



Lösungsblatt zur Prüfung im Fach
Systemdynamische Grundlagen der Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín Sauer
Sommersemester 2023

am 14.08.2023, 12:00 – 13:30 Uhr

Punktetabelle

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	insgesamt
Punkte	30	9	12.5	8.5	9	5	6	10	90
erreicht									

Notentabelle

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen. In dieser Aufgabe werden keine Teilergebnisse oder Rechenwege bepunktet.

- a) Welche Eigenschaften besitzt das System $\cos(y(t)) + \sin(y(t)) = \cos(u(t))$? (1 Punkt)
- ☐ Linear
- ☒ Zeitinvariant
- b) Ein System besitze ausschließlich reelle Pole, die ungleich Null sind. Anhand des Bode-Diagramms kann die Stabilität des Systems eindeutig charakterisiert werden. (1 Punkt)
- ☒ Wahr
- ☐ Falsch
- c) Lineare, zeitinvariante Systeme besitzen keine Ruhelage. (1 Punkt)
- ☐ Wahr
- ☒ Falsch
- d) Die Anzahl der Eigenwerte eines linearen, zeitinvarianten Systems in Zustandsraumdarstellung ist größer gleich der Anzahl der Pole der zugehörigen vollständig gekürzten Übertragungsfunktion $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. (1 Punkt)
- ☒ Wahr
- ☐ Falsch
- e) Es gibt zu jeder Übertragungsfunktion unendlich viele Zustandsraumdarstellungen. (1 Punkt)
- ☒ Wahr
- ☐ Falsch
- f) Die Transitionsmatrix eines Systems mit Ordnung n hat die Dimension $n \times n$. (1 Punkt)
- ☒ Wahr
- ☐ Falsch

- g) Wenn ein lineares, zeitinvariantes System mit dem Eingangssignal $u_1(t)$ aus Abbildung 1 angeregt wird, konvergiert der Systemausgang y_1 gegen den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 2$. Gegen welchen Grenzwert konvergiert der Systemausgang $y_2(t)$ für das Eingangssignal $u_2(t)$ aus Abbildung 1? (2 Punkte)

Hinweis: Die Eingangssignale $u_i(t)$, $i = 1, 2$ verändern sich für $t > 4$ nicht mehr und bleiben konstant.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \boxed{4}$$

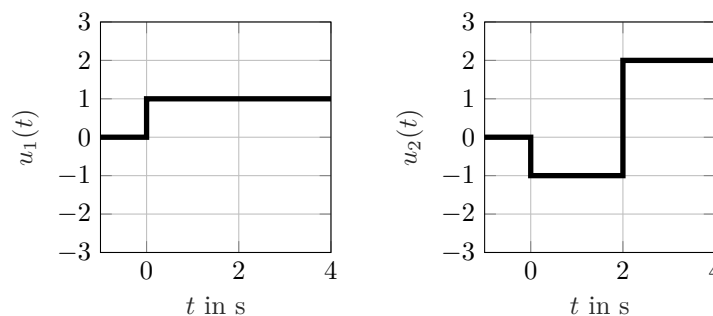


Abbildung 1: Eingangssignale $u_i(t)$ $i = 1, 2$

- h) Ist die folgende Übertragungsfunktion asymptotisch stabil? (2 Punkte)

$$G_1(s) = \frac{s + 2}{s^4 + 3s^3 + s^2 + s + 1}$$

☐ Ja ☒ Nein

- i) Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G_2(s) = \frac{15s^3 + 24s + 48}{s^3 + s^2 + s + 1}.$$

- (i) Welche Aussage trifft auf die Impulsantwort des Systems zu? (1 Punkt)

☒ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 0$ ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 15$ ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} g_2(t) = 48$

- (ii) Welche Aussage trifft auf die Sprungantwort des Systems zu? (1 Punkt)

☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 0$ ☐ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 15$ ☒ $\lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 48$

