

Allgemeine Formeln

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln(u^v) = v \cdot \ln(u)$$

$$\ln(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \ln(u)$$

$$b^a + c = b^a \cdot b^c$$

$$(b^a)^c = b^{a \cdot c}$$

$$b^{-a} = \frac{1}{b^a}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Vektoren, Geraden, Ebenen

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{Hesse-Normalenform}$$

$$\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \left(\frac{h_1}{|\vec{n}_1|} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{x} = \frac{d}{|\vec{n}|}$$

Abstand Punkt Ebene:

$$d = \frac{|n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - d|}{|\vec{n}|}$$

$d > 0$ → Ursprung und Gerade/Punkt liegen auf gleicher Seite der Ebene

$d < 0$ → „auf unterschiedlicher Seite“

Abstand windschiefer Geraden:

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad \text{Schnitt zweier Geraden: } \vec{c} \text{ hier (sog. windschiefe Geraden) zu den Geraden } \vec{c} \rightarrow \vec{s} \text{ und } \vec{c} \rightarrow \vec{s} \text{ parallel} \rightarrow \text{Gerade}$$

Flächeninhalt Parallelogramm:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \rightarrow \text{Dreieck } \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\text{Kreisgleichung: } k = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Gram-Schmidt-Verfahren

$$1.) \vec{u}_1 = \vec{v}_1 \quad \text{Normieren!}$$

$$2.) \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2 | \vec{u}_1 \rangle \cdot \vec{u}_1$$

$$3.) \vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3 | \vec{u}_1 \rangle \cdot \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_3 | \vec{u}_2 \rangle \cdot \vec{u}_2$$

Komplexe Zahlen

$$|z - z_0| = r \rightarrow \text{Kreis } M: z_0 \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 1$$

$$|z - z_0| = |z - z_1| \rightarrow \text{Gerade } \rightarrow z = x + yi$$

Skalarprodukt Betrag:

$$\langle 3\vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle \quad |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$= 3 \langle \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \rangle$$

$$= 3 \langle \vec{u}_1 | \vec{v}_2 \rangle$$

Mittelpunkt einer Strecke:

$$\vec{m}: \vec{OQ} + \frac{1}{2} \vec{QR}$$

$$\text{Rechtsystem: } \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 1$$

$$\text{oder em } \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$$

Komplexe Zahlen

$$z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bar{z} = a - bi \quad \text{komplex konjugierte Form}$$

$$\text{Exponentialform: } z = |z| e^{i\varphi} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\text{Polarform: } z = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\varphi = \arg(z) \quad z = (1+i)(1-\sqrt{3}i) \tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

$$\arg(z) = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\text{Wurzel: } w_i = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right) \quad L \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{z}}{2} + \frac{\vec{z}}{2} \quad z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad \bar{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$$z \cdot \bar{z}' = |z| \cdot |z'| \cdot \cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} (\cos(\varphi - \alpha) + i \sin(\varphi - \alpha)) \quad \text{Winkel}$$

$$\text{Potenzieren: Betrag potenzieren, multiplizieren}$$

$$\text{Argument zugeordnet komplexe Zahl:}$$

$$w = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \rightarrow \arg(w) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \arg(z_3)$$

$$z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 \rightarrow \arg(z_4) + \arg(z_5) + \arg(z_6)$$

