Bachelor-Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE
MUSTERKLAUSUR

Datum: XX.XX.XXXX

Hilfsmittel: Ausgeteiltes Formelblatt, 1 Blatt (2 Seiten) handschriftliche Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner gemäß den IMWF-Richtlinien

Prüfungsdauer: 60 min

Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **XX** in C@mpus bekannt gegeben.
Die Prüfungseinsicht wird voraussichtlich in KW*) stattfinden.
Wiederholer*innen sind verpflichtet, die Prüfungsergebnisse einzusehen und sich nötigenfalls bis spätestens KW*) für die mündliche Fortsetzungsprüfung am IMWF zu melden. Die Fortsetzungsprüfungen finden ab KW*) statt.
KW*) … Die genauen Daten werden rechtzeitig über die Homepage des IMWF bekannt gegeben.

Name	Matrikelnummer	Unterschrift
Studiengang		
Wiederholer*in	☐ nein	☐ ja

Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Rechenwege werden eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein!

Viel Erfolg!

Diese Tabelle darf nur von den Korrektoren ausgefüllt werden!

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	~~1h~~	1	
							X		
2a	2b	2c	2d	2e	2f	~~2g~~	~~2h~~	2	
						X	X		
3a	3b	3c	3d	3e	3f	~~3g~~	~~3h~~	3	
						X	X		

Aufgabe 1: (12 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben der Aufgabe 1 zählt nur das Endergebnis/Lösung. Es gibt bei jeder Teilaufgabe ein separates Feld zum Eintragen der Lösung. Die Notizen werden nicht bewertet.

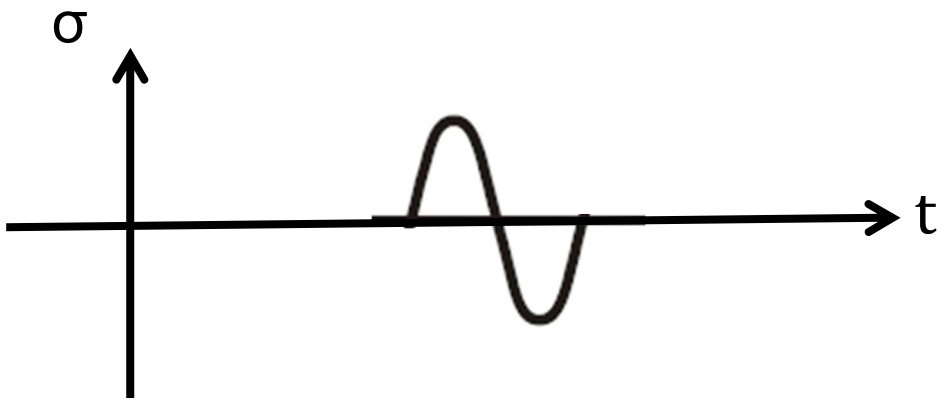
a) Welches ist der richtige Bereich für die üblichen Sicherheitswerte für einen spröden Werkstoff gegen Bruch? (Nur eine Lösung darf angekreuzt werden.) **(1 P)**

Lösung	1,2 - 2	
	2 - 3	
	4 - 9	X
	2,5 - 5	
	Keiner, Rechnung nur gegen Fließen	

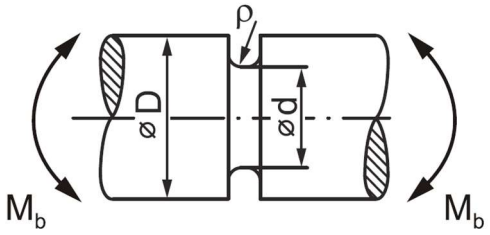
b) Wie wird das Spannungsverhältnis R berechnet? (Nur eine Lösung darf angekreuzt werden.) **(1 P)**

Lösung	$R = \frac{\sigma_o}{\sigma_u}$	
	$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}$	X
	$R = \frac{\sigma_m}{\sigma_n}$	
	$R = \frac{\sigma_n}{\sigma_o}$	
	$R = \frac{\sigma_a}{\sigma_n}$	

c) Zeichnen Sie ein Schwingspiel einer reinen Wechselbeanspruchung. **(2 P)**

Lösung	

d) Sie berechnen eine auf Biegung belastete Welle mit Kerbe, Abbildung 1.1. Bestimmen Sie die Formzahl mithilfe der Formzahldiagramme, Abbildung 1.2 bzw. Abbildung 1.3 und kreuzen Sie die richtige Lösung an. (Nur eine Lösung darf angekreuzt werden.) **(2 P)**