- j) Die Sprungantwort eines Systems $G_3(s)$ ist gegeben durch $h_3(t) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)$, $t > 0$. Berechnen Sie die Impulsantwort $g_3(t)$ des Systems. (1 Punkt)

$$g_3(t) = \boxed{g_3(t) = \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{4}}}$$

- k) Geben Sie die asymptotische Steigung der Amplitudengänge $\frac{dA_4(\omega)}{d\omega}$ und $\frac{dA_5(\omega)}{d\omega}$ in dB/Dek des Frequenzgangs der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_4(s) = \frac{3s(5s+1)}{(s+10)^3}e^{-8s} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_4(\omega)}{d\omega} = \boxed{-20 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

$$G_5(s) = \frac{\left(s - \frac{1}{3}\right)(s+5)}{s^2 - s + 1} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{dA_5(\omega)}{d\omega} = \boxed{0 \text{ dB Dek}^{-1}}$$

- l) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Phasengänge $\varphi_5(\omega)$ und $\varphi_6(\omega)$ der folgenden Übertragungsfunktion für $\omega \rightarrow \infty$ an. (2 Punkte)

$$G_5(s) = \frac{\left(s - \frac{1}{3}\right)(s+5)}{s^2 - s + 1} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_5(\omega) = \boxed{0^\circ}$$

$$G_6(s) = \frac{3s(5s+1)}{(s+10)^3} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_6(\omega) = \boxed{-90^\circ}$$

- m) Die Laplace-Transformierte der Ausgangsgleichung eines Systems lautet $Y(s) = X_1(s) + X_2(s)$. Darin wurden die Laplace-transformierten Zustandsgrößen $X_1(s)$ und $X_2(s)$ zu

$$X_1(s) = \frac{1}{s+4}X_2(s),$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+4}U(s)$$

in Abhängigkeit des Eingangs $U(s)$ gewählt. Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ des Systems an. (2 Punkte)

$$G(s) = \boxed{G(s) = \frac{s+5}{(s+4)^2}}$$

n) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

(i) In welcher Normalform ist das System angegeben? (1 Punkt)

☒ Regelungs-Normalform ☐ Kanonische Normalform ☐ Jordan-Normalform

(ii) Beurteilen Sie die Stabilität des Systems. (1 Punkt)

☒ asymptotisch stabil ☐ instabil ☐ grenzstabil

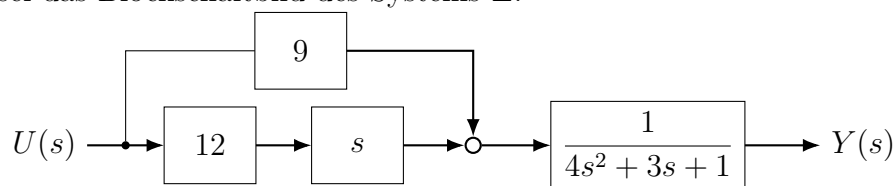
(iii) Existiert eine eindeutige Zustandstransformation $\tilde{\underline{x}} = T^{-1}\underline{x}$, um das System auf die Darstellung

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\underline{x}}} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, & \tilde{\underline{x}}(0) &= \tilde{\underline{x}}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \tilde{\underline{x}}.\end{aligned}$$

zu transformieren? (1 Punkt)

☐ Ja ☒ Nein

o) Gegeben sei das Blockschaltbild des Systems Σ :



(i) Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s)$ des Systems Σ an. (2 Punkte)

$$G(s) = \boxed{G(s) = \frac{12s+9}{4s^2+3s+1}}$$

(ii) Das System $\tilde{\Sigma}$ beschreibt das um eine Totzeit von 2 Sekunden erweiterte System Σ . Geben Sie die Übertragungsfunktion $\tilde{G}(s)$ des Systems $\tilde{\Sigma}$ in Abhängigkeit von $G(s)$ an. (1 Punkt)

$$\tilde{G}(s) = \boxed{\tilde{G}(s) = G(s)e^{-2s}}$$

(iii) Geben Sie den relativen Grad β des Systems Σ an. (1 Punkt)