Matrizen

$$A^T: \text{an Hauptdiagonale gespiegelt}$$

$$\text{Inverse: } \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \det = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\text{Matrix nur invertierbar wenn } \det \neq 0$$

$$\operatorname{Sp}(A) = \text{Summe Eigenwerte}$$

$$\det(A) = \text{Produkt der Eigenwerte}$$

$$\text{Diagonalisierbar wenn: } R^{2 \times 5}$$

$$\text{quadratisch}$$

$$\text{geometrische } d_\lambda (\dim(E_\lambda)) =$$

$$\text{algebraische Vielfachheit } e_\lambda (\text{Anzahl})$$

$$\text{symmetrisch } A^T = A$$

$$\text{hermitesche } A = (\bar{A})^T \quad c \text{ f. } B \text{ (Matrix)}$$

$$\text{Inverse: - rechteinverse existiert bei vollem Zeilenrang} \rightarrow \text{surjektiv}$$

$$\text{- linkeinverse existiert bei vollem Spaltenrang} \rightarrow \text{injektiv}$$

$$\text{Orthogonal: } A^{-1} = A^T \quad A \cdot A^T = E$$

$$\text{Definitheit:}$$

$$\text{alle } \lambda > 0 \rightarrow \text{positiv definit}$$

$$\text{alle } \lambda \geq 0 \rightarrow \text{positiv semidefinit}$$

$$\text{alle } \lambda < 0 \rightarrow \text{negativ definit}$$

$$\text{alle } \lambda \leq 0 \rightarrow \text{negativ semidefinit}$$

$$\text{Sowohl positive + negative } \lambda \rightarrow \text{indefinit}$$

$$\text{Sattelpunkt}$$

$$\det(A^2) = \text{Lsg. hat } z \text{ nicht } A$$

$$\det(2A) = 2^n \det(A) \quad n = \text{Zeilenanzahl}$$

$$\det(A+B) = \text{erst addieren}$$

$$\det(2B^{-1}) = \det(2E) \cdot \det(B)$$

Determinanten

$$\text{große Matrizen } \begin{pmatrix} a & b & \dots \\ c & d & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{bei Dreiecksmatrizen: } \det = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{Produkt d. Hauptdiagonalen}$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \det(A^2) = (\det(A))^2$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \det(\mu A) = \mu^n \cdot \det(A)$$

$$A = F^{-1} D F \quad \det \text{ regulär: } \det A \neq 0$$

$$\det \text{ singular: } \det A = 0$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \text{Vektoren linear abhängig}$$

$$\text{Matrix hat nicht vollen Rang}$$

$$\hookrightarrow \det(A) = 0 \hookrightarrow \text{an } E \cup W \lambda = 0$$

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \text{Vektoren linear unabhängig}$$

$$\rightarrow \text{homogenes LGS eindeutig lösbar } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kern einer Matrix

$$\text{homogenes LGS lösen} \rightarrow \text{LGS ist Kern}$$

$$\text{Wenn einzige Lösung die triviale LGS:}$$

$$\text{Kern} = \{0\} \rightarrow \dim \text{Kern} = 0$$

$$\dim \text{Kern} = \text{Anzahl der Spaltenvektoren im Kern} \quad (n - \operatorname{Rang}(A))$$

$$\det(A) \neq 0 \rightarrow \text{Kern}(A) = \{0\}$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow \text{Kern}(A) \text{ nicht trivial}$$

Bild einer Matrix

$$\text{Menge aller Objekte, die getroffen werden können}$$

$$\text{hat } Ax = \vec{v} \text{ eine Lösung, liegt } \vec{v} \text{ im Bild}$$

$$\dim \text{Bild} = \operatorname{Rang} \text{ der Matrix}$$

$$\text{Basis = Vektoren in d. L.u.}$$

Dimensionsformel:

$$\dim(V) = \dim \text{Kern}(\varphi) + \dim \text{Bild}(\varphi)$$

$$\text{Injektivität und Surjektivität}$$

$$\hookrightarrow \text{für } a \neq b \text{ gilt } f(a) \neq f(b)$$

$$\hookrightarrow \text{pro } y \text{wert höchstens ein } x \text{-wert}$$

$$\text{Jeder } y \text{-wert wird getroffen (auch Zielbereich)}$$

$$\text{Bei linearen Abb: } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: v \rightarrow Av$$

