

Vorlesung 1

Aufgabe 1 – Biomechanik und Mechanobiologie

Biom

Betrachten Sie die wesentliche Verlängerung des Halses durch das Tragen von Ringen.

Handelt es sich dabei um den Effekt eines biomechanischen oder mechanobiologischen Vorgangs?

- a) Biomechanischer Vorgang
- b) **Mechanobiologischer Vorgang**

Betrachten Sie die Form des Baums.

Handelt es sich dabei um den Effekt eines biomechanischen oder mechanobiologischen Vorgangs?

- a) **Biomechanischer Vorgang** *bei Wind → Druck auf eine Seite höher als auf der anderen*
- b) Mechanobiologischer Vorgang



<http://victorpaul-vicsmuse.blogspot.com>

Aufgabe 3 – Biomechanik und Mechanobiologie

Biomec

Bei der künstlichen Beatmung wird ein Überdruck in den Lungen erzeugt. Dadurch kommt es zu einer Aufweitung der Lunge.

Handelt es sich dabei um den Effekt eines biomechanischen oder mechanobiologischen Vorgangs?

- a) **Biomechanischer Vorgang**
- b) Mechanobiologischer Vorgang



Bei der Untersuchung des Kniesehnenreflexes wird die Sehne mechanisch beansprucht.

Es kommt zu einer Streckung des Beines.

Handelt es sich dabei um den Effekt eines biomechanischen oder mechanobiologischen Vorgangs?

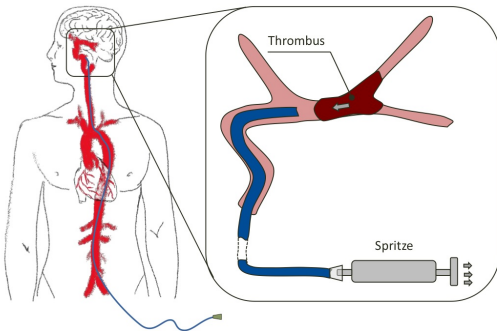
- a) Biomechanischer Vorgang
- b) **Mechanobiologischer Vorgang**



Aufgabe 5 - Variabilität in der Biomechanik

Biomechanik

Umsetzung der Biomechanik in die (klinische) Praxis:



Wie viele Variablen?

Im Rahmen einer Thrombusaspiration wird ein Thrombus aus einem verschlossenem Gefäß über einen Aspirationskatheter entfernt.

- Nennen Sie mögliche relevante Unterschiede zwischen Patienten/innen.
- Nennen Sie mögliche externe Einflussfaktoren.
- Nennen Sie mögliche Reaktionen.

- a) - Gefäßdimensionen, Verlauf, Elastizität
- Anatomie Krümmung des Gefäßes
- Größe + Elastizität des Thrombus
- Blutdruck
- Alter + Geschlecht
- Vorerkrankungen
- Stents / andere Implantate

- b) - Katheterdimension
- Ausstattung Krankenhaus
- Behandelnder Arzt
- Verwendete Materialien

c) Motorisch:

- ↳ Kopfbewegung
- ↳ Bewegung durch Angst/Pain

Biologisch:

- ↳ Gefäßspasmen
- ↳ Gefäßverletzung
- ↳ Thrombenbildung

V2 - Aufgabe 1

Ein Golfball mit einer Masse $m_{\text{Golfball}} = 47 \text{ g}$ wird mit einer Kraft von $F_{\text{Schlag}} = 6 \text{ kN}$ in x-Richtung geschlagen. Die Kontaktzeit zwischen Golfschläger und Ball beträgt $t = 0,5 \text{ ms}$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, die der Ball in x-Richtung erreicht.

$$\begin{aligned} m &= 47 \text{ g} \\ F &= 6 \text{ kN} \\ t &= 0,5 \text{ ms} \end{aligned}$$

$$F_B = m \cdot a$$

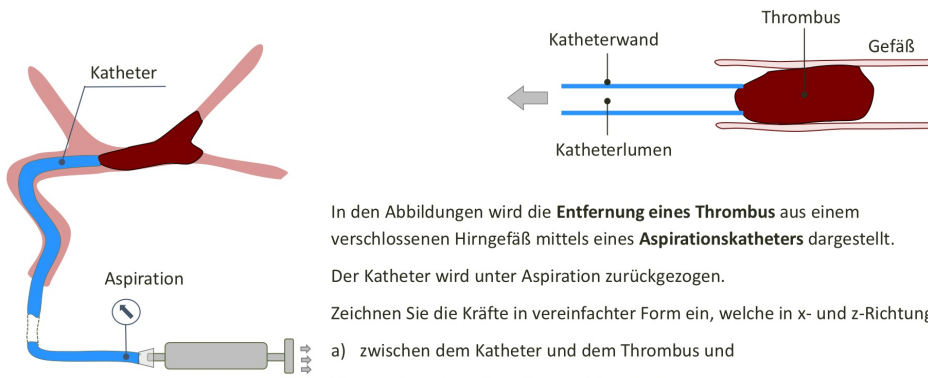
$$a = \frac{F_B}{m} = 1,3 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_0}{t - t_0}$$

$$\Rightarrow v_B - v_0 = a \cdot t$$

$$v_0 = 0: v_B = 1,3 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 2



In den Abbildungen wird die **Entfernung eines Thrombus** aus einem verschlossenen Hirngefäß mittels eines **Aspirationskatheters** dargestellt.

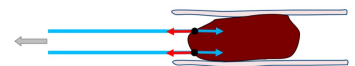
Der Katheter wird unter Aspiration zurückgezogen.

Zeichnen Sie die Kräfte in vereinfachter Form ein, welche in x- und z-Richtungen:

- zwischen dem Katheter und dem Thrombus
- zwischen dem Thrombus und dem Gefäß

unmittelbar vor der Ablösung des Thrombus aus dem Gefäß wirken.

Kräfte zwischen Katheter und Thrombus:

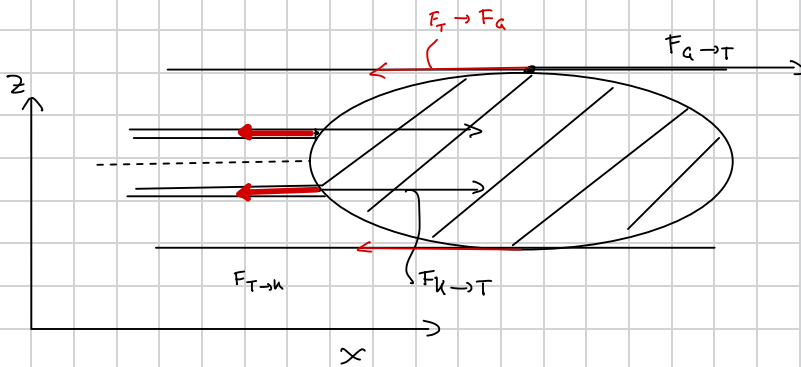


- Kraft von Katheterwand auf Thrombus
- Kraft vom Thrombus auf Katheterwand

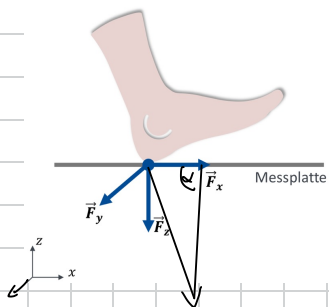
Kräfte zwischen Thrombus und Gefäß:



- Kraft vom Thrombus auf das Gefäß
- Kraft vom Gefäß auf den Thrombus



Aufgabe 3



Um eine Analyse des Gangs durchführen zu können, werden die Kräfte, welcher der Fuß auf eine Messplatte ausübt, im Raum gemessen. $\vec{F}_x$ entspricht hierbei 200 N, $\vec{F}_y$ entspricht 50 N und $\vec{F}_z$ entspricht 600 N.

Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}$, sowie die Winkel α , β und γ der Kraft $\vec{F}$ in Bezug auf die Koordinaten x, y und z des räumlichen Koordinatensystems.

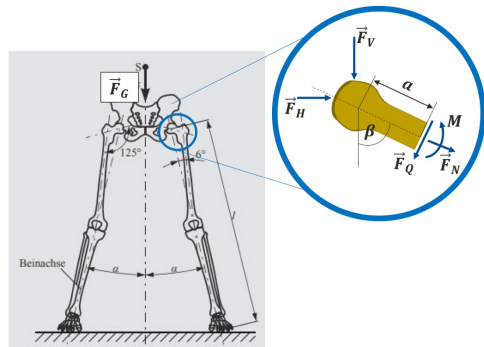
$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_x|^2 + |\vec{F}_y|^2 + |\vec{F}_z|^2} = 634,4 \text{ N}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{F}_x}{F} = 71,6^\circ$$

$$\beta = \arccos \frac{\vec{F}_y}{F} = 15^\circ$$

$$\gamma = \arccos \frac{\vec{F}_z}{F} = 85,5^\circ$$

V3 - Aufgabe 1



Abgebildet ist ein Zweibeinstand mit gespreizten Beinen. Der Hüftkopf nimmt einen Winkel von $\beta = 64^\circ$ mit der Vertikalen ein. Beachten Sie hierbei die Zerlegung der Kräfte!

Geg.: $\vec{F}_H = 100,5 \text{ N}$; $a = 30 \text{ mm}$

- Berechnen Sie die vertikale Kraft $\vec{F}_V$ unter Verwendung der Schwerkraft $\vec{F}_G = 900 \text{ N}$, die auf einen Hüftkopf mit Fläche $A = 616 \text{ mm}^2$ wirkt.
- Berechnen Sie außerdem die Querkraft $\vec{F}_Q$, die Normalkraft $\vec{F}_N$ und das Moment M .
- Berechnen Sie die Druck-, Schub- und die maximale Biegespannung am Oberschenkelhals. Verwenden Sie für Ihre Berechnungen entsprechend das Widerstandsmoment: $W = 2155 \text{ mm}^3$.
- Wie hoch ist die maximale resultierende Druckspannung?

Richard, Biomechanik - Grundlagen und Anwendungen auf den menschlichen Bewegungsapparat, 2013

a) $F_G = 900 \text{ N}$ $A = 616 \text{ mm}^2$

$$\vec{F}_V = \frac{F_G}{2} = 450 \text{ N}$$



$$\vec{F}_Q + \sin(\beta) \cdot F_v - \cos(\beta) \cdot F_H = 0$$

$$F_Q = -\sin(\beta) \cdot F_v + \cos(\beta) \cdot F_H$$

$$= -\sin(64^\circ) \cdot 450 \text{ N} + \cos(64^\circ) \cdot 100,5 \text{ N}$$

$$= -360,4 \text{ N}$$

$$F_N + \cos(\beta) \cdot F_v + \sin(\beta) \cdot F_H = 0$$

$$F_N = -\cos(\beta) \cdot F_v - \sin(\beta) \cdot F_H$$

$$= -\cos(64^\circ) \cdot 450 \text{ N} - \sin(64^\circ) \cdot 100,5 \text{ N}$$

$$= -287,6 \text{ N}$$

$$M + F_v \cdot \sin(\beta) \cdot a - F_H \cdot a \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$M = F_H \cdot a \cdot \cos(\beta) - F_v \cdot \sin(\beta) \cdot a$$

$$= -10,81 \text{ Nm}$$

c) $W = 2155 \text{ mm}^3$

Druckspannung:

$$\sigma = \frac{|\vec{F}_N|}{A} = \frac{287,6 \text{ N}}{616 \text{ mm}^2} = 0,46 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Schubspannung:

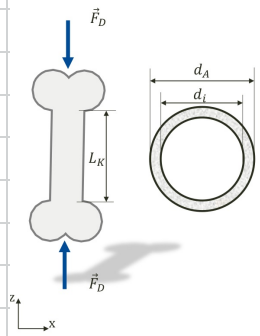
$$\tau = \frac{|\vec{F}_Q|}{A} = \frac{360,4 \text{ N}}{616 \text{ mm}^2} = 0,59 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Biegespannung:

$$\sigma_{b, \max} = \frac{M}{W} = \frac{10,81 \text{ Nm} \cdot 10^3 \text{ mm}}{2155 \text{ mm}^3} = 5,02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

d) maximal resultierende Druckspannung

$$\sigma_R = \sigma_n + \sigma_{b, \max} = 5,48 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Beim Liegestütz wird der Oberarmknochen mit einer Länge $L_K = 30 \text{ cm}$ durch eine axial wirkende Kraft $\vec{F}_D = 210 \text{ N}$ auf Druck belastet. Mit den Armen werden dabei ca. 60 % des Körpergewichts abgestützt. Der Querschnitt des Oberarmknochens wird als ein hohler Zylinder mit folgenden Dimensionen vereinfacht: $d_A = 20 \text{ mm}$, $d_i = 15 \text{ mm}$.

Berechnen Sie:

- Die Normalspannung σ im Knochenquerschnitt.
- Die Dehnung ϵ des Oberarmknochens.
- Die Änderung der Knochenschaftlänge L_K .

Geg.: $E_{\text{Knochen}} = 18.000 \text{ MPa}$,

Richard, Biomechanik – Grundlagen und Anwendungen auf den menschlichen Bewegungsapparat, 2

a) Normalspannung

$$A = \frac{\pi}{4} (d_A^2 - d_i^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} ((20 \text{ mm})^2 - (15 \text{ mm})^2)$$

$$= 137,4 \text{ mm}^2$$

weil
Druckbelastung

$$\sigma = \frac{\vec{F}_D}{A} = \frac{210 \text{ N}}{137,4 \text{ mm}^2} = -1,53 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = -1,53 \text{ MPa}$$

b) $\sigma = E \cdot \epsilon$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-1,53 \text{ MPa}}{18.000 \text{ MPa}} = -8,5 \cdot 10^{-5} = 0,0085\%$$

c)