☐ $\beta = 0$ ☒ $\beta = 1$ ☐ $\beta = 2$ ☐ $\beta = 3$

p) Ordnen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen ihren Impulsantworten (Abbildung 2) sowie Bode-Diagrammen (Abbildung 3) zu. (4 Punkte)

Übertragungsfunktion	Impulsantwort	Bode-Diagramm
$G_1(s) = \frac{s}{(s+0.5)(s-0.5)}$	D	A
$G_2(s) = \frac{10}{(s+2)(s+3)(s+1)}$	C	C
$G_3(s) = \frac{5}{3s^2 + 3s + 22}$	B	D
$G_4(s) = \frac{1}{(s+4)}e^{-2s}$	A	B

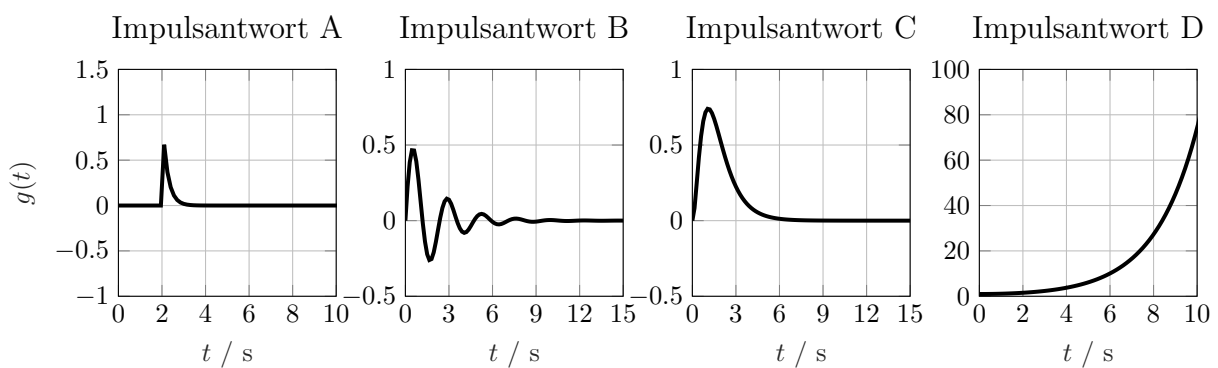


Abbildung 2: Impulsantworten A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

