

Kurzlösung: Übungsaufgaben zur Zeitbereichsmethodik

Übungsaufgabe 1.1 Entkopplung nach Falb/Wolovich

Für das MIMO-System Σ_γ mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ soll eine entkoppelnde Zustandsrückführung der Form $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t)$ entwickelt werden.

$$\Sigma_\gamma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6\gamma - 2 & -4\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), & t > 0 \quad \text{AB: } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

a) Pole: $s_1 = -2, s_2 = -4\gamma \rightarrow \begin{cases} \gamma > 0 & \text{asymptotisch stabil} \\ \gamma = 0 & \text{grenzstabil} \\ \gamma < 0 & \text{instabil} \end{cases}$

b)
$$\mathbf{G}_{wy}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-2\gamma+2}{(s+4\gamma)(s+2)} & \frac{s-4\gamma+2}{(s+4\gamma)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{2}{s+2} \end{pmatrix}$$

E/A-Kopplung vorhanden, da die ÜTM $\mathbf{G}_{wy}(s)$ keine Diagonalmatrix ist. Für kein $\gamma \in \mathbb{R}$ ist eine Entkopplung möglich (insb. ist die ÜTF $U_1(s) \rightarrow Y_2(s)$ nicht von γ abhängig).

c) Die Kalman-Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 6\gamma - 2 & 8\gamma - 4 \end{pmatrix}$$

hat vollen Spaltenrang $\text{rg}(\mathbf{P}) = 2 = n$ für alle $\gamma \in \mathbb{R}$. (Schon die ersten beiden Spalten von $\mathbf{P}$ sind linear unabhängig).

d) $r_1 = 1$, da $\mathbf{c}_1^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$
 $r_2 = 1$, da $\mathbf{c}_2^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$

$\rightarrow \mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(\mathbf{D}^*) = 1 \neq 0$, d.h. unabhängig von γ entkoppelbar.

e) Sollpolynome: $N_1(s) = N_2(s) = s + \gamma$. $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -5\gamma & 3\gamma \\ \gamma - 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

f) Geschlossener Kreis: $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{w}(t)$

$\rightarrow \mathbf{G}_{wy}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{s+\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{s+\gamma} \end{pmatrix}$ hat nun Diagonalform.

Übungsaufgabe 1.2 Reduzierter Beobachter

In dieser Aufgabe soll für das folgende dynamische System ein Zustandsbeobachter mit reduzierter Ordnung ausgelegt werden:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad t > 0 \quad \text{AB: } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- a) Das charakteristische Polynom $p_A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 2s^2 + 3s + 2$ erfüllt die Vorzeichenbedingung sowie die Beiwertbedingung für Systeme 3. Ordnung.
→ asymptotisch stabiles Zeitverhalten

b) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, mit vollem Spaltenrang: $\text{rg}(\mathbf{Q}) = 3 = n \rightarrow$ System beobachtbar

- c) Voraussetzung: $\mathbf{P}$ muss invertierbar sein. Wahl der ersten Zeile z.B.:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformierte Matrizen der sortierten DGL $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}u(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(t)$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- d) Beobachter-DGL: $\dot{\rho}(t) = -(4L_{11} + 3L_{12})\rho(t) - L_{11}u(t) + (L_{11} - L_{11}(4L_{11} + 3L_{12}) + 1, \quad L_{12} - L_{12}(4L_{11} + 3L_{12}) - 2)\mathbf{y}(t)$

Schätzung: $\hat{\mathbf{r}}(t) = \rho(t) + (L_{11}, L_{12})\mathbf{y}(t)$

- e) & f) $\lambda = -3 \rightarrow 4L_{11} + 3L_{12} = 3$, d.h. es verbleibt ein Freiheitsgrad. Für die Wahl $L_{11} = 0$ verschwindet die 'Matrix' B_ρ in der reduzierten Beobachter-DGL. Dann ergibt sich $L_{12} = 1$.