D	20 mm
d	19 mm
ρ	2 mm

Abbildung 1.1

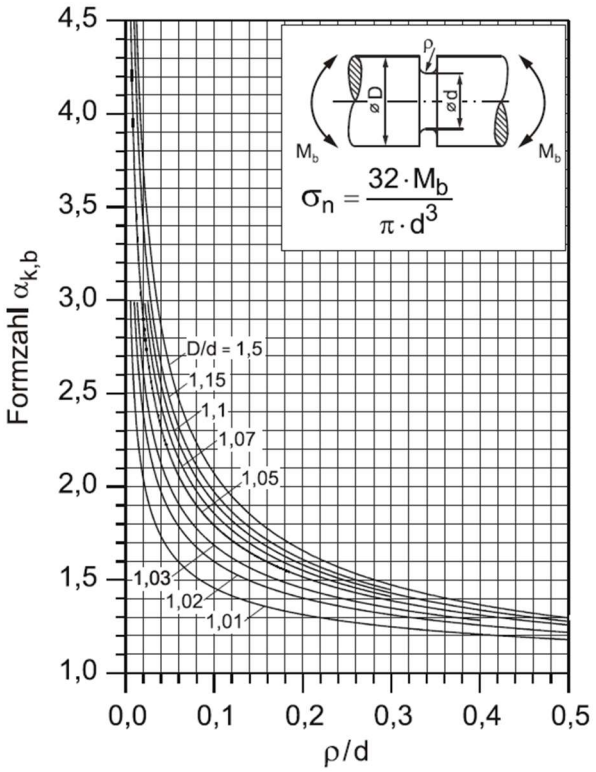


Abbildung 1. 2

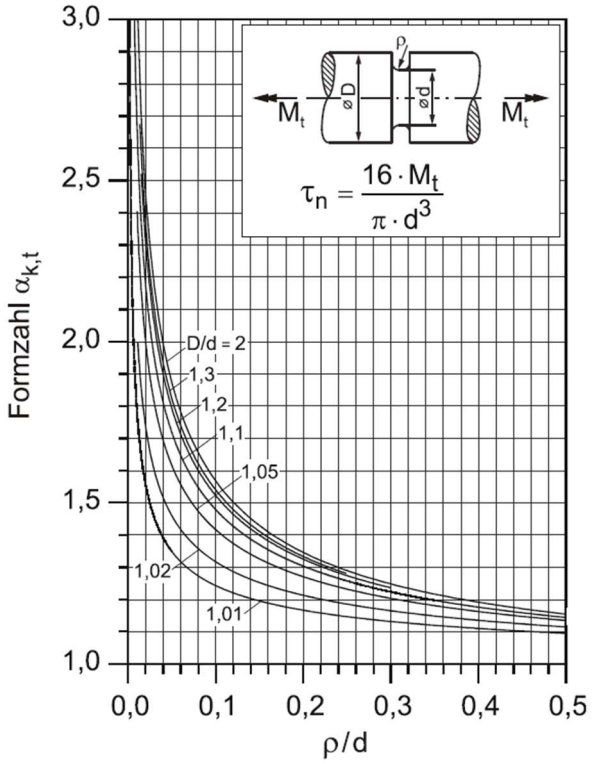


Abbildung 1.3

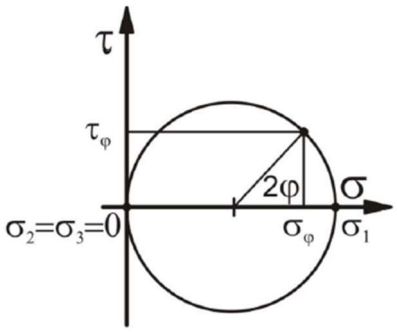
Lösung	$\alpha_k = 1{,}35$	
	$\alpha_k = 1{,}75$	X
	$\alpha_k = 0{,}75$	
	$\alpha_k = 1{,}05$	
	$\alpha_k = 1{,}55$	

Notizen		

e) Von welchen zwei Einflussfaktoren hängt die Formzahl α_k ab? Kreuzen Sie die zwei richtigen Lösungsvorschläge an. Pro richtigem Einflussfaktor gibt es ein Punkt. Sollten Sie mehr als zwei Kreuze gesetzt haben gibt es Null Punkte. **(2 P)**

