

ÜBUNG IM FACH SCHALTUNGSTECHNIK I, WiSe 24/25

Blatt 10

Aufgaben 19–20; 5 Seiten

Abgabe: 06.01.2025, 22:00 Uhr, über ILIAS

Ansprechpartner: M. Sc. Rouven Klenk, rouven.klenk@int.uni-stuttgart.de, 2.406 ETI II

Hinweise: Es sind alle Aufgaben auf diesem Arbeitsblatt zu bearbeiten. Vergessen Sie nicht, auf jedes Blatt Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer zu schreiben. Auf der ersten Seite bitte zusätzlich den Anfangsbuchstaben Ihres Nachnamens markieren und die Blätter möglichst vollständig beschreiben.

Bei allen Berechnungen sind Zwischenschritte anzugeben. Geben Sie ausschließlich das richtige Endergebnis an, bringt dies keine Punkte.

|                 |          |                   |                                                                |  |  |  |
|-----------------|----------|-------------------|----------------------------------------------------------------|--|--|--|
| Name:           | Vorname: | Anfangsbuchstabe: | Nummer:                                                        |  |  |  |
|                 |          |                   | <table border="1"><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table> |  |  |  |
|                 |          |                   |                                                                |  |  |  |
| Matrikelnummer: |          |                   |                                                                |  |  |  |
|                 |          |                   |                                                                |  |  |  |

Bewertung – wird vom Institut ausgefüllt

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 3<br>(3) | 3<br>(3) | 2<br>(2) | 5<br>(5) | 1<br>(1) | 6<br>(6) |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|

|            |          |
|------------|----------|
| 10<br>(10) | 6<br>(6) |
|------------|----------|

|            |
|------------|
| 36<br>(36) |
|------------|

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 4<br>(4) | 2<br>(3) | 4<br>(4) | 2<br>(6) |
|----------|----------|----------|----------|

|            |
|------------|
| 12<br>(17) |
|------------|

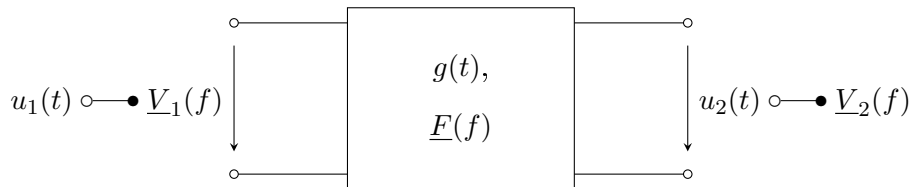
|            |
|------------|
| 48<br>(53) |
|------------|

|           |
|-----------|
| +         |
| + / 0 / - |

## Aufgabe 19

### Beschreibung von Vierpolen mit der Fouriertransformation

Betrachtet wird ein linearer, zeitinvarianter Vierpol nach Abbildung **1**, der durch die Impulsantwort  $g(t)$  bzw. Wirkungsfunktion  $\underline{F}(f)$  beschrieben wird.



**Abbildung 1:** Blockschaltbild des Vierpols

- a) Welcher Zusammenhang gilt zwischen den Spannungen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$ , welcher zwischen deren Fouriertransformierten  $\underline{V}_1(f)$  und  $\underline{V}_2(f)$ ?

Welcher Vorteil bietet die Berechnung im Frequenzbereich?

- b) Welche Eingangssignale  $u_1(t)$  müssen an einem Vierpol anliegen, um die Impulsantwort  $u_2(t) = g(t)$  bzw. die Sprungantwort  $u_2(t) = a(t)$  am Ausgang zu erhalten?

Was folgt aus der Kausalität des Vierpols für  $g(t)$  bzw.  $a(t)$ ?

- c) Die Sprungantwort  $a(t)$  eines Vierpols sei bekannt. Wie lässt sich daraus im Zeitbereich die Ausgangsspannung  $u_2(t)$  des Vierpols für eine beliebige nichtperiodische, beschränkte Eingangsspannung  $u_1(t)$  berechnen?

Wie lässt sich aus der Sprungantwort die Wirkungsfunktion  $\underline{F}(f)$  berechnen?

- d) Die Schaltungsanalyse mithilfe der Fouriertransformation kann als Verallgemeinerung der komplexen Wechselstromrechnung aufgefasst werden.