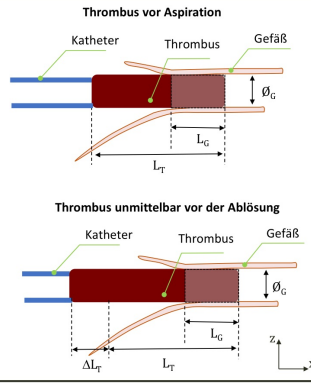
$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \Delta L = \epsilon \cdot L_K = -8,5 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \text{ cm}$$

$$= -25,5 \mu\text{m}$$

Aufgabe 3 – Thrombus mit E-Modul

Biomechanik

Ein Thrombus mit der Länge $L_T = 15,4 \text{ mm}$ wird durch einen Aspirationskatheter in x-Richtung zurückgezogen.
Der Thrombus besitzt ein E-Modul $E_T = 8,3 \text{ kPa}$. Während der Thrombusbereich an der Wand auf der Länge $L_G = 6 \text{ mm}$ haften bleibt, verlängert sich der restliche Thrombusbereich um $\Delta L_T = 2,2 \text{ mm}$ unmittelbar vor der Ablösung von der Wand. Der Thrombusdurchmesser $\varnothing_{\text{Thrombus}}$ entspricht dem Gefäßdurchmesser $\varnothing_{\text{Gefäß}} = 4,2 \text{ mm}$.



Berechnen Sie zum Zeitpunkt unmittelbar vor der Ablösung des Thrombus und unter Vernachlässigung der Gefäßwandbewegung (der Thrombus verformt sich im Kontaktbereich mit der Gefäßwand nicht):

- die Kraft F_T die von dem Katheter auf den Thrombus wirkt
- die Schubspannung τ_X an der Gefäßwand

$$F = E \cdot A \cdot \varepsilon$$

$$F_T = E_T \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2 \cdot \frac{\Delta L}{L_G}$$

$$F_T = E_T \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2 \cdot \frac{\Delta L_T}{(L_T - L_G)}$$

$$= 8,3 \text{ kPa} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (4,2 \text{ mm})^2 \cdot \frac{2,2 \text{ mm}}{(15,4 \text{ mm} - 6 \text{ mm})}$$

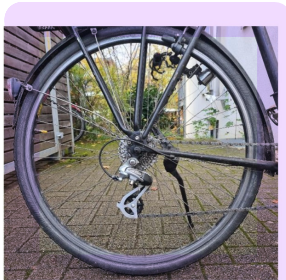
$$= 0,027 \text{ N}$$

$$\tau_X = \frac{F_T}{A_{T0}} = \frac{F_T}{\pi \cdot \phi \cdot L_G} = \frac{0,027 \text{ N}}{\pi \cdot 4,2 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm}} = 3,4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\hookrightarrow 2\pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot d \cdot l \quad (\text{Mantelfläche})$$

Bei welchem Reifen brauchen wir den höchsten Druck, um die gleiche Spannung zu bekommen?

Was könnte der Grund sein?



höherer Druck

$$\varepsilon = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot E \cdot s}$$

$$\sigma = \frac{p \cdot D_i}{2 \cdot s}$$

$$p = \frac{\sigma \cdot 2 \cdot s}{D_i}$$

Bei welchen Organen ist die Compliance als mechanische Eigenschaft von Bedeutung?



Lunge



Nieren



Mund/Zunge



Augen



Gehirn



Herz



Blase



Knochen



Ohr

↳ Druckunterschiede in der Schenke
↳ mit Volumenänderung
⇒ Trommelfell dehnt sich

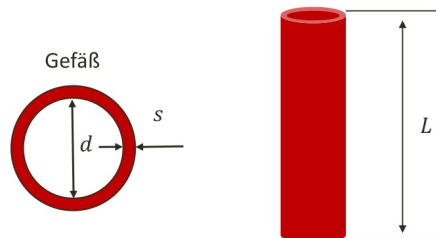


Nase

Ein Gefäß besitzt in der Phase der Diastole bei einem transmuralen Druck von $p_1 = 80 \text{ mmHg}$ einen Durchmesser von $d_1 = 4 \text{ mm}$.

Die Wandstärke und das E-Modul des Gefäßes betragen $s = 300 \text{ } \mu\text{m}$ und $E = 400 \text{ kPa}$.

- a) Welchen Durchmesser d_2 besitzt das Gefäß bei einem transmuralen Druck p_2 von 120 mmHg , der während der Systole herrscht?
- b) Welche Volumenzunahme resultiert aus der Druckzunahme von 80 mmHg auf 120 mmHg bei einer Gefäßlänge von $L = 3 \text{ cm}$?
- c) Berechnen Sie die absolute und die relative Compliance.



$$a) \Delta p = p_2 - p_1$$

$$p_1 = \frac{2 \cdot E \cdot s \cdot (d_1 - d_0)}{d_0 \cdot d_1} \quad p_2 = \frac{2 \cdot E \cdot s \cdot (d_2 - d_0)}{d_0 \cdot d_2}$$

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s}{d_0} \left(\frac{d_2 - d_0}{d_2} - \frac{d_1 - d_0}{d_1} \right)$$

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s}{d_0} \left(\frac{d_2 \cdot d_1 - d_0 \cdot d_1}{d_2 \cdot d_1} - \frac{d_1 \cdot d_2 + d_0 \cdot d_2}{d_1 \cdot d_2} \right)$$

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s}{d_0} \cdot \frac{d_0 \cdot (d_2 - d_1)}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\Delta p = 2 \cdot E \cdot s \cdot \frac{(d_2 - d_1)}{d_1 \cdot d_2}$$

$$\Delta p \cdot d_1 \cdot d_2 = 2 \cdot E \cdot s \cdot (d_2 - d_1)$$

$$[2 \cdot E \cdot s - \Delta p \cdot d_1] \cdot d_2 = 2 \cdot E \cdot s \cdot d_1$$

$$d_2 = \frac{2 \cdot E \cdot s \cdot d_1}{2 \cdot E \cdot s - \Delta p \cdot d_1} = 4,4 \text{ mm}$$

$$b) \quad V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot L \quad V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot L$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 16 \text{ mm}^2 \cdot 30 \text{ mm} = \frac{\pi}{4} \cdot (4,4 \text{ mm})^2 \cdot 30 \text{ mm}$$

$$= 377 \text{ mm}^3 = 0,377 \text{ ml}$$

$$= 456 \text{ mm}^3 = 0,456 \text{ ml}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 0,079 \text{ ml}$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\% = 2,1\% \text{ Volumenzunahme.}$$

c) Absolute Compliance:

$$C_{abs} = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{79 \text{ mm}^3}{40 \text{ mmHg}} = 1,98 \frac{\text{mm}^3}{\text{mmHg}} = 0,0148 \frac{\text{mm}^3}{\text{Pa}}$$

$$C_{rel} = \frac{C_{abs}}{V_0} = \frac{0,0148 \frac{\text{mm}^3}{\text{Pa}}}{377 \text{ mm}^3} = 5,24 \cdot \frac{1}{\text{mmHg}} = 5,24 \cdot \frac{1}{133,32 \text{ Pa}} = 3,93 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{Pa}}$$

Vorlesung 5

Aufgabe 1: Spannung des Trommelfells

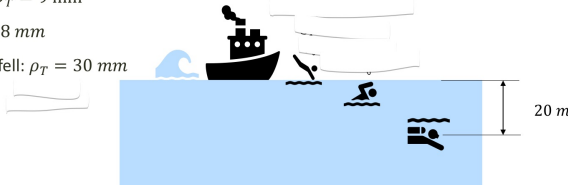
Biomechanik

Betrachten wir einen Taucher bei 20 m Tiefe.

