

Bog	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{6}$	2π
Deg	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	360°
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0							

375 1372 GR 10
Komplexe Zahlen
 $z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$
 $w = \sqrt[n]{|z|} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{n} + i \frac{2\pi k}{n}\right)$
Mitteln
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \rightarrow$ Reihe divergiert

Folgen
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \frac{1}{e}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1-\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e}$
 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Reihen
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$ mit $|x| < 1$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Konvergenzkriterien
Quotientenkriterium
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \rightarrow$ konv
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \rightarrow$ unklar
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \rightarrow$ div
Wurzel
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \rightarrow$ konv
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightarrow$ unklar
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \rightarrow$ div
Leibniz
 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert
 $\hookrightarrow a_n$ Nullfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
Integralvergleich
 $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ $\int_p^{\infty} f(x) dx$ endlich ist
 $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ $\int_p^{\infty} f(x) dx$ unendlich ist
Potenzreihen
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
 $|x-x_0| < r \Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert
 $|x-x_0| > r \Rightarrow$ divergiert
 $|x-x_0| = r \Rightarrow$ x-Werte prüfen
 $p = \frac{1}{a}$
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} = p = \infty$

Minorante
 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ existiert und konvergiert
 gilt: $|a_n| \geq b_n$
Majorante
 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ existiert und konvergiert
 gilt: $|a_n| \leq b_n$
Tangente
 $t_n: f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$
 $\ln(2x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

Sinh(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ **Cosh(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$**
Additionstheoreme
 $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
 $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
 $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
 $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$
 $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

Ableitungen
 Quotient: $\frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $\frac{u'}{u} = \frac{1}{u} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$
 $\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$
 $b \rightarrow \ln(b) \cdot b^x$
 $\tan(x) \rightarrow \frac{1}{\cos^2(x)}$
 $\arctan(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$
 $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$
 $(-)\frac{1}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arcsinh}(x)}{\operatorname{arcosh}(x)}$
 $\frac{x}{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

Differenzier
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)$
L'Hospital
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Umkehrfunktion
 $P(4,1) \quad f^{-1}(4) = \frac{1}{f'(1)}$
Mehrdimensional:
 $T_n(f, \vec{y}, \vec{y}_0) = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} H f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$

Integrale
 $x^a \rightarrow \frac{1}{a+1} x^{a+1}$
 $\sinh \rightarrow \cosh$
 $\frac{1}{x} \rightarrow \ln|x|$
 $\frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \ln|\sin(x)|$
 $\frac{1}{c-x^2} \rightarrow \frac{-\ln\left(\frac{x-\sqrt{c}}{x+\sqrt{c}}\right)}{2\sqrt{c}}$
 $\frac{1}{x^2+a} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$
 $\frac{1}{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

Partielle Integration:
 $\int f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)] - \int f(x) \cdot g'(x) dx$
 $\int e^x \cdot 4x dx$

Hesse Matrix
 $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$
 $\det H_f < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt
 $\det H_f > 0 + \operatorname{Sp}(H_f) > 0 \rightarrow$ lok. Min
 $\det H_f > 0 + \operatorname{Sp}(H_f) < 0 \rightarrow$ lok. Max
Jacobi Matrix
 $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \\ \frac{df_3}{dx} & \frac{df_3}{dy} & \frac{df_3}{dz} \end{pmatrix}$
 $J(g \circ f) = J(g) \cdot J(f)$

Partialbruchzerlegung
 einfache: $\frac{p(x)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$
 mehrfache: $\frac{p(x)}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$
 komplexe: $\frac{p(x)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

Grenzwerte:
 $\sqrt[n]{a^n + b^n - c^n} = \frac{b}{2c}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2)}{x-2} = \frac{1}{-0} = -\infty$

Kritische Punkte (Ableitung mehrdimensionaler)
 $\operatorname{grad} f(\vec{y}) = (x-2)(y-2)(y+2) \Rightarrow$ NS: $x=2, y=2$
 $H f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & y^2-4 \\ (y^2-4) & 2xy-4y \end{pmatrix}$
 $\rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Extrema NB
Lagrange Funktionen:
 $L(x, y, z) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
 $\hookrightarrow$ Ableitung nach $x, y, \lambda = 0$
 $x=0$ ist Nebenbedingung
 LGS (oben: kritische Punkte)
 LGS (unten: Nebenbedingung)
 Punkte Funktionswerte annehmen
 $d^2 = f(A, B)$
Extremstellen:
 $f''(x) > 0 \Rightarrow$ TP
 $f''(x) < 0 \Rightarrow$ HP
 $f''(x) = 0 \Rightarrow$ WP
 $f'''(x) > 0$ (Rechtskurve)
 $f'''(x) < 0$ (Links Kurve)

Tangentialebene:
 $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$
Lineare Approximation:
 $f(x) = f(a) + Jf(a)(x-a) + O(|x-a|^2)$
 $2x - 2xy = 0 \Rightarrow x = 1$
 $2y - 33x = 0 \Rightarrow y = 16.5$
 $y - x^2 = 0$
 Dsp

Stammfunktionen von Reihen:
 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$
Potenzreihen:
 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
 $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
 $a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$
Logarithmus:
 $\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$
 $\ln(u^v) = v \ln(u)$
 $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$
 $\ln \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \ln(u)$

Potentialtheorie $\text{rot } f(x,y) = f_2'(x) - f_1'(y)$

Rotation: $\text{rot } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_3'(y) - f_2'(z) \\ f_1'(z) - f_3'(x) \\ f_2'(x) - f_1'(y) \end{pmatrix}$

↳ für welchen Parameter Potential?