Lösung		
	Kerbgeometrie	X
	Werkstoff	
	Oberflächenrauheit	
	Beanspruchungsart	X
	Beanspruchungshöhe	

f) An einem Punkt auf der Oberfläche einer Welle wurde der folgende Spannungszustand bestimmt. Handelt es sich um einen einachsigen, zweiachsigen oder dreiachsigen Spannungszustand? Kreuzen Sie die richtige Lösung an. (Nur eine Lösung darf angekreuzt werden.) **(1 P)**



Lösung		
	Einachsig	X
	Zweiachsig	
	Dreiachsig	
	Nicht aus dem Schaubild erkennbar, muss über Spannungstensor berechnet werden	

g) Ordnen Sie die richtige Festigkeitshypothese den in der nachfolgenden Tabelle stehenden Aussagen zu. Pro Aussage ist eine Hypothese richig. Sollten Sie mehrer Hypothesen eintragen, wird dies mit Null Punkten bewertet. **(3P)**

Verwenden Sie die nahfolgenden Abkürzungen:

- NH – Normalspannungshypothese
- SH – Schubspannungshypothese
- GEH – Gestaltänderungsenergiehypothese

	Lösung
Welche Festigkeitshypothese wird verwendet, wenn die Bruchdehnung des Werkstoffes größer als 20 % ist?	**SH, GEH**
$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b{}^2 + 3 \cdot \tau_t{}^2}$	**GEH**
Welche Festigkeitshypothese wird bei duktilen Werkstoffen angewendt, wenn unbeding auf Leichtbau zu achten ist?	**GEH**
Welche Festigkeitshypothese wird bei Gusseisen EN-GJL-300 verwendet?	**NH**
Der (duktile) Werkstoff versagt durch plastisches Fließen, sobald die größte Schubspannung τ_{max} die Fließschubspannung τ_F erreicht.	**SH**
Es gilt das Versagenskriterium $\sigma_v = \sigma_{max} = \sigma_1 = R_m$	**NH**

Aufgabe 2: (24 Punkte)

Eine Antriebswelle mit geschliffener Oberfläche aus dem legierten Vergütungsstahl 54CrV4 ist im Hinblick auf eine sichere Dimensionierung unter statischer und schwingender Beanspruchung an der Kerbstelle I zu überprüfen (vgl. Abbildung 2.1). Der Bauteilgrößeneinfluss auf die Schwingfestigkeit sowie die durch Querkräfte verursachten (Schub-)Spannungen müssen im Folgenden nicht berücksichtigt werden. Die Welle steht zunächst still und wird durch die statisch wirkenden Kräfte F_Q = 50 kN und F_H = 100 kN belastet.

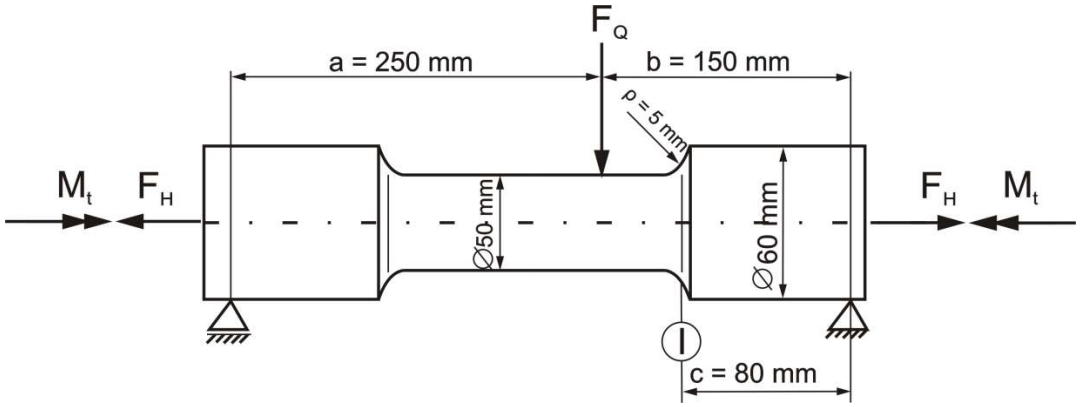


Abbildung 2.1: Antriebswelle

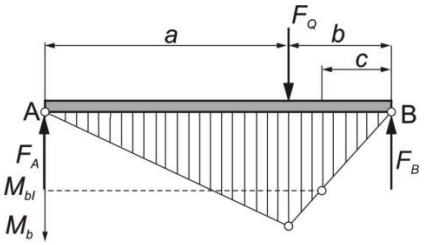
Werkstoffdaten 54CrV4:

$R_{p0,2}$ = 930 MPa; R_m = 1150 MPa; σ_{bw} = 570 MPa

a) Berechnen Sie das Biegemoment an der Kerbstelle I. **(3P)**

Rechenweg

Berechnung der Lagerkraft F_B:



Aus der Gleichgewichtsbedingung (Momentengleichgewicht um Punkt A) →

$$F_B \cdot (a+b) = F_Q \cdot a$$

$$F_B = F_Q \cdot \frac{a}{(a+b)} = 50\,000\ \text{N} \cdot \frac{250\ \text{mm}}{250\ \text{mm} + 150\ \text{mm}}$$

$$F_B = 31\,250\ \text{N}$$

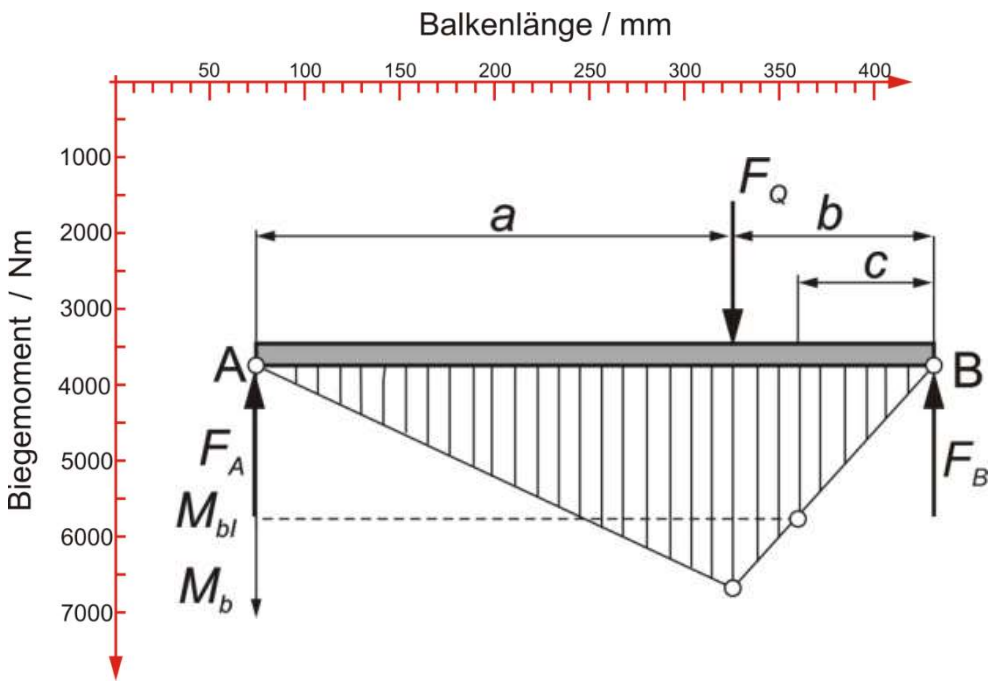
Biegemoment an der Kerbstelle I:

$$M_{bI} = F_B \cdot c = 31\,250\ \text{N} \cdot 80\ \text{mm} = 2\,500\,000\ \text{Nmm} = 2\,500\ \text{Nm}$$

Ergebnis

$M_{bI} = 2\,500$ Nm

b) Skizzieren Sie maßstäblich den Verlauf des Biegemoments über die Balkenlänge in dem gegebenen Koordinatensystem. **(2 P)**

Ergebnis	

c) Berechnen Sie die auftretenden Nenn- und Maximalspannungen für die Zug- und Biegebeanspruchung bei einem Biegemoments von $M_{B,l}$ = *2500* Nm. Verwenden Sie dafür die folgenden Formzahlen für die Zug-, Biege- und Torsionsbeanspruchung: $\alpha_{kz} = 1{,}78;\ \alpha_{kb} = 1{,}64;\ \alpha_{kt} = 1{,}32$. **(4 P)**

Rechenweg

Berechnung der Nennspannungen:

$$\sigma_{zn} = \frac{F_H}{A_n} = \frac{F_H}{\frac{\pi}{4}\cdot d^2} = \frac{100\ 000\ \text{N}}{\frac{\pi}{4}\cdot(50\ \text{mm})^2} = 50{,}93\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 50{,}93\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{bn} = \frac{M_{bl}}{W_{bn}} = \frac{M_{bl}}{\frac{\pi}{32}\cdot d^3} = \frac{2\ 500\ 000\ \text{Nmm}}{\frac{\pi}{32}\cdot(50\ \text{mm})^3} = 203{,}72\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 203{,}72\ \text{MPa}$$