- Welche Druckunterschied besteht zwischen dem Außen- und Innenohr, wenn die Eustachische Röhre verschlossen bleibt (kein Druckausgleich)?
- Mit welcher Tangentialspannung wird der Trommelfell beansprucht?

Folgende anatomische Werte sind angegeben:

- Durchmesser Trommelfell: $D_T = 9 \text{ mm}$
- Dicke Trommelfell: $s_T = 0,08 \text{ mm}$
- Krümmungsradius Trommelfell: $\rho_T = 30 \text{ mm}$



$$p_A - p_i = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m} = 196000 \text{ Pa} \approx 2 \text{ bar}$$

(pro 10 m Tiefe)
1 bar

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot D_T^2 = 63,6 \text{ mm}^2$$

$$p_A - p_i = \frac{2 \cdot s_T \cdot \epsilon \cdot E}{r}$$

$$(p_A - p_i) \cdot A_T = \frac{2 \cdot s_T \cdot \sigma_x}{r} \cdot \pi \cdot r^2$$

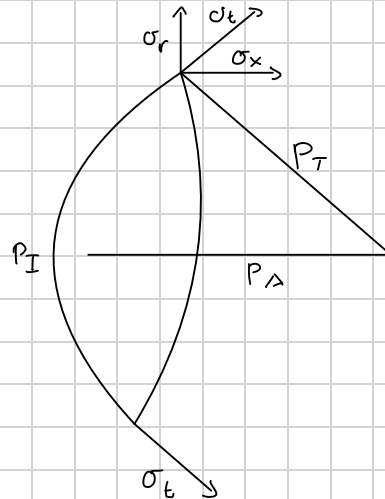
$$(p_A - p_i) \cdot A_T = 2 \cdot s_T \cdot \sigma_x \cdot \pi \cdot r$$

$$(p_A - p_i) \cdot A_T = 2 \cdot s_T \cdot \sigma_x \cdot \pi \cdot \frac{D_T}{2}$$

$$(p_A - p_i) \cdot A_T = s_T \cdot \sigma_x \cdot \pi \cdot D_T$$

$$\sigma_x = \frac{(p_A - p_i) \cdot A_T}{s_T \cdot \pi \cdot D_T} = \frac{196000 \text{ Pa} \cdot 63,6 \text{ mm}^2}{0,08 \text{ mm} \cdot \pi \cdot 9 \text{ mm}}$$

$$= 5,5 \text{ MPa}$$



$$\sin(\alpha) = \frac{D}{2 \cdot \rho_T} = \frac{9 \text{ mm}}{2 \cdot 30 \text{ mm}} = 0,15$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_x}{\sin \alpha} = \frac{5,5 \text{ MPa}}{0,15} = 36,6 \text{ MPa}$$

Vorlesung 6

Aufgabe 1 – Strömung im Gefäß

Biomechanik

Betrachten Sie den Aortenbogen in der Abbildung. Es sind 5 Stellen angegeben. Betrachten Sie die Gefäße als Zylinder mit folgenden Durchmessern:

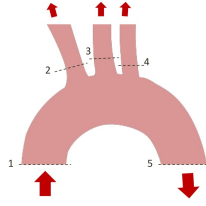
$$d_1 = 25 \text{ mm} \quad d_2 = 13 \text{ mm} \quad d_3 = 8,5 \text{ mm}$$

$$d_4 = 10 \text{ mm} \quad d_5 = 18 \text{ mm}$$

Während der Systole fließt das Blut mit mittlerer Geschwindigkeit $\bar{v}_1 = 45 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ in den Aortenbogen. Der Blutfluss $\dot{V}_1$ teilt sich in die drei Abgänge – Stellen 2, 3 und 4 –, wobei 40%, 35% bzw. 25% vom Blutfluss $\dot{V}_{2-4}$ fließen, und die absteigende Aorta (Stelle 5) mit einer Geschwindigkeit $\bar{v}_5 = 70 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Die Blutdichte kann als konstant mit einem Wert von $1,06 \text{ g/cm}^3$, die Gefäße als starr betrachtet werden.

Bestimmen Sie die mittlere Fließgeschwindigkeiten $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ und $\bar{v}_4$ an den Stellen 2, 3 bzw. 4.



$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 - \dot{m}_3 - \dot{m}_4 - \dot{m}_5 = 0$$

$$\rho \cdot \frac{dV}{dt} = \text{Massenänderung}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt} - \frac{dV_3}{dt} - \frac{dV_4}{dt} - \frac{dV_5}{dt} \right) = 0$$

$$\dot{V}_1 = \bar{v}_1 \cdot A_1 = 45 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 = 220,9 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\dot{V}_5 = \bar{v}_5 \cdot A_5 = 70 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1,8 \text{ cm})^2 = 178,13 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} V_{2-4} &= V_1 - V_5 = (220,9 - 178,13) \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \\ &= 42,7 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{0,4 \cdot V_{2-4}}{A_2} = 12,9 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

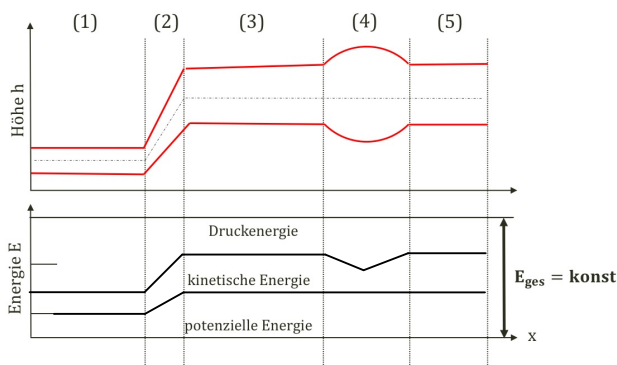
$$\bar{v}_3 = \frac{0,35 \cdot V_{2-4}}{A_3} = 26,4 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\bar{v}_4 = \frac{0,25 \cdot V_{2-4}}{A_4} = 13,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Betrachten Sie nachstehende Abbildung. Zeichnen Sie einen möglichen **qualitativen** Verlauf von jeweils

Druck-, kinetischer und potenzieller Energie. Nimmt der Druck zwischen (1) und (3) zu oder ab?

Bernoulli:



$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.}$$

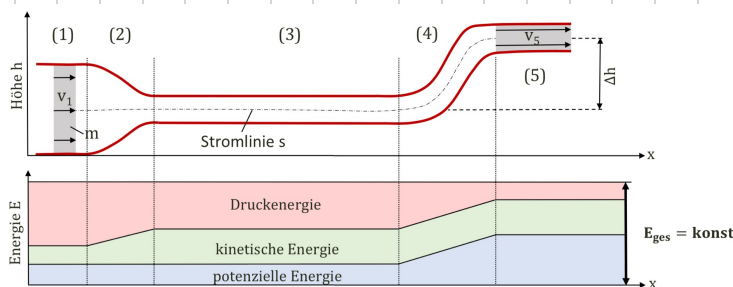
- Höhe h steigt $\rightarrow$ potenzielle Energie steigt
- kinetische Energie nimmt zu, da Geschwindigkeit v nimmt wegen Querschnittveränderung

Anmerkung: Der Verlauf im Übergangsbereich wird als linear und somit vereinfacht dargestellt.