$$\text{Injektiv: } \dim \text{Kern}(A) = 0$$

$$\text{Surjektiv: } \dim \text{Bild}(A) = m, z = s - \dim \text{Kern}$$

$$\text{bijektiv: } m = n \text{ und } \dim \text{Kern} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ falls } y = f(x) \text{ für jedes } y \text{ im } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \text{ und } x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{nach Variablen auflösen: } x \in \mathbb{R}^n$$

$$z, B \quad f(z) = \frac{1}{z-7} \rightarrow z = \frac{1}{y} + 7 \rightarrow \text{injektiv}$$

$$\text{nicht surjektiv}$$

Drehungen + Spiegelungen

$$\text{Drehmatrix (eigentlich orthogonal)}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1$$

$$\hookrightarrow \text{Drehwinkel } \varphi$$

$$\text{Spiegelmatrix (ungerade o.)}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \det(A) = -1$$

$$\hookrightarrow \text{Winkel zwischen } x_1\text{-Achse und Spiegelachse } \frac{1}{2} \varphi$$

$$\cos(\beta) = \frac{\operatorname{Sp}(A) - 1}{2} \quad \varphi(x) = x$$

$$\text{Drehachse: Fixpunktgleichung}$$

$$(A - E) \cdot v = 0 \text{ bzw. } (A - E)v = -t$$

$$= \text{Fixpunktmenge}$$

Lineare Abbildung

$$Eid_B = \text{Basis abschreiben}$$

$$Bid_E = \text{Inverse}$$

$$Bid_B = E \quad cid_B = cid_E \cdot id_B$$

$$B^{\alpha} B = Bid_E \cdot E^{\alpha} E \cdot id_B$$

$$B^{\alpha} E = Bid_E \cdot E^{\alpha} E$$

$$C \varphi B = (C(\varphi(b_1)) \dots C(\varphi(b_n)))$$

$$E(\beta \circ \alpha)_B = E \beta_E \cdot E^{\alpha}_B$$

$$E^{\alpha}(A) = E^{\alpha} B \cdot B A$$

Affine Abbildung

$$\alpha(v) = Av + t \quad A = \text{linearer Anteil}$$

$$t = \text{Translation } A$$

$$\hookrightarrow \text{bijektiv: invertierbar (voller Rang, } \det(\text{linear}) \neq 0)$$

Kotrasfo

$$E^k_F: F_V \rightarrow E_V: F_V V + p$$

$$F^k_E: E_V \rightarrow F_V: F^{-1}(E_V - p)$$

$$a^k_F = G^{-1}(F_V V + p - q)$$

$$F \circ F: F_V \mapsto F(a(v))$$

$$= F^{-1} A F_V + F^{-1}(A p - p + t)$$

$$a^k_F(x) = A_F x + t = G x$$

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \neq \dim \mathbb{R}^n$$

Eigenwerte + Vektoren

λ ist Eigenwert, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$
jede Matrix besitzt mind. 1. Eigenwert
charakteristisches Polynom:
 $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$

bei Dreiecksmatrizen = Werte auf Hauptdiagonalen

$$\lambda_1 = a + bi \quad \lambda_2 = a - bi$$

wenn Matrix nicht vollen Rang hat, ist ein EW $\lambda = 0$

algebraische $\forall x_i = n$

geometrische $V = \dim(E_\lambda) = d_\lambda = \text{Rang}$

Es gilt $1 \leq d_\lambda \leq n$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$V\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Eigenraum $V(\lambda) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$

die Menge aller EV's $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$

Mehrere EV zum gleichen EV müssen orthogonalisiert werden!

$$A^{100} = (TDT^{-1})^{100} = T D^{100} T^{-1}$$

Potenzreihen

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?
Für alle reellen x im Inneren des Konvergenzintervalls u. d. h. für $x \in (a, b)$ absolut konvergiert, für alle x außerhalb divergiert