Rücktransformation in Originalkoordinaten gemäß: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \rho + \mathbf{L}\mathbf{y} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$:

DGL/AB: $\dot{\rho}(t) = -3 \rho(t) + \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \rho(0) = \rho_0$

Zustandsschätzung: $\hat{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_\rho} \rho(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}_\rho} \mathbf{y}(t)$

Übungsaufgabe 1.3 Folgeregelung und Störkompensation

Das System zweiter Ordnung mit dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}}_A \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_B u(t), \quad y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_C \mathbf{x}(t)$$

soll einer harmonischen Anregung folgen. Daher soll im Folgenden eine asymptotische Folgeregelung konstruiert werden.

- Charakteristisches Polynom: $p_{\text{ist}}(s) = s^2 - as - bc$. As. stabil für $a < 0$ und $bc < 0$, d.h. $b > 0 \vee c < 0$ oder $b > 0 \vee c < 0$ (Hurwitz).
- $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat für $b \neq 0$ vollen Rang $\text{rg}(\mathbf{P}) = 2$ ($\Leftrightarrow$ System steuerbar).
- $y(t) = (1 \ 0)\mathbf{x}(t) \neq f(u)$
 $\dot{y}(t) = (a \ b)\mathbf{x}(t) \neq f(u)$
 $\ddot{y}(t) = (a^2 + bc, \ ab)\mathbf{x}(t) + bu(t) \rightarrow$ Relativgrad $r = 2$ ($b \neq 0$)
- $u(v, \mathbf{x}) = \frac{1}{b}[v - (a^2 + bc, \ ab)\mathbf{x}]$ mit dem virtuellen Eingang $v(t) := \ddot{y}(t)$.
- Referenztrajektorie: $y_d(t) = \sigma \sin(\omega_0 t)$, $\dot{y}_d(t) = \omega_0 \sigma \cos(\omega_0 t)$, $\ddot{y}_d(t) = -\omega_0^2 \sigma \sin(\omega_0 t)$.
 Soll-DGL für Fehlergröße $\epsilon(t) = y_d(t) - y(t)$ gemäß $p_{\text{soll}}(s) = s^2 + 11s + 28$: mit $p_1 = 11$ und $p_0 = 28$:

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + p_1 \dot{\epsilon} + p_0 \epsilon = 0 & \rightarrow \underbrace{\ddot{y}}_v = \underbrace{\ddot{y}_d}_{\text{Vorsteuerung \&}} + \underbrace{p_1(\dot{y}_d - ax_1 - bx_2) + p_0(y_d - x_1)}_{\text{Stabilisierung des kompensierten Systems}} \\ \text{Originaleingang: } u(\mathbf{x}, y_d) &= \underbrace{\frac{\ddot{y}_d + p_1 \dot{y}_d + p_0 y_d}{b}}_{M(y_d) \text{ (dyn. Vorfilter)}} - \underbrace{\frac{1}{b} (a^2 + bc + p_1 a + p_0, \ ab + p_1 b) \mathbf{x}}_{R\mathbf{x} \text{ (Zustandsregler)}} \\ &\rightarrow M(y_d) = \frac{p_0 \sigma - \omega_0^2 \sigma}{b} \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0 p_1 \sigma}{b} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

- zusätzlicher Kompensationsterm: $u_z = -(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{E}z = -e_2 z$. Bedingung für exakte Kompensation liefert:

$$\mathbf{B}u_z + \mathbf{E}z \stackrel{!}{=} 0 : \begin{cases} e_1 z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{für } e_1 = 0 \text{ ist eine exakte Kompensation möglich}$$

- $u(t) = \frac{p_0 \sigma - \omega_0^2 \sigma}{b} \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0 p_1 \sigma}{b} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{b} (a^2 + bc + p_1 a + p_0, \ ab + p_1 b) \mathbf{x}(t) - e_2 z(t)$.