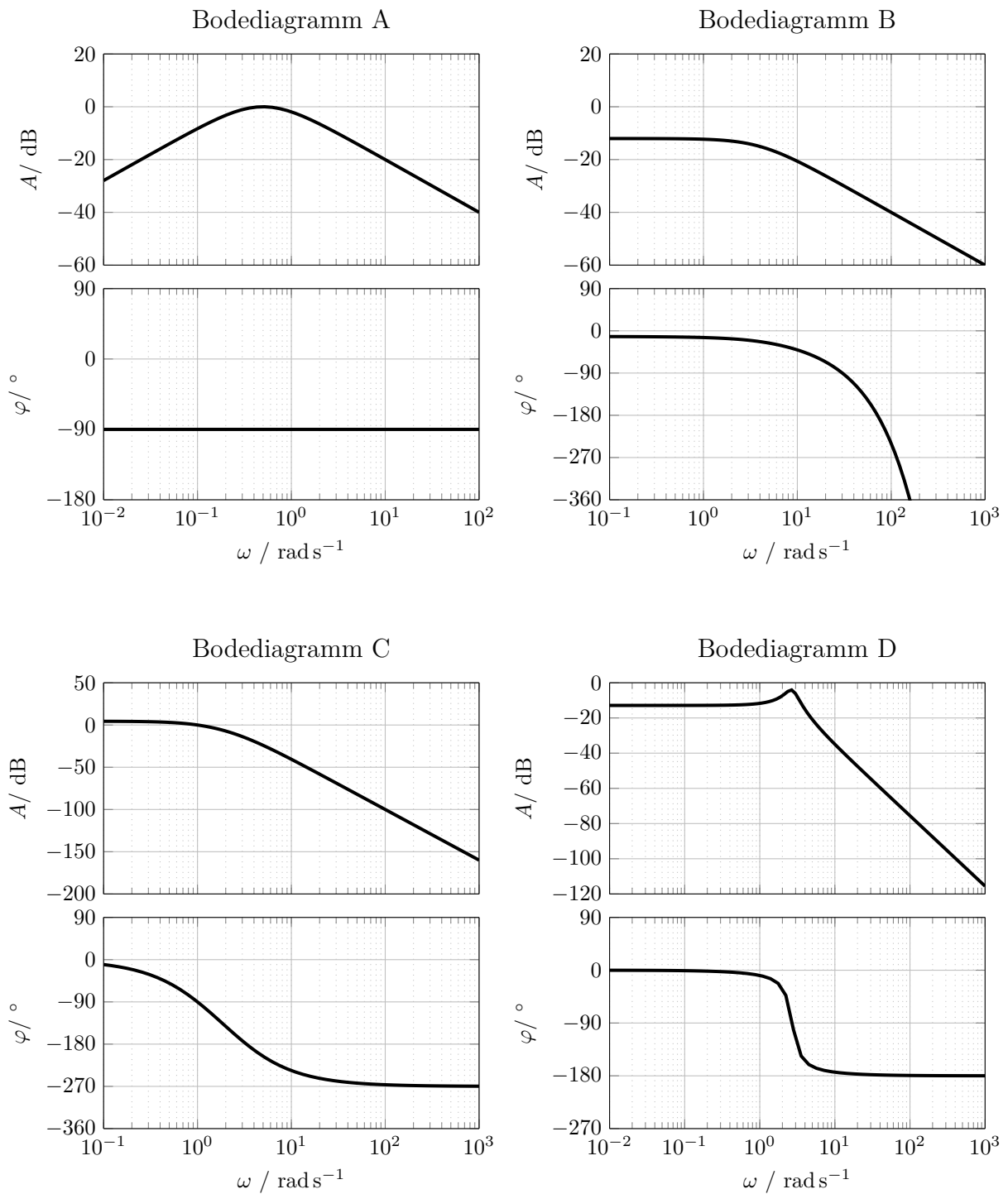


Abbildung 3: Bode-Diagramme A - D der Übertragungsfunktionen $G_i(s)$, $i = 1 \dots 4$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

Das folgende Blockschaltbild zeigt die Strecke eines linearen Systems mit Eingang $U(s)$ und Ausgang $Y(s)$.

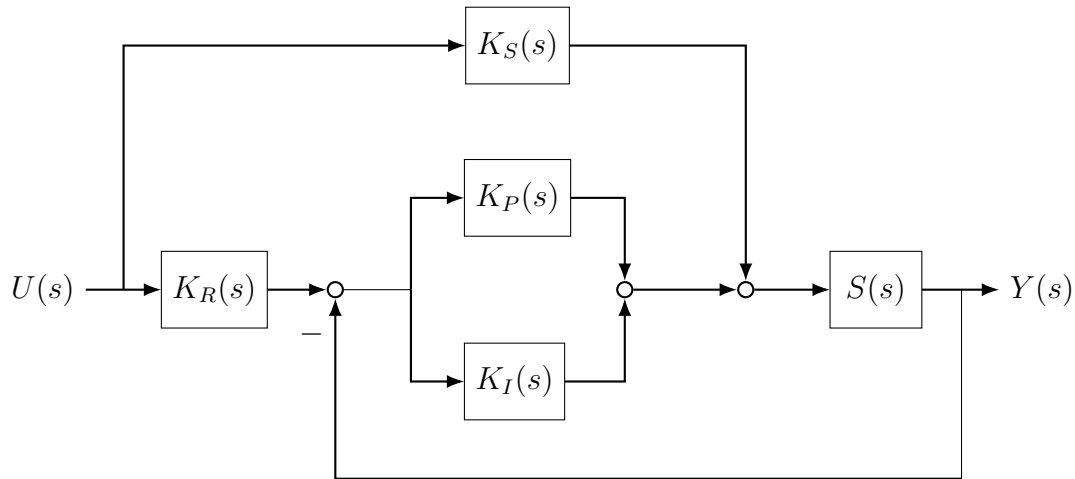


Abbildung 4: Blockschaltbild

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Strecke $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ ohne Verwendung von Doppelbrüchen. (3 Punkte)
- Beeinflusst $K_S(s)$ die Stabilität des Gesamtsystems? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (1 Punkt)
- Im Folgenden gilt