Komplexe Randpunkte

$$|z - z_0| = \rho \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad |a_n| = |a_n| |z - z_0|^n = |a_n| \rho^n$$

$$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 3\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 3\}$$

Inverse Abbildung: $p(z) \rightarrow p(k+i)$

$$f^{-1} \circ f(p(z)) = f^{-1}(p(z-i)) = p(z-i+i) = p(z)$$

$$(f \circ f^{-1})(p(z)) = f(p(z+i)) = p(z+i-i) = p(z)$$

Quadraturen

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + 2a^T x + c = 0\}$$

$$A_{\text{ew}} = \begin{pmatrix} C & a^T \\ a & A \end{pmatrix}$$

Typ:

$r_{\text{ew}} = r = \text{Rg}(A) \rightarrow$ hegelige Quadrik

$r_{\text{ew}} = r + 1 \rightarrow$ Mittelpunktsquadratik

$r_{\text{ew}} = r + 2 \rightarrow$ parabolische Quadrik

Euklidische Normalform

Hauptachsentransformationen:

① Eigenwerte bestimmen, Diagonalmatrix mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ falls $\lambda = 0$ als letztes Eintrag

② Eigenvektoren berechnen und normiert in F eintragen
 $\rightarrow F = (v_1, v_2) \rightarrow \det$ muss ± 1 sein

③ Transformation: $x = Fy$
 $x^T A x + 2a^T x + c = y^T P y + 2(F^T a)^T y + c = 0$

$F^T a$ berechnen + einsetzen:

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} F^T a \end{pmatrix} : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}} \right) \neq \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}}$$

④ Verschiebung gegen linear term quadratisch ergänzen:

$$-2(y_1^2 + 4y_2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2) - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 8 \cdot (by_2)^2 + c = 0$$

$$\text{substituieren zu: } z_1 = a + y_1$$

$$z_2 = b + y_2$$

Es muss gelten $c = 1$!

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + 1 = 0 \quad (\text{abhängig v. Gestalt})$$

Falls noch lineare Terme übrig sind:

• so multiplizieren, linearer Term z als Vorfaktor
 $\rightarrow$ ausklammern (y -Koordinate des Ursprungs kann abgezogen werden)

$$z_1^2 - z_2^2 + 2z_3 - 4 = 0 \quad z = w + j$$

$$\underbrace{z_1}_{w_1}^2 - \underbrace{z_2}_{w_2}^2 + \underbrace{2(z_3 - 2)}_{w_3} = 0 \Rightarrow w_1^2 - w_2^2 + 2w_3 = 0$$

Verschiebung des Ursprungs: $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $z_1 = y_1 + 2$ $z_2 = y_2 - 1$

$$EP = FEP$$

$$G = (EP, F) \Rightarrow \text{neue u.a.}$$

Matrizen aufstellen:

$$E^k a(a) = F a v + e^P$$

$$a h e(e) = F^T e v - e^P$$

affine Normalform: Vorfaktoren weglassen, Restangeordnen

Normalform versch. Quadraturen

(A) Drei Variablen: $\mathbb{R}^3$

I hegelige Quadraturen

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + \frac{x_3^2}{h_3^2} = 0 \Rightarrow \text{Punkt}$$

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} - \frac{x_3^2}{h_3^2} = 0 \Rightarrow \text{Doppelkegel}$$

II Mittelpunktsquadraturen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{kein Punkt}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{zweischaliges Hyperboloid}$$

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{einschaliges Hyperboloid}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{Ellipsoid}$$

III parabolische Quadraturen

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + 2x_3 = 0 \rightarrow \text{elliptischer Paraboloid}$$

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} - \frac{x_2^2}{h_2^2} + 2x_3 = 0 \rightarrow \text{hyperbolischer Paraboloid}$$

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} - \frac{x_2^2}{h_2^2} = 0 \rightarrow \text{hyperbolische Ebenen}$$

(B) weniger als 3 Variablen $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$