Rotation = 0

Potential U

$U(x,y,z) =$

$$\begin{pmatrix} 2x \ln(y+1) \\ \frac{x^2}{y+1} + 8z^2 \\ x^2yz + \sin(z) \end{pmatrix} \quad \alpha = 4$$

$$\text{div } \vec{F} = F_1'(x_1) + F_2'(x_2) + F_3'(x_3)$$

$$\int 2x \ln(y+1) dx = x^2 \ln(y+1) + C(y,z)$$

NR: $f_y = \frac{x^2}{y+1} + C_y(y,z) = \frac{x^2}{y+1} + 16z$ | $\int \dots dy$

$$C(y,z) = 8z^2y + C(z)$$

NR: $f_z = y16z + C(z) = 16yz + \sin(z)$ | $\int dz$

$$C(z) = -\cos(z) + C$$

$$\Rightarrow U(x,y,z) = x^2 \ln(y+1) + 8z^2y - \cos(z)$$

Ableitungs:

$$f(x) = 2\cos(\pi\sqrt{x-2})$$

$$f'(x) = -\frac{\sin(\pi\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \cdot \pi$$

$$f''(x) = \frac{-\cos(\pi\sqrt{x-2}) \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{x-2} + \sin(\pi\sqrt{x-2}) \cdot \pi}{2\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{\pi(-\pi\sqrt{x-2}\cos(\pi\sqrt{x-2}) + \sin(\pi\sqrt{x-2}))}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bsp. Integral

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4x+5} = \int \frac{2x-1}{(x+2)^2+1} = \int \frac{2x+4}{(x+2)^2+1} + \int \frac{-5}{(x+2)^2+1}$$

$$\int \frac{p'}{p} dx = \int \frac{1}{p} dp$$

$$= \ln(|x^2+4x+5|) - 5 \arctan(x+2)$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4x+5} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x+2)^2}$$

$$\int \frac{2}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} = 2\ln(|x+2|) + \frac{5}{x+2}$$

Bsp. doppelte partielle Integration
 $\cos(x) \cosh(x)$

Polynomdivision

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} - \text{grad } d \quad d \geq n$$

$$q(x) = a(x)p(x) + q_1(x)$$

Grad $d-n$ Grad r

$$\Rightarrow f(x) = a(x) + \frac{q_1(x)}{p(x)}$$

Bsp. $\frac{3x^2+4x-5}{x^2+x-6} = 3 + \frac{x+13}{x^2+x-6}$

(Nenner zerlegen)

Kurvenintegrale:

$(x) \rightarrow$ Kurve k mit Parametrisierung

$$[-\ln(4), \ln(4)] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \rightarrow (\cosh(t), \sinh(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C'(t) = \frac{d}{dt} (\cosh t) = (\sinh t) \quad [0,1] \rightarrow t \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 4t \end{pmatrix}$$

Länge der Kurve: $\int_{t_0}^{t_1} |C'(t)| dt$

$$\Rightarrow L(k) = \int_{-\ln(4)}^{\ln(4)} \cosh(t) dt$$

$\int f(x) \cdot dx =$ obere Grenze in Potential U
- untere Grenze in Potential U
" in Funktion f

Nulstellenmenge Niveaulinie

↳ geg. Gleichung 0 setzen, mehrere Lsg.
Geraden in UOS einsetzen

z.B. $xy(y+x-3)=0 \rightarrow x=0, y=0, y=-x+3$
Testwert in f einsetzen um U_k an diesem Punkt herauszufinden, in Nachborgebietern gezeichnet, U_k

Wichtige Stellen: Gradient = 0

Tangente an Niveaulinie: geg. Punkt in Gradient einsetzen in $a+b$ zu berechnen, dann mit $ax+by+c=0$ berechnen

Bsp. Konvergenzradius:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}-3^n}{2^n} (z+4i)^n \quad \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{4^{n+1}-3^{n+1}}{4^n-3^n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim \frac{4^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow \rho = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \frac{4i+5n}{(n-1)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad \rho = 2$$

Bsp. Folgen + Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi}{4^{2n} (2n)!} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 5^k} \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k \cdot 5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{5^{k+1}}$$

=> Geschlossene Darstellung:

$$\frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5-x}$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(a) da = \int_0^x \frac{1}{5-a} = -[\ln|5-a|]_0^x$$

$$x_0=0 \Rightarrow f(0)=0 \quad f'(x) = f'(x) = \frac{1}{5-x} = \ln\left(\frac{5}{5-x}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{4n} = \cos(2x^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-4)^n}{(2n-1)!} x^{4n-1} = -4x \sin(2x^2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{2}{1!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 3 - e$$

$$\sum \frac{(5h+5)5^h}{(h+1)!} = \frac{5(h+1)5^h}{(h+1) \cdot h!} = 5e^5$$

Teleskopsumme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{0}$$