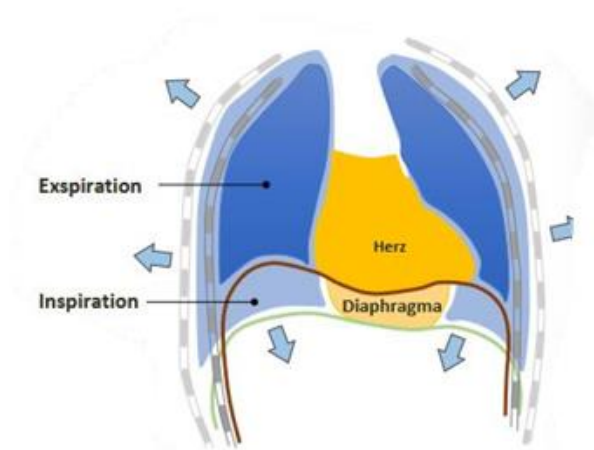
respiratorischen Bereich innerhalb der Alveolen ist:

- p_{O_2} größer als im Blut am Einlass der Kapillaren
- p_{CO_2} kleiner als im Blut am Einlass der Kapillaren

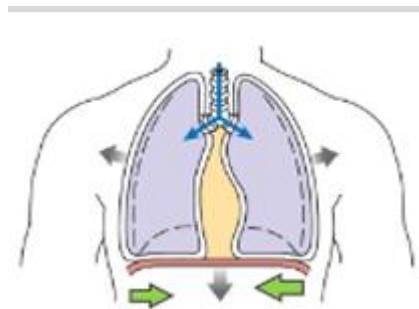
→ Durch die Partialdruckgradienten erfolgt der Gasaustausch

- Durch die Ventilation wird ein Teil von CO₂-angereichertem Gasgemisch aus den Alveolen heraus transportiert
- Über Atemzugvolumen und Atemfrequenz lassen sich die Partialdrücke in den Alveolen beeinflussen

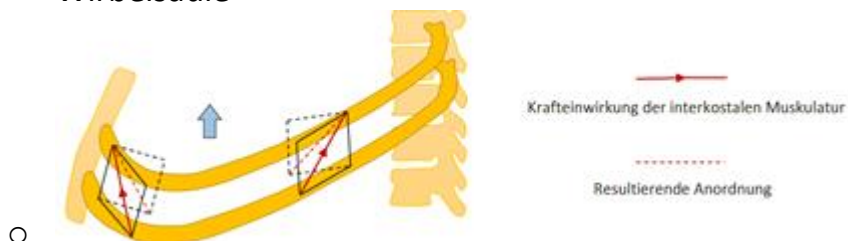




Inspiration:



- Einatmung, Befüllung der Lunge über Muskelkontraktion
- Diaphragma sinkt ab (2/3)
- Interkostalmuskeln verschieben Rippen nach Oben (1/3)
 - verursacht abhängig von der Muskelorientierung eine relative Rippenbewegung → bestimmt Drehung um Rippenhalsachse an Wirbelsäule



-
- Unterdruck (relativer Druck bezogen auf Atmosphäre) in Lunge
- **Forcierte Inspiration:**
 - Aufweitung der Lungenmuskulatur am Schultergürtel, hinteren Nacken und an der Wirbelsäule
 - Aufweitung der oberen Atemwege: Muskeln des Nasenflügels, Hals-Wangen- und Kehlkopf- und Zungenmuskulatur

Expiration:

- Ausatmung, Entleerung der Lunge
- Passiv, über Rückstellkraft des Thorax
- **Forcierte Expiration**
 - Über Muskeln des Abdomens (gerader Bauchmuskel) und Zwischenrippenmuskel

Atemzugvolumen (AZV): Volumen, das in einem Atemzug aufgenommen (und wieder abgegeben) wird. Es beträgt im Ruhezustand ca. 400-500 ml.

Reservevolumen (RV): zusätzliche Volumen, die jeweils in der Ein- und Ausatmung aufgenommen und abgegeben werden können.