I hegelige Quadraturen

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow \text{Punkt / Gerade}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow \text{schneidendes Geradenpaar}$$

$$x_1^2 = 0 \rightarrow \text{Doppelgerade / Doppelsebene}$$

II Mittelpunktsquadraturen

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{kein Punkt / keine Gerade}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{Hyperbel / hyperbolischer Zylinder}$$

$$-x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{Ellipse / elliptischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{kein Punkt / keine Gerade}$$

$$-x_1^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{paralleles Geradenpaar / Ebenenpaar}$$

III parabolische Quadraturen

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

$$x_1^2 + 2x_2 = 0 \rightarrow \text{Parabel / parabolischer Zylinder}$$

Nullstellenmenge:
Sattelpunkt: „In jeder Umgebung von P_1 liegen Punkte mit positivem negativem Funktionswert“
Der Bereich B , der P_1 enthält, ist beschränkt und abgeschlossen (kompakt), also kompakt. f ist stetig, nimmt auf B also ihr Maximum an. Das Maximum muss in Inneren von B angenommen werden, da f auf der Rand von B kleiner ist. Die einzige kritische Stelle im Inneren von B ist P_2 , also liegt dort ein lok. Maximum an.

„Extrema“ $\rightarrow$ Sattelpunkte nicht

Extrema mit NB

• lokale Extrema

$f(P_2) = 2$ Sattel

$f(P_1) = 1$ lok. Min

$f(P_3) = 0$ lok. Min

$f(P_4) = 0$ lok. Min

$f(P_5) = 0$ lok. Min

$f(P_6) = 0$ lok. Min

$f(P_7) = 0$ lok. Min

$f(P_8) = 0$ lok. Min

$f(P_9) = 0$ lok. Min

$f(P_{10}) = 0$ lok. Min

$f(P_{11}) = 0$ lok. Min

$f(P_{12}) = 0$ lok. Min

$f(P_{13}) = 0$ lok. Min

$f(P_{14}) = 0$ lok. Min

$f(P_{15}) = 0$ lok. Min

$f(P_{16}) = 0$ lok. Min

$f(P_{17}) = 0$ lok. Min

$f(P_{18}) = 0$ lok. Min

$f(P_{19}) = 0$ lok. Min

$f(P_{20}) = 0$ lok. Min

$f(P_{21}) = 0$ lok. Min

$f(P_{22}) = 0$ lok. Min

Vektorfelder

$$\text{rot } f(x,y) = f_2'(x) - f_1'(y)$$

$$\text{rot } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_3'(y) - f_2'(z) \\ f_1'(z) - f_3'(x) \\ f_2'(x) - f_1'(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{f} = f_1'(x_1) + f_2'(x_2) + f_3'(x_3) \rightarrow \text{Jahobi}$$

Jahobi-Matrix

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} & \frac{df_3}{dz} \end{pmatrix}$$

$$\text{Verketting: } h(x) = (g \circ f)(x)$$

$$Jg(f(x_1, x_2, x_3)) = Jg(x_1, x_2, x_3) \cdot Jf(x) = Jg \circ Jf$$

Bedingung für Potential:

- Gesamt einfach zusammenhängend
- $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
- $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ - Jahobi-symmetrisch

$$\text{Potential } (2x \ln(y+1) + \frac{x^2}{y+1} + \delta z^2 + 16yz + \sin(z))$$

$$U(x,y,z) = \int 2x \ln(y+1) = x^2 \ln(y+1) + c_1(y,z)$$

$$\text{NR: } \frac{d}{dy} U(x,y,z) = \frac{x^2}{y+1} + \frac{d}{dy} c_1(y,z) = \frac{x^2}{y+1} + \delta z^2$$

$$c_1(y,z) = \delta z^2 y + c_2(z)$$

$$\text{NR: } \frac{d}{dz} U(x,y,z) = y \delta z + c_2'(z) = 16yz + \sin(z)$$

$$c_2(z) = -\cos(z) + c$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2 \ln(y+1) + \delta z^2 y - \cos(z) + c$$

