

Grenzwerte: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e^{\frac{1}{n}}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ mit $c \in \mathbb{R} > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0 \quad k \in \mathbb{N}_0, \forall \epsilon \in \mathbb{R} > 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0 \quad k \in \mathbb{N}_0, \forall \epsilon \in \mathbb{R}$
 $\lim$ kann verschoben werden
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(n)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} g(n))$

Reihen
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} \quad j \leq 1$ divergent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln(2)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\ln(1-x)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ für $|x| < 1$
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$ für $x \in (-1, 1]$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert (nicht absolut)
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$ konvergiert nach Leibniz

Konvergenzkriterien:
Nullfolgekriterium:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow$ sonst divergent
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow$ immer lesbar
Quotientenkriterium:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \rightarrow$ konvergent
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \rightarrow$ keine Aussage
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \rightarrow$ divergent
 $\rightarrow$ für Fakultäten, Binomialkoeff., e-Funktionen
Wurzelkriterium:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \rightarrow$ konvergent
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \rightarrow$ divergent
 $\rightarrow$ für $(a)^n$
Leibniz-Kriterium:
 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 2. a_n monoton fallend $\rightarrow a_n \geq a_{n+1}$
 $\rightarrow$ für $(-1)^n$

Majoranten / Minorantenkriterium
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existiert und konvergiert und gilt $|a_n| \leq b_n$
 Minorante: $a_n \geq b_n$
Potenzreihen
 $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ Konvergenzradius: $\rho(z_0)$
 z_0 = Entwicklungspunkt $\rightarrow$ evtl. Vorfaktor ausklammern
 so dass nur $(z-z_0)^j$ dasteht, dann bei a_j beachten
 $\rightarrow$ bei $(z-z_0)^{2j}$ am Ende $p \rightarrow -p$
 Konvergenzradius ρ :
 $\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = a$ oder
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$
 bei komplexen a : $a+bi \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}$!!!
 $0=a \rightarrow p=+\infty \mid a=\infty \rightarrow p=0 \mid 0=a \rightarrow p=\frac{1}{a}$
 • konvergiert (absolut), wenn $|x-x_0| < \rho$
 • divergiert, wenn $|x-x_0| > \rho$

Trigonometrie
 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
 $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
 $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
 $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
 $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
 $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
 $\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$
 $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$
 $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
 $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1$
 $\sinh(0) = 0$
 $\cosh(0) = 1$
 $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
 $\cosh(-x) = \cosh(x)$
 $\ln(1) = 0$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sinh(z)$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \cosh(z)$

Differenzierbare Funktionen:
 Differenzierbar, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert
 rechteistiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 linksistiger Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$
 stetig differenzierbar: Grenzwerte der Ableitungen
 stetig sein: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$
 L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Integrale
 $\int f(x) dx = F(x) + C = [F(x)]$
 partielle Integration: $\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$
 Wahl von u :
 • arithmetische Funktionen ($\log, \ln, \log$)
 • inverse Winkelfunktionen ($\arcsin, \arccos$)
 • algebraische Funktionen (x^2, x^3)
 • trigonometrische Funktionen ($\sin, \cos, \tan$)
 • Exponentialfunktionen ($e^x, 5x^x$)
spezielle Integrale
 $\int \frac{1}{1-x^2} dx = [\operatorname{arctanh}(x)]$
 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = [\operatorname{arctan}(x)]$
 $\int \frac{1}{a+x^2} dx = [\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(\frac{x}{\sqrt{a}})]$
 $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = [\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(\frac{x}{a})]$
 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = [\frac{1}{2a} \ln|\frac{x-a}{x+a}|]$
 $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = [\frac{1}{a} \operatorname{arctan}(\frac{x}{a})]$
 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = [\frac{1}{2a} \ln|\frac{x-a}{x+a}|]$

Jacobi-Matrix
 $Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$
 Verkettung: $f \circ g \rightarrow$ dann Jacobi
 $h = f \circ g \rightarrow$ Ergebnis von f als neue Variablen
 in g einsetzen, dann Jacobi-Matrix bilden
 $\rightarrow$ erst einsetzen, dann Matrix
 $Jf(g(v)) \rightarrow$ Jacobi-Matrix von f bilden, dann die Variablen durch Gleichungen von g ersetzen
 $\rightarrow$ erst Matrix, dann einsetzen
vollständige Induktion
 (IA) $n=1$...
 Damit ist die Behauptung für $n=1$ bewiesen
 (IH) Es gelte ...
 $n \rightarrow n+1$
 (IS) Angenommen die Behauptung sei wahr für n . Dann ist ...
 Damit ist die Behauptung bewiesen