Auf welche Eingangsspannungen  $u_1(t)$  ist die komplexe Wechselstromrechnung beschränkt? Geben Sie ein Beispiel an.

Wie lautet die in der Vorlesung diskutierte hinreichende Bedingung für die Existenz der Fouriertransformation? Geben Sie eine Spannung  $u_1(t)$  an,

- die diese Bedingung *nicht* erfüllt, der mithilfe der Dirac-Distribution jedoch eine Fouriertransformierte zugeordnet werden kann.
- für die – auch mit dieser Erweiterung – keine Fouriertransformierte existiert.

Der Vierpol besitze die Sprungantwort  $a(t) = (1 - e^{-t/\tau})s(t)$ .

- e) Welche Bedingung muss an die Konstante  $\tau$  gestellt werden, damit der Vierpol stabil ist?

- f) Bestimmen Sie die Impulsantwort  $h(t)$  sowie die Wirkungsfunktion  $\underline{F}(f)$  des Vierpols. Geben Sie damit eine passive Schaltung – bestehend aus zwei Bauelementen – an, die diese Wirkungsfunktion besitzt, sowie eine mögliche Dimensionierung dieser Schaltung für  $\tau = 1 \text{ ns}$ .
- g) Berechnen Sie das Ausgangssignal  $u_{2i}(t)$  des Vierpols, wenn am Eingang die Spannung

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= \hat{U}[s(t) - s(t - T_1)] && (\text{Hinweis: Überlagerungssatz}), \\ u_{12}(t) &= \hat{U}e^{-t/\tau}s(t) && (\text{Hinweis: Faltung}), \\ u_{13}(t) &= \hat{U}\cos(2\pi f_0 t) && (\text{Hinweis: komplexe Wechselstromrechnung}) \end{aligned}$$

anliegt.

Abschließend sollen einige im Skript aufgeführte Eigenschaften der Fouriertransformation hergeleitet werden.

- h) Gegeben sei ein beliebiges Transformationspaar  $u(t) \circ \bullet \underline{V}(f)$ . Zeigen Sie die Gültigkeit der Theoreme

$$\begin{aligned} u(at) &\circ \bullet \frac{1}{|a|} \underline{V}\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0, \\ u(t) \cos(2\pi f_0 t) &\circ \bullet \frac{1}{2} [\underline{V}(f + f_0) + \underline{V}(f - f_0)], \\ u(-t) &\circ \bullet \underline{V}(-f). \end{aligned}$$

119

a)  $u_2(t) = (u_1 * g)(t)$  (Formel 4-58 bzw. 4-59)

$\underline{U}_2(f) = \underline{F}(f) \cdot \underline{U}_1(f)$  (Formel 4-60)

Zitat S. 81 Skript:

„Das Faltungsintegral lässt sich durch die Fourier-Transformation oft leichter mit einer Multiplikation im Frequenzbereich mit anschließender Rücktransformation bestimmen.“

b) Um  $u_2(t) = g(t)$  am Ausgang zu erhalten muss  $u_1(t) = \delta(t)$  sein, da

$$u_2(t) = (u_1 * g)(t) = (\delta * g)(t) = (g * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

(4-63)  
Kommutativ s. Signale + Systeme VLs.

$$u_2(t) = (u_1 * g)(t) = (s * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^{t+1} g(\tau') (-d\tau) = \int_t^{t+1} g(\tau') d\tau' = a(t)$$

mit  $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$  (5-37)

Die Kausalität des Vierpols ist  $g(t) = a(t) = 0$  für  $t < 0$ .

c)  $u_2(t) = (u_1 * g)(t) = u_1(t) * g(t) = u_1(t) * a(t) \frac{d}{dt}$

da  $a(t) = \int g(t) dt \Rightarrow g(t) = a(t) \frac{d}{dt}$

$$\underline{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = \underbrace{FT \{ g(t) \}}_{4-17} = FT \left\{ \frac{d}{dt} \cdot a(t) \right\} = j2\pi f \cdot \underbrace{FT \{ a(t) \}}_{\text{Differentiation S. 86}}$$

(4-66)

d) Die komplexe Wechselstromrechnung ist auf Periodische und integrierbare Signale mit nur einer Frequenzkomponente beschränkt. Z.B.  $u_1(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi)$