Parametrisierung

Reguläre P. $C'(t)$ darf nie 0 werden
Spezielle Kurven:

• Strecke $\vec{PR}: k(t) = P_1 + t \cdot (P_2 - P_1) \quad t \in [0,1]$

• Funktion $y = f(x)$

$$k(t) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [t_0, t_1]$$

• Kreis in $\mathbb{R}^2$ $x^2 + y^2 = R^2$

$$k(t) = \begin{pmatrix} m_1 + R \cos(t) \\ m_2 + R \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

• Ellipse in $\mathbb{R}^2$ $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$

$$k(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$C: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Kurvenintegrale

$$\int_a^b g(x) \cdot dx = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) dt$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = U(C(b)) - U(C(a))$$

$$\int_a^b \text{grad } f(x) \cdot dx = f(b) - f(a)$$

Länge der Kurve:

$$\int_a^b ds = \int_a^b |C'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)} dt$$

Ausfluss & Zirkulation

$$A(g,h) = \int_a^b g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} dt$$

$$Z(g,h) = \int_a^b g(C(t)) \cdot C'(t) dt$$

Verketting:

$$f \circ C = f(C(t))$$

„Stetige Funktion auf kompaktem Intervall“ $\rightarrow$ nimmt Minimum/Maximum an

Uneigentliche Integrale

$$\int \frac{1}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{b} \int \frac{1}{(\frac{a}{b}x^2 + 1)} dx$$

$$\text{Substitution: } \sqrt{\frac{a}{b}} x = u$$

$$\int \frac{x}{(ax^2 + b)^m} dx \quad \text{Subst. } ax^2 + b = u$$

Geschlossene Form $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + \int f'(x)$$

$$f'(x) = \int f''(x)$$

$$\cos(2x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n!} x^{4n}$$

$$-4x \sin(2x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-4)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1}$$

Lösungen von LGS

Werte Lösung: $\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b)$

unendlich viele Lsg. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$

genau 1 Lösung: $\text{rg}(A) = n \rightarrow \text{Vektor}$

Ergänzung Ableitung:

$$x^x = e^{x \ln(x)}$$

$$(x^x)' = e^{x \ln(x)} (\ln(x) + 1)$$

$$= x^x (\ln(x) + 1)$$

$$f'(1/x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Induktion

Zu zeigen ist die Aussage $A(n)$:
Beweis durch vollständige Induktion

(IA) $n=0$ oder $n=1$ - zwei Stellen!

(IH) Annahme: $A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$

(IS) $A(n+1)$: „eingesetzt“ ist zu zeigen

Es ist:

$$\text{Ansätze: } \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1}$$

$$\text{Höherer Ableitung: } f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)$$

$$\text{Matrixpotenzen: } A^{n+1} = A \cdot A^n$$

Funktionsgrenzwerte

L'Hospital:

$$a) \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot g(x) \text{ mit } \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\pm\infty}{0}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\ln(g(x))} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{\ln(g(x))}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Umkehrfunktion $x=3 \quad f^{-1}(3)=1$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(1)}$$

Ableitung partiell:

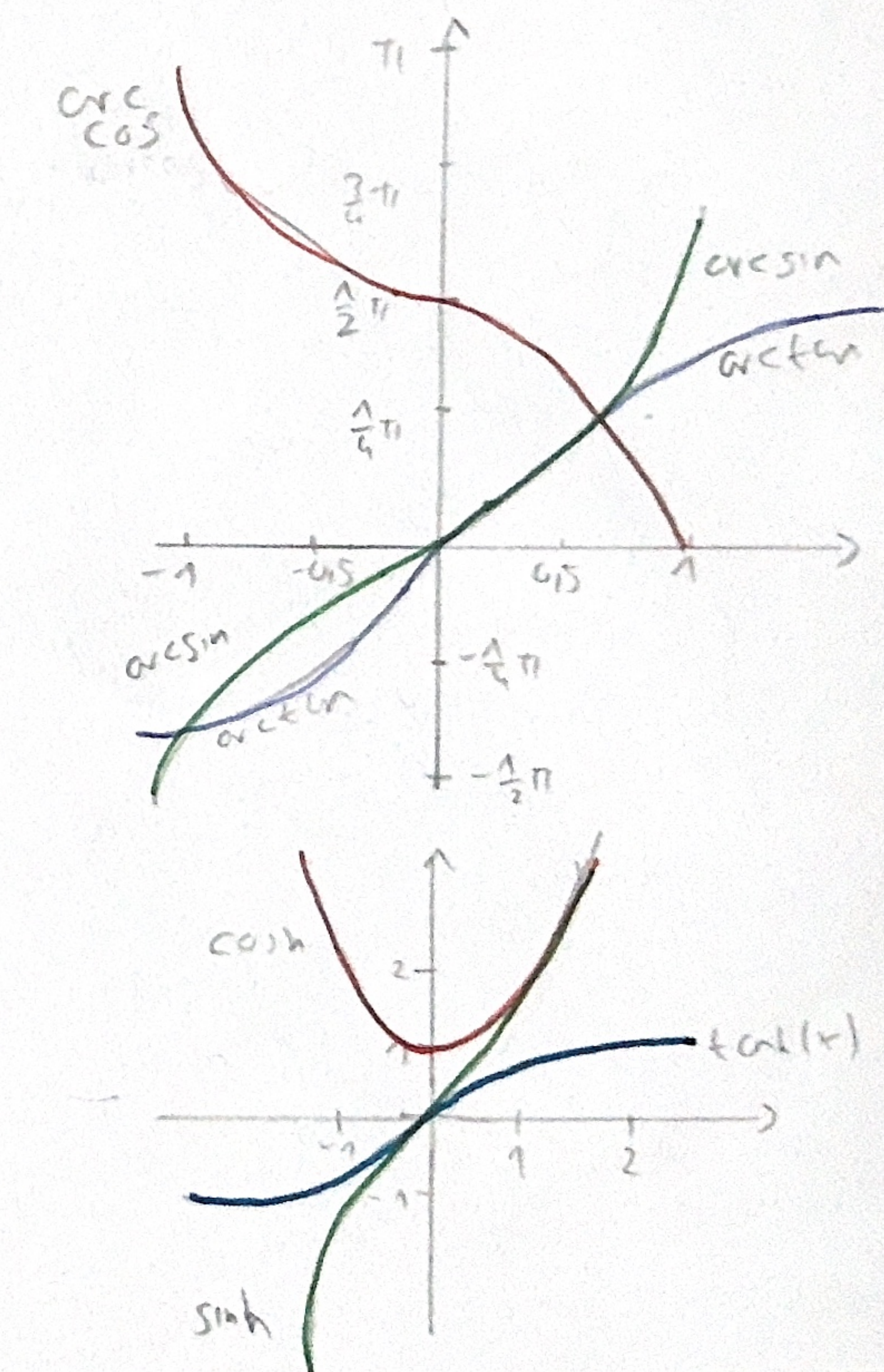
$$f_x(x,y) \dots$$

$$f_{xx}(x,y) \dots$$

Rekursion definieren Folgen

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$\begin{aligned} a_{3(h+1)+1} &= a_{3(h+1)} - a_{3(h+1)-1} \\ &= a_{3(h+1)-1} - a_{3(h+1)-2} - a_{3(h+1)-1} \\ &= -a_{3(h+1)-2} \\ &= -a_{3h+1} \stackrel{(IH)}{=} -(-1)^h a_1 = (-1)^{h+1} a_1 \end{aligned}$$



	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0