

Aufgabe 12:

4) Allgemeines Vorgehen:

Aufstellen von:

- Maschengleichungen:

$$u_{R1}(t) = u_L(t) + u_{R2}(t)$$

$$u_{R2}(t) = u_{R3}(t) + u_C(t)$$

- Knotengleichungen:

$$\dot{i}(t) = \dot{i}_{R1}(t) + \dot{i}_L(t)$$

$$\dot{i}_L(t) = \dot{i}_{R2}(t) + \dot{i}_C(t)$$

- Bauelementgleichungen:

Widerstand: $u_R(t) = R \cdot i_R(t)$

Induktivität: $u_L(t) = L \cdot \frac{d\dot{i}_L(t)}{dt}$

Kapazität: $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

damit ergibt sich für Eingangsgröße $\dot{i}(t)$:

$$\dot{i}(t) = \dot{i}_{R1}(t) + \dot{i}_L(t)$$

$$= \frac{u_{R1}(t)}{R_1} + \frac{u_{R2}(t)}{R_2} + L \frac{d\dot{i}_L(t)}{dt}$$

$$= \frac{u_L(t) + u_{R2}(t) + u_C(t)}{R_1} + \frac{u_{R2}(t) + u_C(t)}{R_2} + L \frac{d\dot{i}_L(t)}{dt}$$

$$= \frac{L}{R_1} \frac{d\dot{i}_L(t)}{dt} + \frac{R_2}{R_1} \dot{i}_C(t) + \frac{1}{R_1} u_C(t) + \frac{R_2}{R_2} \cdot \dot{i}_C(t) + \frac{1}{R_2} u_C(t) + L \frac{d\dot{i}_L(t)}{dt}$$

Einsetzen von $\dot{i}_L(t) = \dot{i}_{R2}(t) + \dot{i}_C(t)$ und $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$

ergibt mit etwas Zusammenfassung

$$\dot{i}_L(t) = LC \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2} \frac{d^2 u_L(t)}{dt^2} + \frac{L + C(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_1 R_2} \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} u_L(t)$$

b)

$$\dot{i}_L(t) = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) C \cdot \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{1}{R_2} u_L(t)$$

c) S_1 unendlich lang geöffnet
 $\Rightarrow$ Energiespeicher ungeladen

$$u_C(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad \dot{i}_L(t) \Big|_{t=0} = 0$$

mit $\dot{i}_L(t)$ aus b) ergibt sich direkt

$$\frac{du_C(t)}{dt} = 0$$

d) Mit Ansatz $u_{C,h}(t) = A \cdot e^{\lambda t}$

ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\frac{LC(R_2 + R_3)}{R_1 R_2} \lambda^2 + \frac{L + C(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_1 R_2} \lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = 0$$

damit

$$\lambda^2 + \underbrace{\frac{L + C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{LC(R_2 + R_3)}}_{2\sigma} \lambda + \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{LC(R_2 + R_3)}}_{\omega_0^2} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$$
$$= -\sigma \pm j\omega$$

also

$$u_{C,h}(t) = (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}) s(t)$$

e) $u_{L,p}(t)$ ist eine Lösung für $u_L(t)$
bei Eingang $i(t)$.

$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{L,h}(t) = 0$ Alle Ausgleichsvorgänge abgeschlossen

I_0 ist hier keine Gleichspannung damit

L Kurzschluss, C Leerlauf

$$\Rightarrow u_{L,p}(t) = I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} s(t)$$

$$f) u_L(t) = u_{L,h}(t) + u_{L,p}(t)$$

$$= (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} + I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}) s(t)$$

$$g) \text{ aus c) } u_L(t) \Big|_{t=0} = \frac{du_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow A + B + I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0$$

$$A \lambda_1 + B \lambda_2 = 0$$

$$A = -I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$B = I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

h) Es gilt:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$$

$$= C \cdot I_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) s(t)$$

mit $\lambda_1 = -\sigma - j\omega$
 $\lambda_2 = -\sigma + j\omega$

$$i_C(t) = \hat{U} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \frac{1}{-2j} (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) s(t)$$
$$= \hat{U} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sin(\omega t) s(t)$$

aus d) $2\sigma = \frac{L + C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{L C (R_2 + R_3)}$

$$\Rightarrow \sigma = 42 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \quad (\tau \approx 23,81 \text{ ns})$$