$$K_S(s) = 0, K_R(s) = 1, S(s) = \frac{1}{s-1}, K_P(s) = \alpha, K_I(s) = \beta \frac{1}{s}.$$

Geben Sie den Wertebereich von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an, für den das Gesamtsystem asymptotisch stabil ist. (2 Punkte)

- Gegeben ist ein anderes System

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} U(s) + \frac{H(s) + G(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)} D(s).$$

Ergänzen Sie im Blockschaltbild unten die fehlenden Verbindungen für dieses System. (3 Punkte)

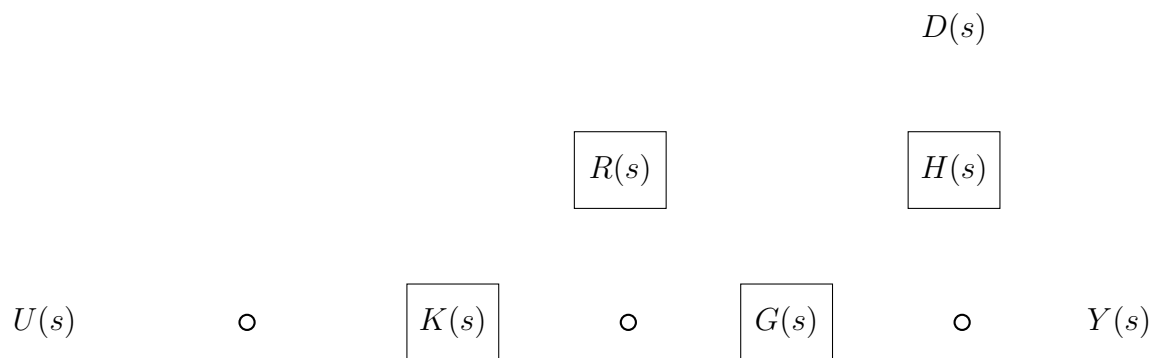


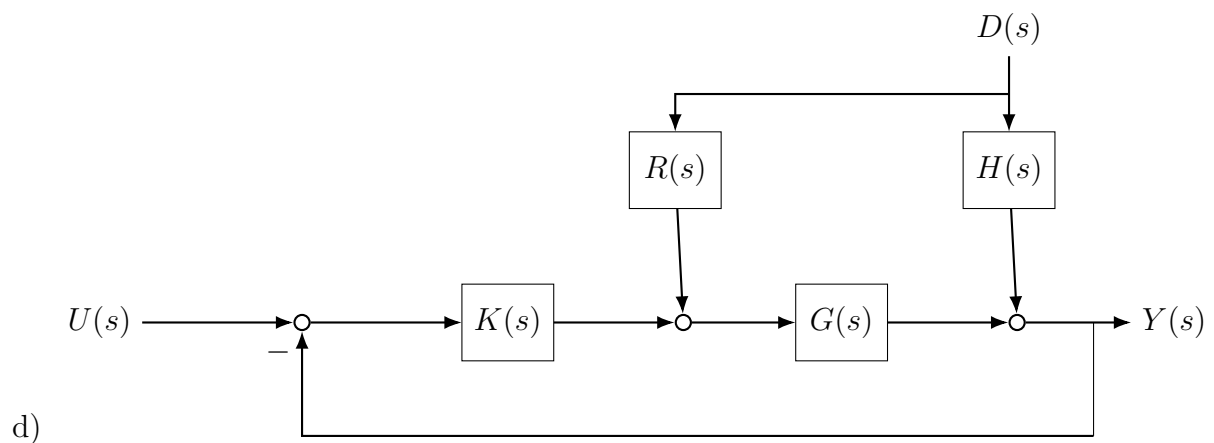
Abbildung 5: Blockschaltbild

Lösung Aufgabe 2.