Berechnung der maximalen Spannungen:

$$\sigma_{z\,max} = \sigma_{zn}\cdot\alpha_{kz} = 50{,}93\ \text{MPa}\cdot 1{,}78 = 90{,}65\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{b\,max} = \sigma_{bn}\cdot\alpha_{kb} = 203{,}72\ \text{MPa}\cdot 1{,}64 = 334{,}10\ \text{MPa}$$

Ergebnis

$\sigma_{zn} = 50{,}93\ \text{MPa};\ \sigma_{bn} = 203{,}72\ \text{MPa}$

$\sigma_{z\,max} = 90{,}65\ \text{MPa};\ \sigma_{b\,max} = 334{,}10\ \text{MPa}$

d) Berechnen Sie das zusätzlich übertragbare Torsionsmoment $M_{t\,zul}$ (bei gleichzeitiger Einwirkung der beiden Kräfte F_Q und F_H), damit Fließen im Kerbquerschnitt I mit einer Sicherheit von $S_F = 1{,}5$ ausgeschlossen werden kann. Verwenden Sie die Schubspannungshypothese. **(5P)**

Rechenweg

Festigkeitsbedingung:

$\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ ***mehrachsiger Spannungszustand→ Vergleichsspannung***

$$\sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S} = \frac{930\ \text{MPa}}{1{,}5} = 620\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{v\,SH} = \sqrt{(\sigma_{z\,max} + \sigma_{b\,max})^2 + 4 \cdot \tau_{t\,max}^2}$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke für die zulässige Spannung für die Vergleichsspannung in der Festigkeitsbedingung folgt:

$$\tau_{t\,max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_{zul}^2 - (\sigma_{z\,max} + \sigma_{b\,max})^2}$$

$$\tau_{t\,max} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{620^{\,2} - (90{,}65 + 334{,}10)^2} = 225{,}82\ \text{MPa}$$

Damit folgt für das zulässige Torsionsmoment M_t:

$$M_{t\,zul} = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \cdot \frac{\tau_{t\,max}}{\alpha_{kt}} = \frac{\pi}{16} \cdot (50\ \text{mm})^3 \cdot \frac{225{,}82\ \text{MPa}}{1{,}32} \Rightarrow$$

$$M_{t\,zul} = 4198920\ \text{Nmm} = 4198{,}9\ \text{Nm}$$

Ergebnis

$M_{t\,zul} = 4198{,}9\ \text{Nm}$

e) Ermitteln Sie die Kerbwirkungszahl β_k für die Biegebeanspruchung sowie die Biegewechselfestigkeit der Antriebswelle **(5P)**

Rechenweg

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb} für Biegebeanspruchung:

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_{kb}

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{1 + \frac{55}{R_e}\sqrt{\frac{c}{\rho}}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{55}{R_e}\sqrt{\frac{c}{\rho}} = 1{,}037$$

$$\beta_{kb} = \frac{\alpha_{kb}}{n_\chi} = \frac{1{,}64}{1{,}037} = 1{,}58$$

Ermittlung des Oberflächenfaktors

$f = 0{,}9$ ***für R_m = 1150 MPa aus Diagramm (Formelblatt)***

Ermittlung der Biegewechselfestigkeit

$\sigma_{bw} = 570\ \text{MPa}$ ***gegeben in Aufgabenstellung***

Berechnung der korrigierten Biegewechselfestigkeit

$$\sigma^*_{bw} = f \cdot \sigma_{bw} = 0{,}9 \cdot 570\ \text{MPa} = 513\ \text{MPa}$$

Ergebnis

$\beta_{kb} = 1{,}56$, $\sigma^*_{bw} = 513\ \text{MPa}$

f) Berechnen Sie die die Sicherheit S_D gegen Dauerbruch durch die statisch wirkenden Kräfte F_Q = 50 kN und F_H = 100 kN bei umlaufender Welle. Verwenden Sie: $\sigma_{zn} = 50$ MPa, $\sigma_{bn} = 200$ MPa $\sigma_{bw} = 513$ MPa $\alpha_{kz} = 1{,}80$, $\alpha_{kb} = 1{,}60$, $\beta_{kz} = 1{,}50$. Ist diese Sicherheit ausreichend? **(5P)**

Hinweis: Die Zugbeanspruchung F_H wirkt als statische Mittelspannung, die Spannung aus F_Q als schwingender Anteil.