Partialbruchzerlegung:
 $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\deg(p) < \deg(q) \rightarrow$ ansonsten Polynomdivision
 Fall 1: „Einfache Polstellen“
 $\frac{p(x)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$
 Fall 2: „Mehrfache Polstellen“
 $\frac{p(x)}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$
 Fall 3: „Komplexe Polstellen“
 $\frac{p(x)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

Hesse-Matrix:
 $Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$
 kritische Stellen:
 $\det(Hf(a)) < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt
 $\det(Hf(a)) > 0 \wedge \operatorname{Sp}(Hf(a)) > 0 \rightarrow$ lok. Min
 $\det(Hf(a)) > 0 \wedge \operatorname{Sp}(Hf(a)) < 0 \rightarrow$ lok. Max
Mehrdimensionale Taylorpolynome
 ① Ableitungen bis zur vorgegebenen Ordnung bestimmen
 ② jeweils Entwicklungspunkt einsetzen
 ③ Werte in Formel einsetzen:
 $T_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$
 Bsp: $T_2(f, (x,y), (1,0)) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + \frac{1}{2} f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + f_y(1,0)(y-0) + \frac{1}{2} f_{yy}(1,0)(y-0)^2 + f_{xy}(1,0)(x-1)(y-0)$
Tangentialebene an Punkt $P = (x_0, y_0)$
 $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$
Lineare Approximation an Punkt $P = (x_0, y_0)$
 $f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + O(\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \|^2)$

Parametrisierung:
 reguläre Parametrisierung $C(t)$ darf nie 0 werden
 spezielle Kurven:
 • Strecke $\overline{P_1 P_2}: K(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) \quad t \in [0,1]$
 • Funktion $y=f(x)$
 $K(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t)) \end{pmatrix} \quad t \in [t_0, t_1]$
 • Kreis $\text{im } \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = R^2$
 $K(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$
 • Ellipse $\text{im } \mathbb{R}^2: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
 $K(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$
Nullstellenmenge:
 • liegt Extremstelle genau auf Kurve μ VZ
 erfolgt $\rightarrow$ Sattelpunkt
 • „im positiven Bereich“ $\rightarrow$ Maximum
 • „im negativen Bereich“ $\rightarrow$ Minimum

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	2π
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Vektorfelder
 Rotation: Kreuzprodukt aus partieller Ableitung und Vektorfeld
 $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}$
 Divergenz: Skalarprodukt aus partieller Ableitung und Vektorfeld
 $\nabla \cdot \vec{v}$
 Potential:
 = „Stammfunktion“ eines Vektorfelds
 $\rightarrow$ Gradient des Potentials ist die ursprüngliche Funktion
 ① 1. Zeile nach x integrieren
 $U(x,y) = \int y dx = yx + C_1(y)$
 ② Potential nach y ableiten und mit 2. Zeile gleichsetzen
 $C_1(y)$ berechnen $\rightarrow$ nach y integrieren
 $\rightarrow$ falls drei Variablen ist $C_1(y,z)$ und $C_2(z)$ $\rightarrow$ mit 3. Zeile gleichsetzen
 $\rightarrow$ von Variablen unabhängige Konstante ist ggf. von Bedingungen abhängig
 Voraussetzungen für Potential:
 • Gebiet einfach zusammenhängend
 $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
 • $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$, $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$
 • evtl. zwei Zeilen gleichsetzen
 $\rightarrow \operatorname{rot}(\vec{v}) = 1$, Zeile - 2. Zeile

Kurvenintegrale
 $\int_C f(x) \cdot dx = \int_a^b \langle f(K(t)), K'(t) \rangle dt$
 $\int_C f(x) dx = \int_a^b f(K(t)) \cdot |K'(t)| dt$
 $\int_C f(x) dx = U(C(b)) - U(C(a))$
 Länge Kurve K :
 $\int_a^b |K'(t)| dt$
 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $C: [a,b] \rightarrow D$ regulär.
 • Dann heißt
 $\int_K g(x) \cdot dx = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) dt$