Prof. Giorgio Cattaneo

Universität Stuttgart – Institut für Biomedizinische Technik

21



die drei Energieanteile entsprechen dem Abstand zwischen den jeweils angrenzenden Linien.

Aufgabe 1 – Bernoulli in den Stimmlippen

Biomechanik

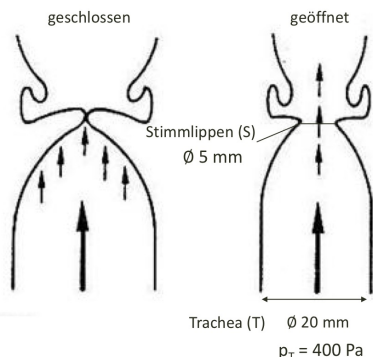
Bei der Bildung von stimmhaften Lauten werden die Stimmlippen (Abbildung rechts) während der Ausatmung durch den aus der Luftröhre (Trachea) kommenden Luftstrom in Schwingung versetzt, wodurch sich diese periodisch öffnen und schließen (Bernoulli-Effekt).

Die Öffnung der Stimmlippen wird vereinfacht als runder Querschnitt mit einem Durchmesser von $d_s = 5 \text{ mm}$ betrachtet.

Die Trachea besitzt einen Durchmesser von $d_T = 20 \text{ mm}$.

Die Lunge baut zum Öffnen der Stimmlippen einen relativen

Druck $p_T = 400 \text{ Pa}$ in der Trachea auf.



Weiter ist bekannt:

- pro Atemzug werden **500 ml** ein- bzw. ausgeatmet
- Es erfolgen **12 Atemzüge pro Minute**. Es wird somit von einer gleichmäßigen Ausatmung (stationäre Strömung) innerhalb von **2,5 Sekunden** ausgegangen.
- Die Dichte der Luft beträgt: $\rho_{\text{Luft}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ und wird als konstant angenommen.

Aufgabe:

Berechnen Sie den Druck p_s , der in der Stimmlippe beim Ausatmen entsteht. Vernachlässigen Sie dabei den Höhenunterschied zwischen Trachea und Stimmlippe.

Bernoulli:

Volumenstrom

$$\frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 = \frac{p_s}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2$$

$$p_s = \frac{p_e}{\rho} + \frac{1}{2} v_e^2 - \frac{1}{2} v_s^2$$

$$p_s = \frac{1}{2} \rho (v_e^2 - v_s^2) + p_e$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\left(6,65 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(10,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) + 400 \text{ Pa}$$

$$= 338 \text{ Pa}$$

$$\dot{V} = \frac{V}{t} = \frac{500 \text{ cm}^3}{2,5 \text{ s}} = \frac{500 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{2,5 \text{ s}} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$v_e = \frac{\dot{V}}{A_e} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\frac{\pi}{4} \cdot (20 \text{ mm})^2} = 6,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_s = \frac{\dot{V}}{A_s} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\frac{\pi}{4} \cdot (5 \text{ mm})^2} = 10,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Durch ein Gefäß mit dem Durchmesser $d_G = 4 \text{ mm}$ und der Länge $l_G = 20 \text{ mm}$ strömt das Blut mit einer mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_{\text{Blut}} = 0,03 \text{ m/s}$. Eine stationäre Strömung wird angenommen. Weiterhin sind die Dichte und die Viskosität des Blutes gegeben:

$$\rho_{\text{Blut}} = 1050 \text{ kg/m}^3$$

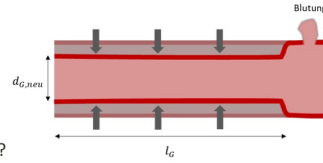
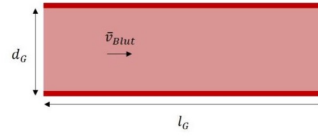
$$\mu_{\text{Blut}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$$

a) Geben Sie an, ob es sich um eine laminare oder turbulente Strömung im Gefäß handelt.

b) Berechnen Sie den Widerstand des Gefäßes.

Unmittelbar hinter diesem Gefäßabschnitt kommt es zu einer Ruptur des Blutgefäßes mit resultierender Blutung. Der Gefäßabschnitt verengt sich in Folge der Blutung reflektorisch (Vasokonstriktion).

c) Welchen neuen Durchmesser $d_{G,\text{neu}}$ muss das Gefäß aufweisen, damit der Strömungswiderstand auf das dreifache des ursprünglichen Wertes zunimmt?



$$a) \quad Re = \frac{\rho \cdot h \cdot v}{\mu} = \frac{1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4 \cdot \text{mm} \cdot 0,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}} = 35 < 2700 \Rightarrow \text{laminare Strömung}$$

$$b) \quad R = \frac{-8 \cdot \mu \cdot \Delta x}{\pi \cdot r_0^4}$$

$$= \frac{-8 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} \cdot 20 \text{ mm}}{\pi \cdot (2 \text{ mm})^4}$$

$$= -11,455 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \cdot \text{s}}$$

$$c) \quad R_3 = 3 \cdot (-11,455 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \cdot \text{s}})$$

$$= 34,377 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \cdot \text{s}}$$

$$34,377 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \cdot \text{s}} = \frac{-128 \mu \text{L}}{\pi \cdot D^4}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{-128 \mu \text{L}}{\pi \cdot 34,377 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \cdot \text{s}}}}$$

$$= 3,035 \text{ mm}$$

Aufgabe 1 – Gehirndurchblutung

Biomechanik

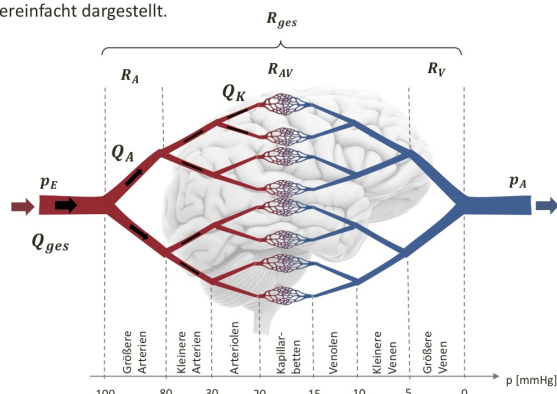
In der Abbildung ist die Blutversorgung des Gehirns vereinfacht dargestellt.

Es gilt $p_E = 100 \text{ mmHg}$, $p_A = 0 \text{ mmHg}$ und

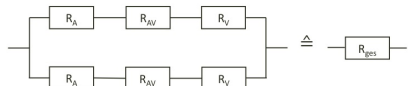
$Q_{ges} = 800 \text{ ml/min}$.