Rechenweg	**(5 P)** $\sigma_{zn} = 50$ MPa ; $\sigma_{bn} = 200$ MPa ***statisch wirkende Mittelspannung aus 2d:*** $\sigma_m = \sigma_{z,max} = 90$ MPa ***schwingend wirkende Ausschlagsspannung nach 2g und 2d:*** $\sigma_{a\,max} = \beta_{k,b} \cdot \sigma_{b,n} = 1{,}6 \cdot 200$ MPa $= 320$ MPa ***zulässige Amplitude, zäher Werkstoff:*** $\sigma_A = \sigma_{bW} * \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = 513 \cdot \sqrt{1 - \frac{90}{1150}}$ MPa $\sigma_A = 492{,}5$ MPa $S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_{a,max}} = \frac{492{,}5 \text{ MPa}}{320 \text{ MPa}} = 1{,}54$ ***S_D > 1,5 ausreichend!***
Ergebnis	$S_D = 1{,}54$

Aufgabe 3: (24 Punkte)

In einem projektierten Beatmungsgerät wird das benötigte Luftvolumen und der Beatmungsdruck über einen Zylinder erzeugt. Der Zylinder wird aus **Reinstaluminium** gefertigt. Die Konstruktion und die Abmessungen können Bild 2.1 entnommen werden.

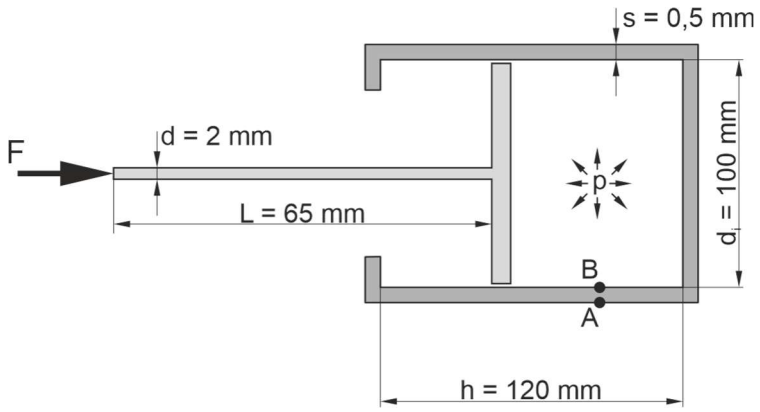


Bild 2.1: Beatmungsgerät

Reinstaluminium: $R_{p0,2} = 18\,MPa$; $R_m = 45\,MPa$; $E = 70000\,MPa$; $\mu = 0,35$; $A_5 = 35\,\%$

a) Während der Beatmung soll ein Überdruck von p = 0,035 bar erzeugt werden. Welche Spannungen (Radial-, Axial- und Umfangsspannung) herrschen am Punkt A (Zylinderaußenseite) und am Punkt B (Zylinderinnenseite). **(4 P)**

Rechenweg	**Umfangsspannung:** $\sigma_{u,i} = \sigma_{u,a}$ $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} = 0,35\,MPa$ **Axialspannung:** $\sigma_{a,i} = \sigma_{a,a}$ $\sigma_a = 0\,MPa$ → **Kolben Axialspannungs-frei** **Radialspannung:** $\sigma_{r,i} = -p = -0,0035\,MPa$ $\sigma_{r,a} = 0\,MPa$

Lösung	Ergebnis
Spannungen Punkt A	$\sigma_u = 0,35\,MPa$, $\sigma_a = 0\,MPa$, $\sigma_{r,a} = 0\,MPa$
Spannungen Punkt B	$\sigma_u = 0,35\,MPa$, $\sigma_a = 0\,MPa$, $\sigma_{r,i} = -0,0035\,MPa$

b) Wenn der Patient hustet wird der Zylinder in den oberen Anschlag geschoben und es entsteht ein Überdruck von p = 1,0 bar im Zylinder. Welche Spannungen (Radial-, Axial- und Umfangsspannung) herrschen jetzt am Punkt A (Zylinderaußenseite). **(3 P)**

Rechenweg	
	Umfangsspannung: $\sigma_u = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} = 10{,}0\ \text{MPa}$ **Axialspannung:** $\sigma_a = \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = 5\ \text{MPa}$ → **Lastsituation entsprechend geschl. HZ** **Radialspannung:** $\sigma_{r,a} = 0\ \text{MPa}$

Lösung	**Ergebnis**
Spannungen Punkt A	$\sigma_u = 10{,}0\ \text{MPa}$, $\sigma_a = 5{,}0\ \text{MPa}$, $\sigma_{r,a} = 0\ \text{MPa}$