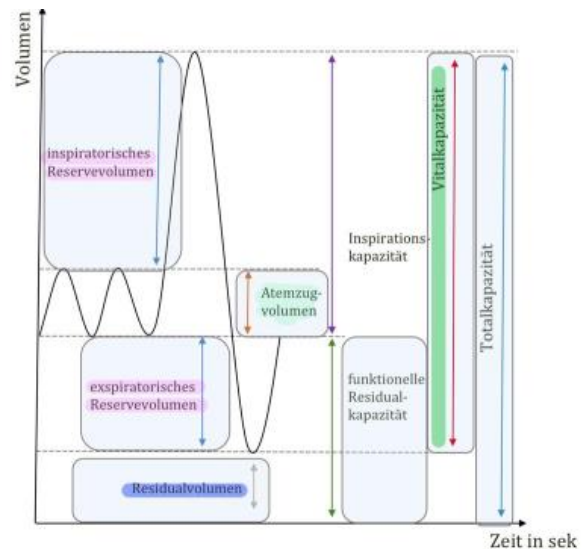
Funktionelle Residualkapazität (FRK): Volumen, das im Ruhezustand am Ende der Ausatmung in den Lungen verbleibt (es beträgt ca. 3 l).

Vitalkapazität (VK): maximales Volumen, das ein- und ausgeatmet werden kann.

→ ergibt sich aus der Differenz zwischen der

Totalkapazität (TK) und dem Residualvolumen

$$TK - \text{Residual} = \text{Vital}$$



Modifiziert nach R. Larsen - Bestimmung: Indikatoren - Techniken - Krankheitsbilder, 2023

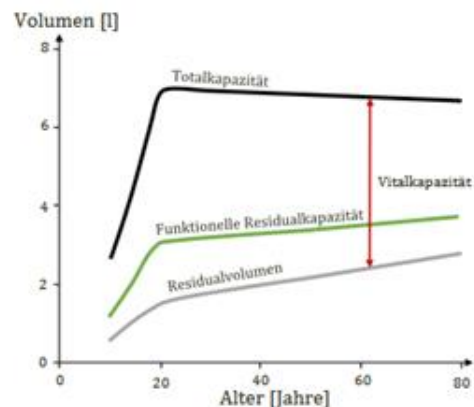
Vitalkapazität (VC): Messgröße für die Ausdehnungsfähigkeit der Lunge und des Thorax. Abhängig von der Körpergröße, des Geschlechts, des Alters und von der allgemeinen Fitness einer Person.

Näherungswert aus zwei Gleichungen:

$$1) VC [l] = 7 \cdot (\text{Körpergröße [m]} - 1)$$

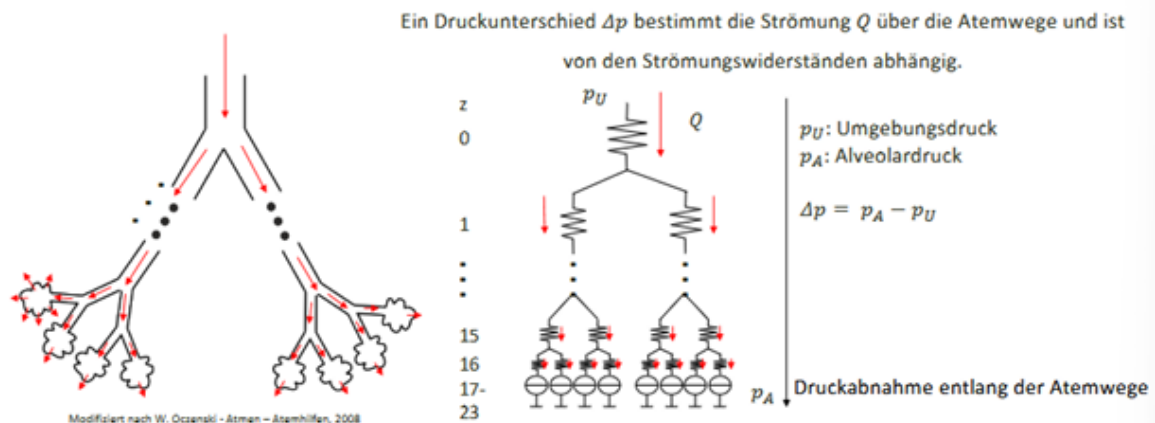
$$2) VC [l] = 65 - 75 \text{ ml} \cdot \text{Körpergewicht [kg]}$$

Der physiologische Wert beträgt ca. 4,0 – 6,0 Liter und nimmt mit steigendem Alter ab