Die hinreichende Bedingung für die Existenz der Fouriertransformation lautet:

„[Das] Fourier-Integral existiert, sofern  $u(t)$  den Dirichlet'schen Bedingungen genügt und  $u(t)$  absolut integrierbar ist“ (Skript S. 64)

Die Dirichlet'sche Bedingung lautet:  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty$  (4-13)

i)  $u_1(t) = \sin(\omega t)$

ii)  $u_1(t) = t^n \cdot s(t)$  mit  $n > 1$

$$e) \quad a(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) s(t)$$

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \frac{d}{dt} \cdot a(t) = \frac{d}{dt} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) s(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} s(t)$$

$g(t)$  wird für  $t < 0$   $\rightarrow 0$  und für  $t \geq 0$  wird  $s(t) = 1$ . Daraus

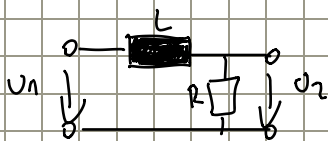
$$\text{folgt } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \begin{cases} 0 & \text{für } T > 0 \\ \infty & \text{für } T < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } T = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt das System ist stabil für  $T > 0$

$$f) \quad h(t) = \frac{d}{dt} a(t) = \frac{d}{dt} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) s(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} s(t) \quad \checkmark$$

$$\text{Korrespondenz } h. g \quad e^{-at} s(t) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$F(f) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f \cdot T} \quad \checkmark$$



$$T = 1 \text{ ns} = \frac{L}{R} \quad (\text{siehe Einführung in die Elektrotechnik}) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow L = 1 \text{ ns} \cdot R = 1 \text{ ns} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 1 \cdot 10^{-9} \text{ s} \cdot 10 \cdot 10^3 \Omega = 10 \mu\text{H}$$

$$\text{z.B. } R = 10 \text{ k}\Omega \text{ und } L = 10 \mu\text{H}$$

$$g) \quad v_{n1}(t) = \hat{u}(s(t) - s(t - T_1))$$

$$v_{21}(t) = \hat{u}(a(t) - a(t - T_1)) = \hat{u}((1 - e^{-\frac{t}{T}}) s(t) + (1 - e^{-\frac{t - T_1}{T}}) s(t - T_1)) \quad \checkmark$$

$$v_{n2}(t) = \hat{u} e^{-\frac{t}{T}} s(t)$$

$$V_{n2}(f) = v_{n2}(f) \cdot F(f) = \hat{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}}_{\text{S. 88 Skript}} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T} + j2\pi f}}_{\text{10f)}} = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{T} + j2\pi f)^2} \quad \checkmark$$

$$\text{es gilt } \frac{1}{(a + j2\pi f)^2} \rightarrow t e^{-at} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{Skript S. 88})$$

7/11

6/6

Daraus folgt:

$$u_{12}(t) = \frac{\hat{U}}{T} + e^{-\frac{t}{T}} s(t) \quad \checkmark$$

$$u_{13}(t) = \hat{U} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$F(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fT}$$

$$|F(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fT)^2}}$$

$$\varphi = \arg(F(f)) = -\arctan(2\pi fT)$$

10/10

$$u_{13}(t) = |F(f_0)| \cdot \hat{U} \cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0)) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 T)^2}} \cdot \cos(2\pi f_0 t - \arctan(2\pi f_0 T))$$

b)  $u(at) \rightarrow \frac{1}{a} \underline{v}\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \neq 0 \quad \checkmark$

$$u(at) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Substitution:  $t' = at, \quad a \cdot dt = dt' \Leftrightarrow dt = \frac{dt'}{a}$