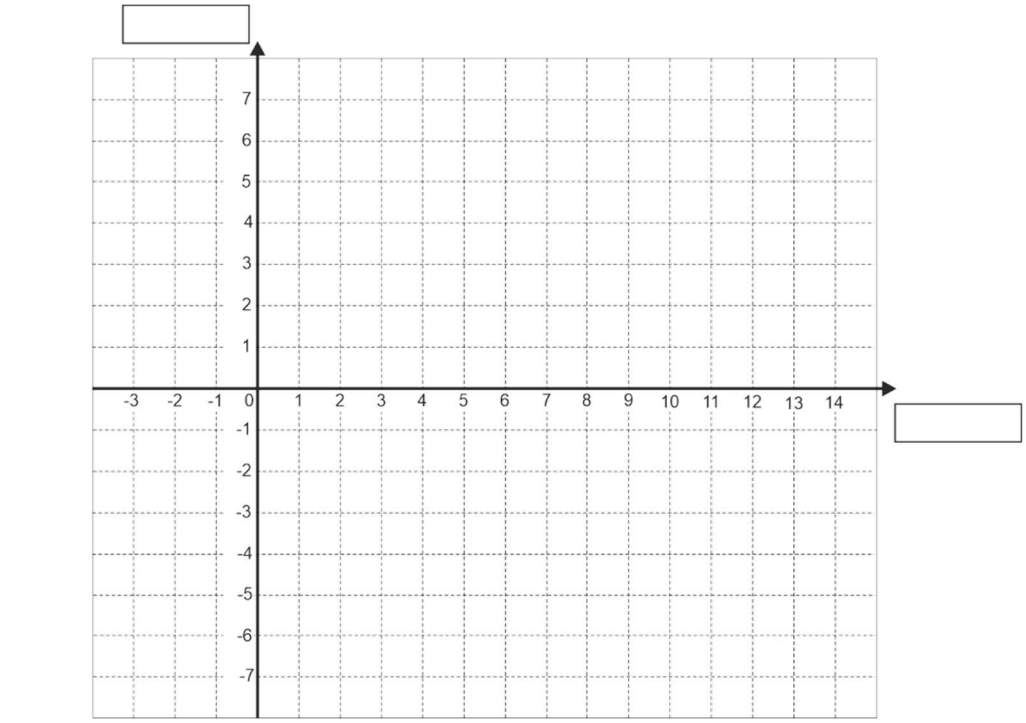
c) Ist eine Belastung an Punkt A durch σ_u = 8 MPa, σ_a = 4 MPa und σ_r = 0 MPa mit Sicherheit ertragbar? Berechnen Sie die vorliegenden Sicherheiten . **(3 P)**

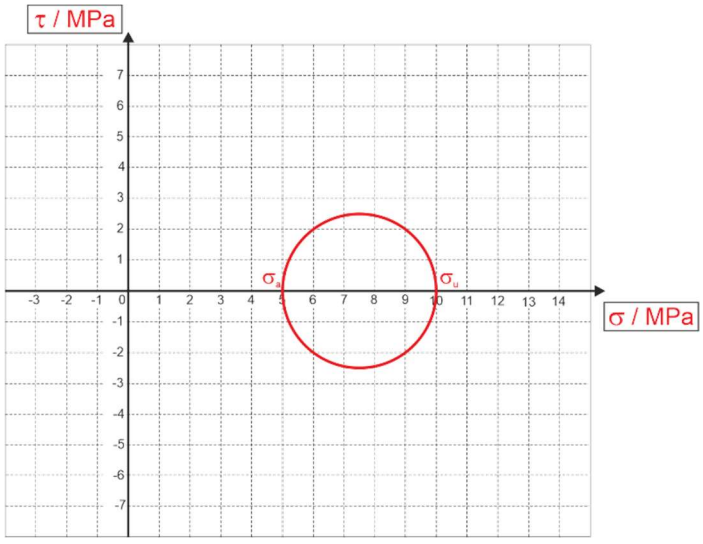
Rechenweg	
	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul}$ $\sigma_v(SH) = \sigma_u - \sigma_{r,a} = 8\ \text{MPa}$ **(Oder ebenfalls möglich GEH)** **SH:** **Fließen:** $\sigma_{zul} = \frac{R_{p0,2}}{S_F} \rightarrow S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_v} = 2{,}25 > 1{,}2$ **Bruch:** $\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B} \rightarrow S_F = \frac{R_m}{\sigma_v} = 5{,}63 > 2{,}0$