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_2}{L C (R_2 + R_3)} = 2,4 \cdot 10^{15} \frac{1}{s^2}$$

$$j\omega = \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} \approx j 25,22 \cdot 10^6 \frac{1}{s}$$

$$\hat{U} = I_0 \cdot C \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\sigma^2 + \omega^2}{\omega} \approx 25,4 \text{ mA}$$

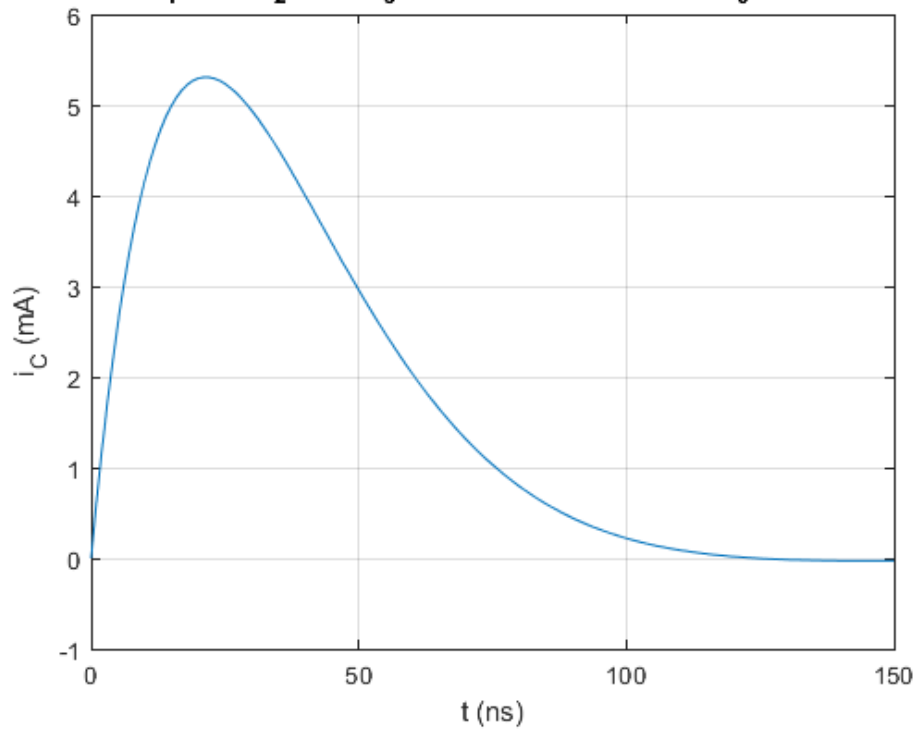
Somit $i_C(t) \approx 25,4 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{23,81 \text{ ns}}} \cdot \sin(2\pi \cdot 4,07 \text{ MHz} \cdot t) s(t)$

Du $\omega \ll \sigma$ ist hier auch die Näherung:

$$i_C(t) \approx \hat{U} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \omega t \cdot s(t) = 640,6 \frac{\text{mA}}{s} \cdot t \cdot e^{-42 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \cdot t} s(t)$$

möglich

$R_1=4k\Omega, R_2=2k\Omega, R_3=0.5k\Omega, L=100\mu H, C=10pF, I_0=20mA$



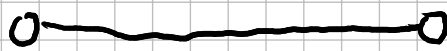
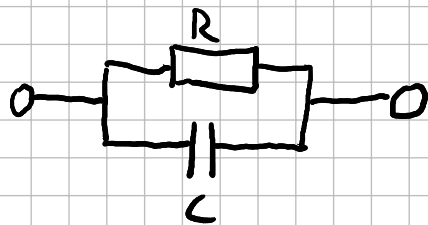
Aufgabe 13:

a)

	idealer Kondensator	ideale Spule
1.	$i_C(t) = C \cdot \frac{d u_C(t)}{dt}$	$u_L(t) = L \cdot \frac{d i_L(t)}{dt}$
2.	$u_C(t)$	$i_L(t)$
3.1	Spannungsquelle	Stromquelle
3.2	Kurzschluss	Leerlauf
3.3	Leerlauf	Kurzschluss

b) Strom folgt einfachem exponentiellem Verlauf

c)



Vierpol

d)