Fall  $a < 0$  ist, drehen sich die Integralgrenzen, daraus folgt:

$$\begin{aligned} u(at) &\rightarrow \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} u(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{a}} \frac{dt'}{a} \\ &= \pm \frac{1}{a} \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} u(t') e^{-j2\pi f \frac{t'}{a}} dt' \\ &\Rightarrow \frac{1}{|a|} \cdot \underline{v}\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

$$u(t) \cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} (\underline{v}(f+f_0) + \underline{v}(f-f_0))$$

$$\begin{aligned} u(t) \cos(2\pi f_0 t) &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{2} \cdot (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \frac{1}{2} (e^{j2\pi t(f_0 - f)} + e^{-j2\pi t(f_0 + f)}) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (e^{-j2\pi t(f-f_0)} + e^{-j2\pi t(f+f_0)}) dt$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{v}(f-f_0) + \underline{v}(f+f_0)) = \frac{1}{2} (\underline{v}(f+f_0) + \underline{v}(f-f_0)) \quad \checkmark$$

$$v(-t) \circ \underline{v}(-f)$$

Da wir bereits  $v(at) \circ \frac{1}{|a|} \underline{v}\left(\frac{f}{a}\right)$  gezeigt haben und wenn man

$a = -1$  einsetzt folgt:

$$v((-1) \cdot t) \circ \frac{1}{|-1|} \cdot \underline{v}\left(\frac{f}{-1}\right) \Rightarrow v(-t) \circ \underline{v}(-f)$$



6/6

## Aufgabe 20

### Fouriertransformation des Trapezimpulses

- Verwenden Sie bei Bedarf eine Formelsammlung oder Integraltafel.
- Die Nutzung von CAS-Rechnern, Wolfram Alpha und anderer Integrallöser ist nicht zulässig.
- Die nicht normierte Sinus-cardinalis-Funktion ist definiert durch

$$\text{si}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

#### Teil A – Vorarbeit

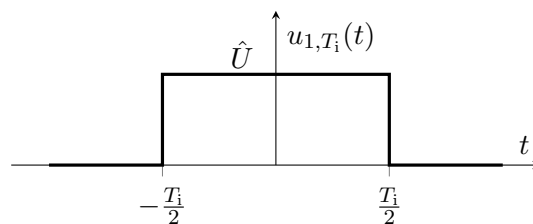


Abbildung 2: Rechtecksignal  $u_{1,T_1}(t)$

- a) Betrachtet werde ein gerades reelles Signal  $u(t)$ . Was folgt daraus für die Spektralfunktion  $\underline{V}(f) \bullet \circ u(t)$ ?

Zeigen Sie, dass sich das Integral zur Bestimmung der Spektralfunktion zu

$$\underline{V}(f) = 2 \int_0^\infty u(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (1)$$

vereinfachen lässt.

- b) Berechnen Sie (d.h. ohne Zuhilfenahme der Korrespondenztabelle im Skript) die Spektralfunktion  $\underline{V}_{1,T_1}(f) \bullet \circ u_{1,T_1}(t)$  des in [Abbildung 2](#) dargestellten Rechtecksignals. Nutzen Sie dabei die Symmetrie des Signals aus.

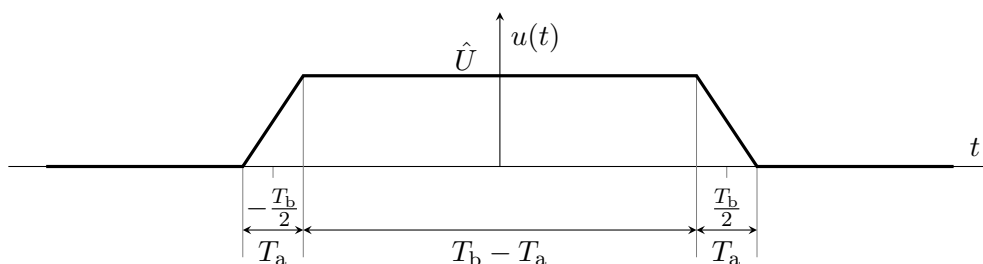


Abbildung 3: Trapezförmiger Spannungsimpuls  $u(t)$

## Teil B – Überlagerung mehrerer Basisfunktionen

Im Folgenden sollen zwei Wege betrachtet werden, mit denen  $\underline{V}(f)$  elegant aus Korrespondenzen der Fouriertransformation abgeleitet werden kann.

Ohne Herleitung darf dazu im Folgenden die Korrespondenz

$$u_{2,T_i}(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{V}_2(f) = \hat{U} T_i \text{si}^2(\pi f T_i) \quad (2)$$

verwendet werden. Das zugehörige Zeitsignal ist in Abbildung 4 zu sehen. Achten Sie darauf, dass gemäß der Definition des Dreiecks nach (2) dessen Breite  $2T_i$  beträgt.