1. Im physiologischen Zustand:

- Wie groß ist der Durchfluss Q_K in jedem Kapillarbett?
- Berechnen Sie den gesamten Gefäßwiderstand R_{ges} , sowie den Widerstand einer größeren Arterie R_A , einer größeren Vene R_V und den Widerstand R_{AV} mit Hilfe der in der Abbildung angegebenen Druckabfälle.



Ersatzschaltbild:



Die Gefäße weisen auf jeder Ebene dieselben Dimensionen auf.

Prof. Gerdin Götting

1. Injunktionsst. Stuttgart – Institut für Biomedizinische Technik

21

$$a) Q_K = \frac{Q_{ges}}{8} = \frac{800 \frac{\text{ml}}{\text{min}}}{8} = 100 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

$$b) R_{ges} = -\frac{\Delta p}{Q} = -\frac{100 \text{ mmHg}}{800 \frac{\text{ml}}{\text{min}}} = -0,125 \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}$$

$$R_A = -\frac{\Delta p}{0,5 \cdot Q} = -\frac{(100-80) \text{ mmHg}}{0,5 \cdot 800 \frac{\text{ml}}{\text{min}}} = -0,05 \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}$$

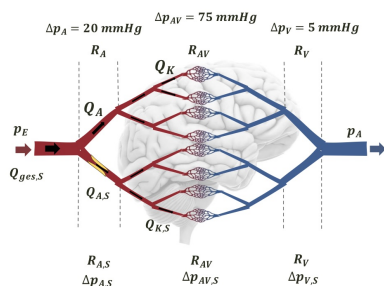
$$R_V = -\frac{\Delta p}{0,5 \cdot Q} = -\frac{5 \text{ mmHg}}{0,5 \cdot 800 \frac{\text{ml}}{\text{min}}} = -0,0125 \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}$$

$$R_{AV} = -\frac{\Delta p}{0,5 \cdot Q} = -\frac{75 \text{ mmHg}}{0,5 \cdot 800 \frac{\text{ml}}{\text{min}}} = -0,1875 \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}$$

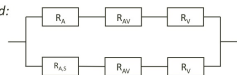
2. Eine Stenose verringert den Gefäßdurchmesser einer größeren Arterie um ein Viertel.

Es wird angenommen, dass p_E und p_A unverändert bleiben.

- Wie groß ist der Widerstand $R_{A,S}$ des stenotischen Gefäßes?
- Welcher Durchfluss $Q_{K,S}$ ergibt sich in jedem Kapillarbett hinter der Stenose? Vergleichen Sie ihn mit dem Durchfluss ohne Stenose.
- Berechnen Sie den Druckabfall $\Delta p_{A,S}$ durch das stenotische Gefäß.
- Welchen Anteil am gesamten Druckabfall $\Delta p_{ges} = p_A - p_E$ hat dieser?
- Vergleichen Sie: Welchen Anteil hat der Druckabfall des gleichen Gefäßes ohne Stenose am gesamten Druckabfall?



Ersatzschaltbild:



$$a) R_{A,S} = -\frac{128 \mu \cdot L}{\pi \cdot \left(\frac{3}{4} D\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} \cdot R_A = -0,158 \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}$$

$$b) Q_{A,S} = \frac{\Delta p_{ges}}{R_{A,S} + R_{AV} + R_V} = \frac{100 \text{ mmHg}}{(0,158 + 0,1875 + 0,0125) \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}}} = 279 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

$$Q_{K,S} = 0,25 \cdot Q_{A,S} = 69,8 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

$$\frac{Q_{K,S}}{Q_K} = 0,69 \Rightarrow 69\% \text{ des Durchflusses ohne Stenose}$$

$$\Delta p_{ges,s} = (R_{As} + R_{Av} + R_v) \cdot Q_A = (-0,158 - 0,1875 - 0,0125) \frac{\text{mmHg}}{\text{ml/min}} \cdot 400 \frac{\text{ml}}{\text{min}} = -143 \text{ mmHg}$$

- [illegible]

- $$\begin{aligned} \text{a) } Q &= 400 \frac{\text{ml}}{\text{min}} & R &= R_{AV} + \underbrace{R_1 + R_2}_R + R_V \\ & & &= (0,158 + 0,1875 + 0,0125) \frac{\text{ml Hg}}{\text{ml/min}} \\ & & &= 0,358 \frac{\text{ml Hg}}{\text{ml/min}} \end{aligned}$$

$$P_E = Q \cdot R = 400 \frac{\text{mL}}{\text{min}} \cdot 0,358 \frac{\text{mmHg}}{\text{mL/min}} = 143,2 \text{ mmHg}$$

$$b) \quad Q = \frac{P_e}{R} = \frac{143,2 \text{ mmHg}}{R_A + R_{AV} + R_V} = \frac{143,2 \text{ mmHg}}{(0,05 + 0,1875 + 0,0125) \frac{\text{mmHg}}{\text{nl/min}}}$$

$$= \frac{143,2 \text{ mmHg}}{0,25 \frac{\text{mmHg}}{\text{nl/min}}} = \underline{\underline{572,8 \frac{\text{nl}}{\text{min}}}}$$

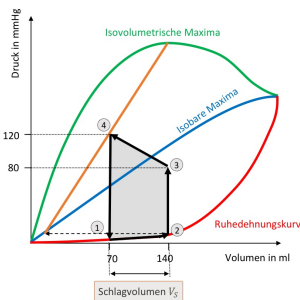
Vorlesung 11

Aufgabe 1 – Herzarbeit

Der linke Ventrikel fördert pro Schlag ein Blutvolumen von **70 ml** bei einem diastolischen Druck p_3 von **80 mmHg** und einem systolischen Druck p_4 von **120 mmHg**. In der Füllungsphase steigt der Druck im Ventrikel von $p_1 = 3$ mmHg bis $p_2 = 8$ mmHg.

Die Herzfrequenz beträgt **80** Schläge pro Minute mit einer Systolendauer von **300 ms**.

- Berechnen Sie die vom linken Ventrikel verrichtete Arbeit W_V pro Herzschlag.
- Berechnen Sie die durchschnittliche Ventrikelleistung P_V bei einer Herzfrequenz von 80 Schlägen pro min.
- Berechnen Sie die durchschnittliche Ventrikelleistung P_S während der Systole.



$$\begin{aligned}
 a) W_V &= +V_s \cdot \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right) - V_s \cdot \left(\frac{P_3 + P_4}{2} \right) \\
 &= 70 \text{ ml} \cdot \left(\frac{3 + 8 \text{ mmHg}}{2} \right) - 70 \text{ ml} \cdot \left(\frac{80 + 120 \text{ mmHg}}{2} \right) \\
 &= -6615 \text{ mmHg} \cdot \text{ml} \\
 &= 875,75 \text{ Pa} \cdot \text{L} \quad \downarrow \cdot 10^{-3} \\
 &= \underline{\underline{0,88 \text{ J}}}
 \end{aligned}$$

oder Flächeninhalt der grauen Fläche
= Herzarbeit

$$b) P_V = \frac{W_V}{t_s} = \frac{-0,88 \text{ J}}{0,75 \text{ s}} = -1,17 \text{ W}$$

$$\begin{aligned}
 c) W_{V,s} &= -V_s \cdot \left(\frac{P_3 + P_4}{2} \right) \\
 &= -70 \cdot \text{ml} \cdot \left(\frac{80 + 120 \text{ mmHg}}{2} \right) = 7000 \cdot 133,322 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{0,93 \text{ J}}}
 \end{aligned}$$

$$P_{V,s} = \frac{W_{V,s}}{t_s} = \frac{0,93 \text{ J}}{0,3 \text{ s}} = 3,11 \text{ W}$$

Vorlesung 12

Aufgabe 1 – Lungen

Bei der Inspiration einer Probandin wird ein Strömungswiderstand von $0,2 \frac{\text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{l}}$ gemessen.
Bei einem Atemzug von 3 Sekunden atmet sie 2 Liter Luft ein. Der intrapleurale Druck beträgt während der gesamten Einatmung -8 mmHg. Der Alveolardurchmesser wird als 100 μm und die Wandstärke als 0,1 μm angenommen.