Lösung	**Ergebnis**
Belastung mit Sicherheit ertragbar?	**ja**

d) Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für die Belastung durch σ_u = 10 MPa, σ_a = 5 MPa und σ_r = 0 MPa am Punkt A für die Axial-Tangential-ebene. Verwenden Sie untenstehendes Diagramm. Beschriften Sie die Achsen (mit Einheiten). **(3 P)**

Rechenweg





e) Im Normalbetrieb (p = 0,035 bar) wird die Kolbenstange auf Druck belastet. Kann Knicken mit Sicherheit ausgeschlossen werden? (Die Kolbenstange kann sich am linken Ende frei bewegen.) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, die Sicherheit gegen Knicken zu erhöhen. **(5 P)**

Hinweis: Die Kraft auf die Kolbenstange berechnet sich aus der Gleichgewichtsbetrachtung mit dem auf den Kolben wirkenden Innendruck.

Rechenweg

Kraft F: $F = p \cdot \frac{\pi}{4} d_i^2 = 27{,}49\,N$

Knickfall 1: $F_K = \frac{\pi^2}{4} \frac{E \cdot I}{L^2}$

$I = \frac{\pi}{64} d^4 = 0{,}785\,mm^4$

$F_K = 32{,}11\,N$

Variante 1: $F \le \frac{F_K}{S_K}$ → $\frac{F_K}{S_K} = \frac{32{,}11\,N}{2{,}5} = 12{,}84\,N < 27{,}49\,N$

Variante 2: $F \le \frac{F_K}{S_K}$ → $S_K = \frac{F_K}{F} = 1{,}17 < 2{,}5$

Einspannbedingungen ändern, Durchmesser vergrößern, Länge verkürzen, anderer Werkstoff (mit höherem E-Modul), anderes Profil verwenden (mit höherem I),

Lösung	Ergebnis
Knicken mit Sicherheit ausgeschlossen?	**nein**

f) Um die Maschine zu erproben wird mit ihr ein Gummiluftballon aufgeblasen. Im Ausgangszustand hat der Ballon einen Innendurchmesser von $d_{i,0}$ = 40 mm und eine Wandstärke von s_0 = 0,5 mm. Wie groß sind die Spannungen in der Ballonwand bei einem Druck von p = 1 bar? Bitte beachten Sie hier, dass mit zunehmendem Druck die Wandstärke abnimmt und der Durchmesser anwächst! Für den Gummi darf linearelastisches Verhalten mit einem E-Modul von E = 100 MPa angenommen werden. Die Querkontraktionszahl des Gummis beträgt μ = 0,3. **(6 P)**

Hinweis: Die Radialspannung darf vernachlässigt werden (σ_r = 0).

Rechenweg

Ballon → kugelförmig → $\sigma_u = \sigma_a = \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s}$

2-achsiger Spannungszustand:

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a = \frac{1}{E}\left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} - \mu\left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s}\right)\right) = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{1-\mu}{E}\sigma_u$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(-\mu\left(\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} + \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s}\right)\right) = -\frac{2\mu}{E}\frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = -\frac{2\mu}{E}\sigma_u$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_a = \frac{\Delta d_i}{d_{i,0}} = \frac{d_i - d_{i,0}}{d_{i,0}} \rightarrow d_i = d_{i,0} + \varepsilon_u \cdot d_{i,0}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta s}{s_0} = \frac{s - s_0}{s_0} \rightarrow s = s_0 + \varepsilon_r \cdot s_0$$

$$\sigma_u = \frac{p}{4}\frac{\overbrace{\left(d_{i,0} + \frac{1-\mu}{E}\sigma_u \cdot d_{i,0}\right)}^{d_i}}{\underbrace{\left(s_0 - \frac{2\mu}{E}\sigma_u \cdot s_0\right)}_{s}}$$

$$\left(-8\mu s_0\right) \cdot \sigma_u^2 + \left(4 s_0 E - p(1-\mu) d_{i,0}\right) \cdot \sigma_u - \left(p E d_{i,0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{u,1} = \sigma_{a,1} = 162{,}28\ \text{MPa}\ ;\ \sigma_{u,2} = \sigma_{a,2} = 2{,}05\ \text{MPa}$$

Lösung	Ergebnis
Spannungen in Ballonwand	$\sigma_{u,1} = \sigma_{a,1} = 162{,}28\ \text{MPa}\ ;\ \sigma_{u,2} = \sigma_{a,2} = 2{,}05\ \text{MPa}$

Viel Erfolg!