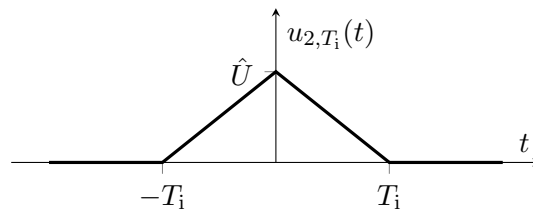


Abbildung 4: Dreieckssignal  $u_{2,T_i}(t)$

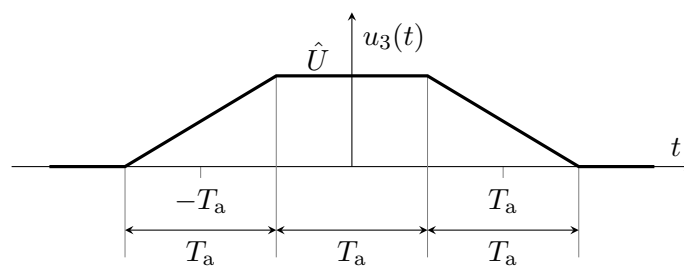


Abbildung 5: Spannungsimpuls  $u_3(t)$

- c) Zunächst wird als Sonderfall das Trapez nach Abbildung 5 betrachtet. Stellen Sie  $u_3(t)$  als Summe zweier zeitverschobener Dreieckssignale im Zeitbereich dar.

Bestimmen Sie mithilfe von  $\underline{V}_2(f)$  die Fouriertransformierte  $\underline{V}_3(f) \bullet \text{---} \circ u_3(t)$  und vereinfachen Sie den Ausdruck.

- d) Beschreiben Sie  $u(t)$  nach Abbildung 3 als gewichtete Differenz

$$u(t) = \alpha_1 u_{2,T_{i,1}}(t) - \alpha_2 u_{2,T_{i,2}}(t)$$

zweier Dreiecksimpulse  $u_{2,T_{i,1}}(t)$  und  $u_{2,T_{i,2}}(t)$ . Geben Sie dazu die Faktoren  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und die Dreiecksbreiten  $2T_{i,1}$ ,  $2T_{i,2}$  an.

Bestimmen Sie hiermit  $\underline{V}(f)$  und vereinfachen Sie Ihren Ausdruck, bis Sie (3) erhalten.

$$\underline{V}(f) = \hat{U} T_b \text{si}(\pi f T_b) \text{si}(\pi f T_a) \quad (3)$$

A20

a) gerades und reelles Signal  $v(t) \Leftrightarrow V(f)$  reell und gerade mit

$$V(f) = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos(2\pi f t) dt \quad (\text{Script S. 87})$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^0 v(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Definition:  $v_g(t) = v_g(-t)$  (3-11)

Substitution  $t' = -t$  und  $dt = -dt'$

$$V(f) = \int_0^{\infty} v(-t) e^{j2\pi f t'} (-1) dt' + \int_0^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} v(t') e^{j2\pi f t'} (-1) dt' + \int_0^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} v(t') e^{j2\pi f t'} dt' + \int_0^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\stackrel{v(t')=v(t)}{=} \int_0^{\infty} v(t') (\cos(2\pi f t') + j \sin(2\pi f t')) dt' + \int_0^{\infty} v(t) (\cos(-2\pi f t) + j \sin(-2\pi f t)) dt$$

$$= \int_0^{\infty} v(t) \cdot (\cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t)) dt + \int_0^{\infty} v(t) \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t) dt$$

$$= \int_0^{\infty} v(t) 2 \cdot \cos(2\pi f t) dt = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos(2\pi f t) dt$$