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ i_{\infty} + (i_0 - i_{\infty}) e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} & t \geq t_1 \end{cases}$$

$$\tau = C \cdot \frac{R(R_{in} + R_L)}{R + R_{in} + R_L}$$

$$i_0 = \frac{\hat{u}}{R_{in} + R_L}$$

$$i_{\infty} = \frac{\hat{u}}{R_{in} + R_L + R}$$

damit Dimensionierung:

$$R_{in} = \frac{\hat{u}}{i_0} - R_L$$

$$R = \frac{\hat{u}}{i_{\infty}} - \frac{\hat{u}}{i_0}$$

$$C = \tau \frac{i_0^2}{\hat{u}(i_0 - i_{\infty})}$$

e)

$$\tilde{R} = R_{in} + R_L \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$\text{Masche: } u(t) = u_{\tilde{R}}(t) + u_C(t)$$

$$\text{Knoten: } i(t) = i_R(t) = i_C(t)$$

sowie Bauelementgleichungen

ergibt:

$$u_L(t) = C \tilde{R} \frac{du_L(t)}{dt} + \left(1 + \frac{\tilde{R}}{R}\right) u_c(t)$$

f) homogene Lösung:

$$\lambda = - \frac{R + \tilde{R}}{R \tilde{R} C}$$

$$u_{L,h}(t) = A e^{\lambda(t-t_1)} s(t-t_1)$$

Für $t \rightarrow \infty$:

$$u_{L,p}(t) = \hat{U} \frac{R}{R + \tilde{R}} s(t-t_1)$$

damit

$$u_L(t) = \left(A e^{\lambda(t-t_1)} + \hat{U} \frac{R}{R + \tilde{R}} \right) s(t-t_1)$$

$$\text{mit } u_L(t) \big|_{t=t_1} = 0$$

$$A = - \hat{U} \frac{R}{R + \tilde{R}}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \hat{U} \frac{R}{R + \tilde{R}} \left(1 - e^{\frac{-(t-t_1)}{\tau}} \right) s(t-t_1)$$

$$g) i(t) = i_R(t) + i_L(t) = \frac{u_L(t)}{R} + C \frac{du_L(t)}{dt}$$

$$= \hat{U} \left[\frac{1}{R + \tilde{R}} + \left(\frac{1}{\tilde{R}} - \frac{1}{R + \tilde{R}} \right) e^{\frac{-(t-t_1)}{\tau}} \right] s(t-t_1)$$

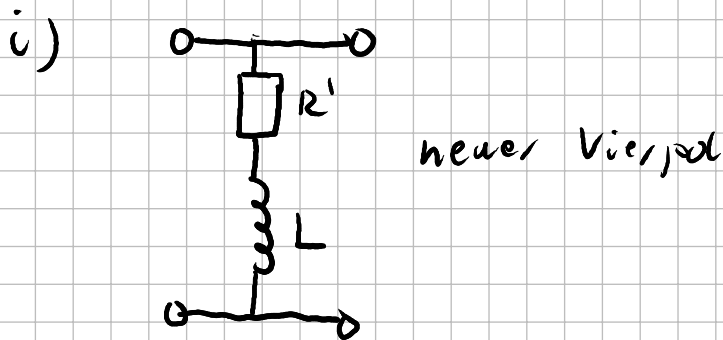
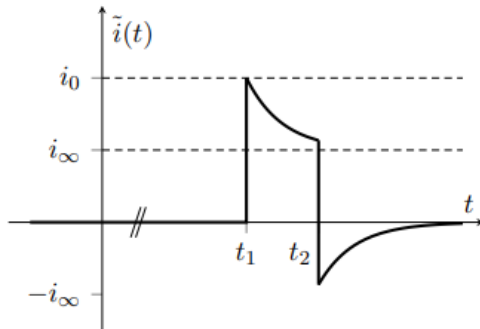
$$= \left[i_\infty + (i_0 - i_\infty) e^{\frac{-(t-t_1)}{\tau}} \right] s(t-t_1)$$

Zusatzaufgaben:

h) LTI-System

$\Rightarrow \tilde{u} = u(t) - u(t-2\tau)$ am Eingang führt zu:

$$\tilde{i}(t) = i(t) - i(t-2\tau)$$



$$i_{in} = \hat{u} \frac{R'}{R_{in}(R' + R_L) + R'R_L}$$

$$i_o = \hat{u} \cdot \frac{1}{\tilde{R}}$$

$$\tilde{R} = \frac{L(R_{in} + R_L)}{R'R_{in} + R_L + R_{in}R_L}$$

(gleichsetzen mit Dimensionierung aus d) ergibt

$$R' = \frac{R_{in} R_L}{R}$$

$$L = L R_{in} R_L$$