- Berechnen Sie den (relativen) intraalveolaren Druck p_A (sowohl in Pa als auch in mmHg) mit der Annahme einer konstanten Strömung.
- Berechnen Sie die von der Muskulatur geleistete Arbeit W .
- Berechnen Sie die Spannung in der Alveolarwand.

$$a) \text{geg. } R = 0,2 \frac{\text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{l}}$$

$$\text{Atemzug } Q = \frac{2}{3} \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$p_p = -8 \text{ mmHg}$$

$$d_A = 100 \mu\text{m}$$

$$s = 0,1 \mu\text{m}$$

$$p_A = R \cdot Q = 0,2 \cdot \frac{\text{l} \cdot \text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{l}} \cdot \frac{2}{3} \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$= -\frac{4}{30} \text{ kPa}$$

$$= -133,33 \text{ Pa}$$

$$= -1 \text{ mmHg}$$

$$\begin{aligned}
 b) W &= p_p \cdot \Delta V \\
 &= -8 \cdot 133,3 \text{ Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\
 &= -2,17 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$c) p_A - p_p = \frac{2 \cdot \sigma \cdot s}{r}$$

$$\sigma = \frac{(p_A - p_p) \cdot r}{2 \cdot s}$$

$$= \frac{(-133,33 \text{ Pa} + 8 \cdot 133,322 \text{ Pa}) \cdot 50 \mu\text{m}}{2 \cdot 0,1 \mu\text{m}}$$

$$= 233006 \text{ Pa}$$

Zusätzliche Aufgaben

Aufgabe 1 - Trägheitsprinzip

Musterlösung

Welche der folgenden Formulierungen des Trägheitssatzes sind korrekt?

- ☒ a) Ist die resultierende Kraft auf einen Körper Null, so ist er in Ruhe oder er bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag.
- ☐ b) Wirkt auf einen Körper keine Kraft, so bleibt er in Ruhe. Bewegt er sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig, so muss auf ihn eine Kraft wirken.
- ☒ c) Jeder Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter, wenn keine Kraft auf ihn wirkt.
- ☒ d) Jeder Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter, wenn die resultierende Kraft auf ihn Null ist.
- ☒ e) Alle Körper sind träge; d.h., ihr Geschwindigkeitsvektor ändert sich nicht von selbst, sondern nur infolge der Einwirkung von Kräften.
- ☐ f) Bei Vernachlässigung der Reibung bewegt sich ein geradlinig beschleunigter Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiter.
- ☐ g) Zur Bewegung eines Körpers braucht man eine Kraft.

Aufgabe 2 - Aktionsprinzip

Gegeben sind Körper A und Körper B mit $m_A > m_B$.

Außerdem sind zwei Kräfte gegeben, wobei gilt: $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$.

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☒ a) $\vec{F}_1$ beschleunigt Körper A stärker als $\vec{F}_2$.
- ☐ b) $\vec{F}_2$ beschleunigt Körper B stärker als $\vec{F}_1$ Körper A beschleunigt.
- ☐ c) $\vec{F}_2$ bremst Körper A stärker als Körper B.
- ☒ d) $\vec{F}_1$ beschleunigt Körper B stärker als Körper A.
- ☒ e) $\vec{F}_2$ bremst Körper B schwächer als $\vec{F}_1$.

Aufgabe 3 - Aktionsprinzip

Musterlösung

Ein Golfball mit einer Masse $m_{\text{Golfball}} = 47 \text{ g}$ wird mit einer Kraft von $F_{\text{Schlag}} = 6 \text{ kN}$ in x-Richtung geschlagen. Die Kontaktzeit zwischen Golfschläger und Ball beträgt $t = 0,5 \text{ ms}$.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, die der Ball in x-Richtung erreicht.

$$F = m_G \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m_G} = \frac{6 \text{ kN}}{47 \text{ g}} = 1,3 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$$

$$v_{\text{Ende}} - v_{\text{Anfang}} = 1,3 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$v_{\text{Ende}} = \underline{\underline{65 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

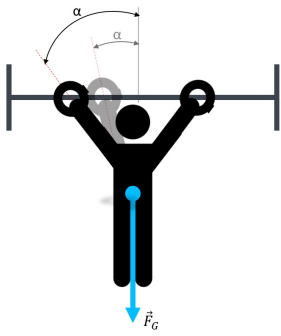
Aufgabe 4 - Wechselwirkungsprinzip

Musterlösung

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

An einem Körper greifen die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an. Sie sind im Gleichgewicht, wenn...

- ☐ a) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Betrag und Richtung übereinstimmen.
- ☒ b) Der Körper einen festen Geschwindigkeitsbetrag und eine feste Richtung besitzt.
- ☐ c) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ einen gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtungen haben.
- ☐ d) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ auf der gleichen Wirkungslinie liegen.
- ☐ e) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gleich groß und parallel sind.
- ☒ f) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ den gleichen Betrag, die gleiche Wirkungslinie und entgegengesetzte Richtung haben.
- ☒ g) Der Körper ruht.
- ☒ h) Die resultierende Kraft Null ist.

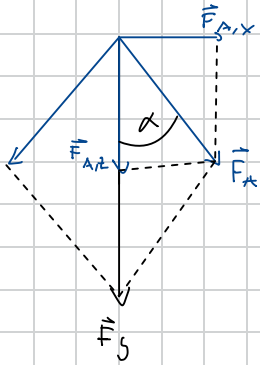


Die Abbildung der nachfolgenden Aufgabe wurde leicht modifiziert, da die ursprüngliche Abbildung bei der Bearbeitung zu Verwirrung geführt hätte.

Ein Turner ($\vec{F}_G = 700 \text{ N}$) hängt wie dargestellt an einem Reck. Dabei nehmen die Arme die Winkelstellung α ein.

Ermitteln Sie rechnerisch die Kräfte, welche die Hände auf die Turnringe bei Winkeln von 5° , 15° und 30° ausüben.