4/4

$$b) \underline{v}_{\text{max}}(f) = 2 \cdot \int_0^{\frac{T_i}{2}} \hat{U} \cos(2\pi f t) dt = 2 \hat{U} \left[ \frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f} \right]_0^{\frac{T_i}{2}}$$

$$= 2 \hat{U} \left( \frac{\sin(2\pi f \cdot \frac{T_i}{2})}{2\pi f} - 0 \right)$$

$$= \frac{\hat{U} \sin(\pi f T_i)}{\pi f} = \frac{\hat{U} \cdot T_i \cdot \sin(\pi f T_i)}{\pi \cdot f \cdot T_i} = \hat{U} T_i \text{si}(\pi f T_i)$$

$$\text{mit } v_{\text{max}}(0) = \hat{U} T_i$$

L

son. verfall

2/3

$$c) v_3(t) = v_{1T_i} \left(t - \frac{T_a}{2}\right) + v_{2T_i} \left(t + \frac{T_a}{2}\right)$$

$$\underline{v}_2(f) = \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a)$$

Da es sich um eine Zeitverschiebung handelt gilt  $v(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$

$$v_3(f) = \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T_a}{2}} + \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a) \cdot e^{j2\pi f \frac{T_a}{2}}$$

$$= \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a) (\cos(-\pi f T_a) + j \sin(-\pi f T_a) + \cos(\pi f T_a) + j \sin(\pi f T_a))$$

$$= \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a) (\cos(\pi f T_a) - j \sin(\pi f T_a) + \cos(\pi f T_a) + j \sin(\pi f T_a))$$

$$= 2 \cdot \hat{U} T_a \text{si}^2(\pi f T_a) \cos(\pi f T_a)$$

4/4

$$d) \quad 2T_{i,1} = T_b + T_a \Leftrightarrow T_{i,1} = \frac{T_b + T_a}{2}$$

$$2T_{i,2} = T_b - T_a \Leftrightarrow T_{i,2} = \frac{T_b - T_a}{2}$$

$$a_1 = \frac{T_{i,1}}{T_a} = \frac{\frac{T_b + T_a}{2}}{T_a} = \frac{T_b + T_a}{2T_a} \quad \checkmark$$

$$a_2 = \frac{T_{i,2}}{T_a} = \frac{\frac{T_b - T_a}{2}}{T_a} = \frac{T_b - T_a}{2T_a} \quad \checkmark$$

$$v(t) = a_1 v_{2T_{i,1}}(t) - a_2 v_{2T_{i,2}}(t)$$

da es sich um eine Superposition handelt gilt:

$$v(f) = a_1 v_{2T_{i,1}}(f) - a_2 v_{2T_{i,2}}(f)$$

$$= \frac{T_b + T_a}{2T_a} \cdot \hat{v} \cdot \frac{T_b + T_a}{2} \cdot \sin^2\left(\pi f \cdot \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \frac{T_b - T_a}{2T_a} \cdot \hat{v} \cdot \frac{T_b - T_a}{2} \cdot \sin^2\left(\pi f \cdot \frac{T_b - T_a}{2}\right)$$

$$= \frac{T_b + T_a}{2T_a} \cdot \hat{v} \cdot \frac{T_b + T_a}{2} \cdot \sin^2\left(\pi f \cdot \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \frac{T_b - T_a}{2T_a} \cdot \hat{v} \cdot \frac{T_b - T_a}{2} \cdot \sin^2\left(\pi f \cdot \frac{T_b - T_a}{2}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{T_b + T_a}{2} \cdot \pi f\right)^2}{\left(\frac{T_b + T_a}{2} \cdot \pi f\right)^2} \quad \frac{\left(\frac{T_b - T_a}{2} \cdot \pi f\right)^2}{\left(\frac{T_b - T_a}{2} \cdot \pi f\right)^2}$$

$$= \frac{\hat{v} \sin^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right)}{T_a (\pi f)^2} - \frac{\hat{v} \sin^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right)}{T_a (\pi f)^2}$$

$$= \frac{\hat{v}}{T_a (\pi f)^2} \left( \sin^2\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2}\right) - \sin^2\left(\pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right) \right)$$

es gilt:

$$\sin^2(x) - \sin^2(y) = \sin(x+y) \sin(x-y)$$

setzt man obigen Ausdruck ein folgt:

$$v(f) = \frac{\hat{v}}{T_a (\pi f)^2} \left( \sin\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2} + \pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right) \sin\left(\pi f \frac{T_b + T_a}{2} - \pi f \frac{T_b - T_a}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{\hat{v}}{T_a (\pi f)^2} \left( \sin(\pi f T_b) \cdot \sin(\pi f T_a) \right)$$

2/6