-> Dehnung der Alveolarwand $\leftrightarrow$ Druckunterschied $p_a - p_p$ (nach Expiration $p_a > p_p$)

- Alveolen ändern ihre Volumen während der Ein- und Ausatmung
- Die zeitliche Volumenänderung entspricht dem Volumenstrom, der in die Alveolen strömt



Unter Verwendung des **Hagen-Poiseuille Gesetzes** gilt:

$$\Delta p = p_A - p_U = p_A = R \cdot Q = -\frac{128\mu L}{\pi D^4} \cdot Q \text{ (Einatmung)}$$

$$\Delta p = p_U - p_A = -p_A = R \cdot Q = -\frac{128\mu L}{\pi D^4} \cdot Q \text{ (Ausatmung)}$$

Umgebungsdruck $p_U = 0$

Mit Betrachtung eines (-) Zeichens für geleistete Arbeit, resultiert

$$W = -(p_U - p_P) \cdot \Delta V \quad \text{mit } p_U = 0$$

$$\rightarrow W = p_P \cdot \Delta V$$

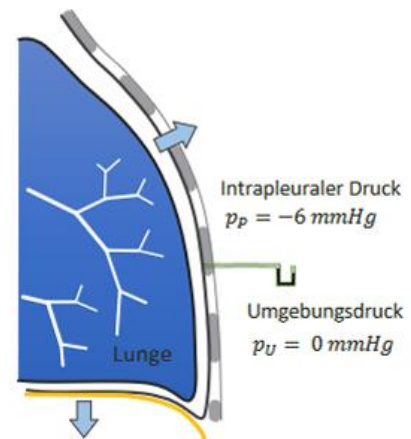
Physiologische Werte (Größenordnung) der Arbeit pro Atemzug

$$p_P = -6 \text{ mmHg} \quad (0,8 \cdot 10^3 \text{ Pa})$$

$$\Delta V = 500 \text{ ml} \quad (\sim 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)$$

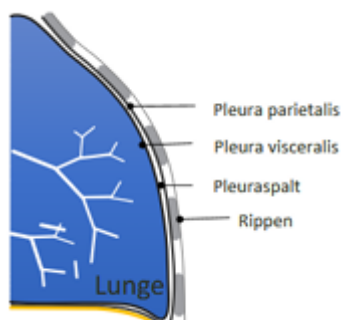
$$\text{Arbeit } W = -0,4 \text{ J pro Atemzug}$$

$$\text{Leistung (bei 15 Atemzüge / min) } P = 0,1 \text{ W}$$



Anmerkung: Bei kleinen Volumenänderungen betrachten wir p_P als konstant (siehe Zeit-Volumen-Diagramm)

Pleura



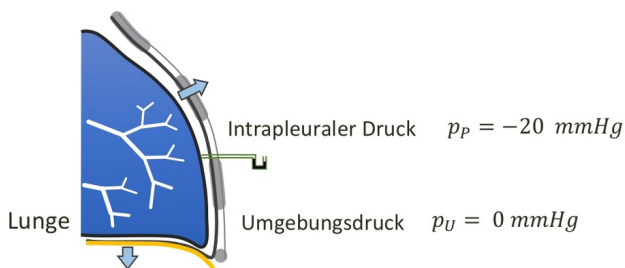
- Dünne Schutzhülle der Lunge
- Trennt Lunge von Zwerchfell, Thoraxmuskulatur
- Pleura visceralis / Pleura parietalis
- **Volumenvergrößerung bei Inspiration**
 - Volumenzunahme in den Innenräumen der Lunge wegen der Inkompressibilität der Pleuraflüssigkeit
 - Aufweitung der Alveolen über Dehnung der Alveolarwand
 - Die Druckverhältnisse über die Alveolarwand ergeben sich aus den Dimensionen und der Gewebe-Compliance

Restriktive Ventilationsstörungen: Erkrankungen, welche die Compliance des Atmungssystems beeinflussen.

- **Lungenfibrose:** Verminderte Dehnbarkeit der Alveolarwand über Gewebeänderungen → Abnahme der Compliance
- **Lungenödem:** Verminderte Dehnbarkeit der Alveolarwand über Flüssigkeitsansammlung → Abnahme der Compliance

$$p_A - p_P = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

Verminderte Compliance führt zur Zunahme der Spannungen in der Alveolarwand
→ Ein niedrigerer intrapleuraler Druck ist erforderlich, um die Alveolen aufzuweiten.