α : Winkel zwischen Arm und Mittelachse des Turners



$$\vec{F}_{A,z} = \frac{\vec{F}_G}{2} = 350 \text{ N}$$

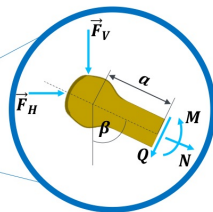
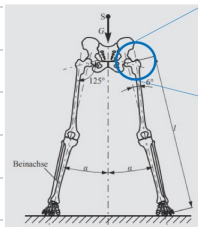
$$\vec{F}_{A,x} = \vec{F}_{A,z} \cdot \tan(\alpha)$$

$$\vec{F}_A = \sqrt{\vec{F}_{A,x}^2 + \vec{F}_{A,z}^2}$$

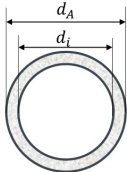
Winkel	$\vec{F}_{A,z}$	$\vec{F}_{A,x}$	$\vec{F}_A$
30°	350 N	$202,1 \text{ N}$	$404,1 \text{ N}$
15°	350 N	$93,8 \text{ N}$	$362,3 \text{ N}$
5°	350 N	$36,6 \text{ N}$	$351,3 \text{ N}$

Aufgabe 1 – Kräfte und Belastungen im Hüftkopf

Musterlösung



Querschnitt der Kompakta



Wir nehmen Bezug auf die Aufgabe „Kräfte und Belastungen im Hüftkopf“ aus Grundlagen der Mechanik (Teil II).

Die Kräfte wurden wie folgt berechnet:

$$N = -(\vec{F}_V \cdot \cos \beta + \vec{F}_H \cdot \sin \beta) = -287,6 \text{ N}$$

$$Q = -\vec{F}_V \cdot \sin \beta + \vec{F}_H \cdot \cos \beta = -360,4 \text{ N}$$

$$M = a \cdot (-\vec{F}_V \cdot \sin \beta + \vec{F}_H \cdot \cos \beta) = -10,81 \text{ Nm}$$

Betrachten wir den hohlen Querschnitt des Hüftkopfes mit folgenden geometrischen Parametern:

$$d_A = 20 \text{ mm}$$

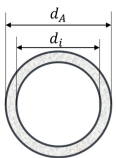
$$d_i = 15 \text{ mm}$$

Dabei wird nur die Kompakta mit einem E-Modul von $E = 17.000 \text{ MPa}$ betrachtet.

Richard, Biomechanik – Grundlagen und Anwendungen auf den menschlichen Bewegungsapparat, 2013

2

- Berechnen Sie die maximale Normalspannung σ_H im Knochenquerschnitt.
- Berechnen Sie die Normalspannung σ_V im hypothetischen Fall eines vollen Knochens und setzen Sie sie ins Verhältnis mit σ_H .
- Berechnen Sie die Dehnung ε in beiden Fällen a) und b).
- Berechnen Sie die Schubspannung τ in beiden Fällen a) und b).



c) Hohlknochen

$$\sigma_{H,z} = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{(d_A^2 - d_i^2) \cdot \pi}{4}} = \frac{-287,6 \text{ N}}{((400 - 225) \cdot \frac{\pi}{4}) \text{ mm}^2} = -2,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{H,D} = \frac{|Q|}{A} = \frac{360,4 \text{ N}}{177,4 \text{ mm}^2} = 2,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$W = \pi \cdot \frac{d_A^4 - d_i^4}{64 \cdot d_A} = 268,4 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{H,B} = \frac{M}{W_b} = \frac{-10,81 \text{ Nm}}{268,4 \text{ mm}^3} = -40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_H = \sigma_{H,z} + \sigma_{H,B} = -42,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-42,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{17000 \text{ MPa}}$$

Vollknochen

$$A = (400) \cdot \frac{\pi}{4} \approx 314,2 \text{ mm}^2$$

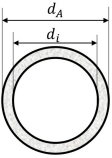
$$\sigma_{N,z} = \frac{N}{A} = \frac{-287,6 \text{ N}}{314,2 \text{ mm}^2} \approx -0,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{N,D} = \frac{|Q|}{A} = \frac{-360,4 \text{ N}}{314,2 \text{ mm}^2} = -1,1 \text{ N/mm}^2$$

$$W = \pi \cdot \frac{d_a^3}{32} = \frac{\pi \cdot 8.000}{32} \approx 785,4 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{N,B} = \frac{M}{W_b} = \frac{-10,81 \text{ Nm}}{785,4 \text{ mm}^3} = \frac{-10.810 \text{ Nmm}}{785,4 \text{ mm}^3} = -13,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_N = \sigma_{N,z} + \sigma_{N,B} \approx -14,6 \text{ N/mm}^2$$



$d_A = 20 \text{ mm}$
 $d_i = 15 \text{ mm}$

Beide I und W sind abhängig allein von der Geometrie des Balkenquerschnitts.

In der Literatur sind Werte für verschiedene Geometrien zu finden.

Querschnittsform	Fläche F	Größter Abstand e	Trägheitsmoment I	Widerstandsmoment $W = \frac{I}{e}$
14 Kreis	πr^2	r	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^3}{4}$
15 Kreisring	$\pi(r^2 - r_i^2)$	r	$\frac{\pi(r^4 - r_i^4)}{4}$	$\frac{\pi(r^3 - r_i^3)}{4}$

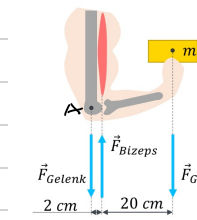
Querschnittsform	Fläche F	Größter Abstand e	Trägheitsmoment I	Widerstandsmoment $W = \frac{I}{e}$
14 Kreis	πr^2	r	$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^3}{4}$
15 Kreisring	$\pi(r^2 - r_i^2)$	r	$\frac{\pi(r^4 - r_i^4)}{4}$	$\frac{\pi(r^3 - r_i^3)}{4}$

Vor allem runde Querschnitte, voll und hohl, sind in biomechanischem Hinblick von Interesse

<https://de.wikipedia.org/wiki/Fl%C3%A4chenmoment#Datei:L-Tr%C3%A4gheitsmoment>

Aufgabe 2 – Belastungen an Gelenken

Musterlösung



Es wird ein Gegenstand mit einer Masse $m = 10 \text{ kg}$ gehalten, wobei der Unterarm rechtwinklig angewinkelt ist. Die Masse m übt eine Gewichtskraft $\vec{F}_G$ auf den Unterarm aus, wobei die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt.

- Berechnen Sie die Gelenkkraft $\vec{F}_{\text{Gelenk}}$.
- Berechnen Sie die Bizepskraft $\vec{F}_{\text{Biceps}}$.

$$a) F_a = -m \cdot g = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -98,1 \text{ N}$$

$$A) : \vec{F}_B \cdot 0,02 \text{ m} - \vec{F}_g \cdot 0,2 \text{ m} = 0$$

$$\vec{F}_B = \frac{F_g \cdot 0,2 \text{ m}}{0,02 \text{ m}} = 981 \text{ N}$$

$$b) \vec{F}_a + \vec{F}_B + \vec{F}_a = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= -\vec{F}_B - \vec{F}_a \\ &= -981 \text{ N} + 98,1 \text{ N} \\ &= -882,9 \text{ N} \end{aligned}$$