Modifiziert nach W. Oczenski - Atmen – Atemhilfen, 2008

Einfluss auf die Lungenarbeit:

$$p_P = -20 \text{ mmHg} (2,7 \cdot 10^3 \text{ Pa})$$

$$\Delta V = 500 \text{ ml} (\sim 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)$$

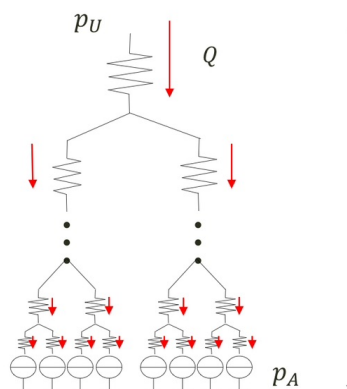
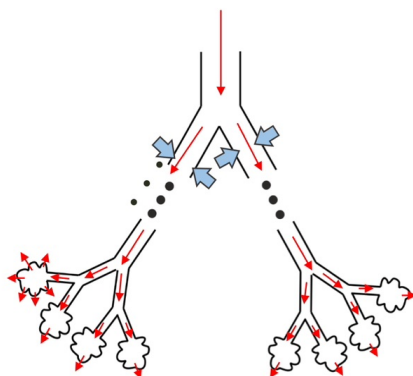
$$\text{Arbeit } W = -1,35 \text{ J pro Atemzug}$$

$$\text{Leistung (bei 15 Atemzüge / min)} P \sim 0,34 \text{ W}$$

Obstruktive Ventilationsstörungen: Erkrankungen, welche den Strömungswiderstand erhöhen

Ein höherer Widerstand der Atemwege führt zu einer Abnahme des intrapulmonalen Drucks p_A bei gleichbleibendem Volumenstrom.

Verengung von Atemwegen



bei gleichbleibender Compliance

$$p_A - p_P = \frac{2 \cdot \sigma_\theta}{r}$$

$$\text{Bei } p_A - p_P = 6 \text{ mmHg}$$

$$\text{und } p_A = -8 \text{ mmHg} \Rightarrow p_P = -14 \text{ mmHg}$$

$$\Delta V = 500 \text{ ml} (\sim 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)$$

$$\text{Arbeit } W = -1 \text{ J pro Atemzug}$$

$$\text{Leistung (bei 15 Atemzüge / min)} P \sim 0,25 \text{ W}$$

Compliance bei der künstlichen Beatmung:

Verhältnis zwischen dem geförderten Gasgemisch-Volumen ΔV und dem dafür notwendigen intrapulmonalen Druckanstieg Δp_a

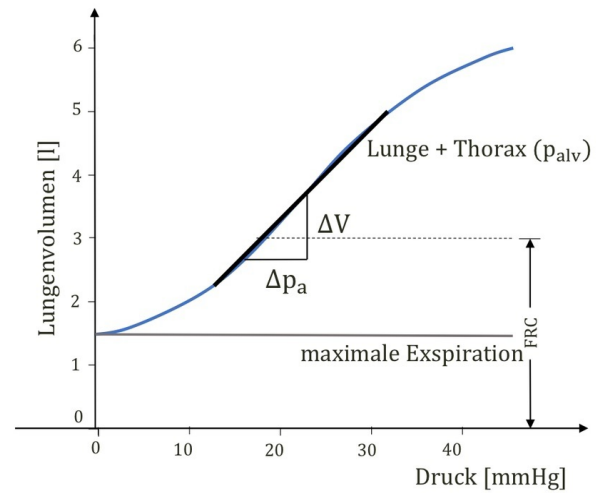
$$C_{Th+L} = \frac{\Delta V}{\Delta p_a}$$

C_{Th+L} ergibt sich aus der Dehnbarkeit von Lunge und Thorax und hängt dabei von der Position der beatmeten Person ab.

Compliance-Werte bei gesunden Erwachsenen: $\sim 130 \text{ ml/mmHg}$

Bei **restriktiven Ventilationsstörungen** sinkt die Compliance der Alveolen.

→ Ein **höherer Druck** ist zur **Öffnung der Alveolen** erforderlich



Modifiziert nach W. Oczenski - Atmen – Atemhilfen, 2008