a) $Y = [1 + S(K_P + K_I)] = U [K_S + K_R(K_P + K_I)] S$
 $G = \frac{Y}{U} = \frac{[K_S + K_R(K_P + K_I)] S}{1 + (K_P + K_I) S}$

b) Nein, nur Nullstellen, keine Pole

c) $G = \frac{(A + \frac{B}{s}) \frac{1}{s-1}}{1 + (A + \frac{B}{s}) \frac{1}{s-1}} = \frac{sA + B}{s^2 + s(A-1) + B} \Rightarrow A > 1, B > 0 \text{ Hurwitz}$



Aufgabe 3. (12.5 Punkte)

Die Impulsantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems lautet

$$g(t) = 1 - e^{-4t} + \cos(3t).$$

Hinweis: Aufgabenteile b), c) und g) können unabhängig von den jeweils vorherigen bearbeitet werden.

- a) Ist das System asymptotisch stabil, grenzstabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems. (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. Geben Sie diese auf eine Hauptnenner gebracht an. (3 Punkte)
- d) Geben Sie die Differentialgleichung des Systems an. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1 Punkt)
- e) Existiert eine Zustandsraumdarstellung des Systems, bei der die Matrix A Diagonalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- f) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung des Systems an. Die Anfangsbedingungen müssen nicht angegeben werden. (1.5 Punkte)

Im Folgenden wird das System mit dem in der Abbildung gezeigten Eingangssignal $u(t)$ angeregt.

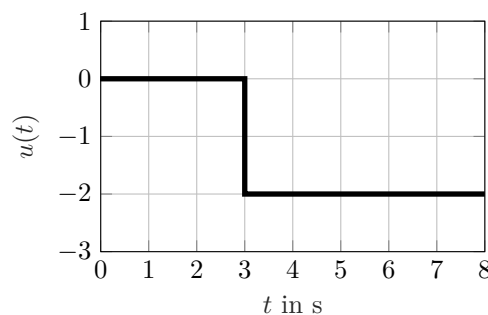


Abbildung 6: Eingangssignale $u_i(t)$ $i = 1, 2$

- g) Geben Sie $u(t)$ in geschlossener Form, d.h. ohne Fallunterscheidung, an. (1 Punkt)
- h) Geben Sie die Berechnungsvorschrift an, mit der sich der Systemausgang $y(t)$ berechnen lässt wenn das System mit dem zuvor bestimmten $u(t)$ angeregt wird. Es sind nur der Ansatz und das Einsetzen der gegebenen Größen gefragt, **keine** Berechnung von $y(t)$. (1 Punkt)

Lösung Aufgabe 3.

- a) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Exponentialfunktion gegen 0. Die cos-Funktion schwingt und bleibt beschränkt mit Amplitude 1, und die Konstante 1 bleibt erhalten. Damit ist das System grenzstabil.
- b) Die Sprungantwort kann durch zeitliche Integration der Impulsantwort bestimmt werden. Sie lautet

$$h(t) = \int_0^t 1 - e^{-4\tau} + \cos(3\tau) d\tau = \left[\tau + \frac{1}{4}e^{-4\tau} + \frac{1}{3}\sin(3\tau) \right]_0^t = t + \frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\sin(3t).$$

- c) Aufgrund der Linearität können die Summanden einzeln in den Laplace-Bereich transformiert werden.
 Entweder zusammengefasst

$$1 - e^{-4t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s(s + \frac{1}{4})} = \frac{4}{s(s + 4)}$$

mit einer der bekannten Korrespondenzen oder separat

$$1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s}, \quad -e^{-4t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{-1}{s + 4}$$

sowie

$$\cos(3t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

sodass sich insgesamt ergibt:

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 4)} + \frac{s}{s^2 + 3^2} = \frac{(s + 4)(s^2 + 9) - s(s^2 + 9) + s^2(s + 4)}{s(s + 4)(s^2 + 9)} = \frac{s^3 + 8s^2 + 36}{s(s + 4)(s^2 + 9)}.$$

- d) Nach dem Ausmultiplizieren der Übertragungsfunktion zu

$$G(s) = \frac{s^3 + 8s^2 + 36}{s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 36s}$$

lässt sich aus den Koeffizienten die Differentialgleichung aufstellen als

$$y^{(4)} + 4\ddot{y} + 9\ddot{y} + 36\dot{y} = \ddot{u} + 8\dot{u} + 36u.$$

- e) Die Eigenwerte der A-Matrix entsprechen den Polstellen der Übertragungsfunktion und den Nullstellen des charakteristischen Polynoms der DGL. Ausgehend von der Faktorisierung $s(s + 4)(s^2 + 9)$ lassen sich die Eigenwerte der Matrix bestimmen zu $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_{3,4} = \pm 3j$. Jede Matrix mit voneinander verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar, daher existiert eine solche Zustandsraumdarstellung.

- f) Eine Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform, die man durch Einsetzen der Koeffizienten erhält, lautet

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -36 & -9 & -4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 36 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}\end{aligned}$$

g) $u(t) = -2\sigma(t - 3)$

- h) Die Systemantwort $y(t)$ wird mit Hilfe des Faltungsintegrals bestimmt. Da Faltung kommutativ ist, sind folgende Ansätze äquivalent

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t \left(1 - e^{-4(t-\tau)} + \cos(3(t-\tau))\right) (-2\sigma(\tau - 3)) \, d\tau \\ &= \int_0^t \left(1 - e^{-4\tau} + \cos(3\tau)\right) (-2\sigma((t-\tau) - 3)) \, d\tau.\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (8.5 Punkte)

Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 19u \quad (1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 4$$

beschrieben.

Hinweis: Die Aufgabenteile b) und c) können unabhängig von den jeweils vorherigen bearbeitet werden.

- Geben Sie die Laplace-Transformierte von $y(t)$, also $Y(s)$, in Abhängigkeit von $U(s)$ an. (2 Punkte)
- Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ des Systems an. (1 Punkt)
- Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems. (3 Punkte)
- Wie lautet die Laplace-Transformierte $Y_1(s)$ der Lösung $y_1(t)$ der DGL (1), wenn das Eingangssignal $u_1(t) = \sigma(t)$ aufgebracht wird? Kennzeichnen Sie darin den homogenen und den partikulären Lösungsanteil. (1.5 Punkte)

Lösung Aufgabe 4.

- a) Anwendung der Laplace-Transformation auf beide Seiten der DGL ergibt

$$\begin{aligned} & (s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 10Y(s) \\ &= (s^2 U(s) - su(0) - \dot{u}(0)) + 2(sU(s) - u(0)) + 19U(s) \\ \Leftrightarrow & (s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 0) + 2(sY(s) - 2) + 10Y(s) \\ &= (s^2 U(s) - s \cdot 0 - 4) + 2(sU(s) - 0) + 19U(s) \\ \Leftrightarrow & (s^2 + 2s + 10)Y(s) - 2s - 4 = (s^2 + 2s + 19)U(s) - 4. \end{aligned}$$

Umstellen nach $Y(s)$ ergibt

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 19}{s^2 + 2s + 10} U(s) + \frac{4 + 2s}{s^2 + 2s + 10}.$$

- b) Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 19}{s^2 + 2s + 10}.$$

- c) Die Vorzeichenbedingung, laut derer alle Koeffizienten auf der linken (Ausgangs-)Seite der DGL positiv (d.h. > 0) sein müssen, ist erfüllt. Diese ist für ein System 2. Ordnung notwendig und hinreichend. Damit ist das System asymptotisch stabil.
- d) Für die Impulsantwort gilt $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$. Für die inverse Laplace-Transformation mit Hilfe von Korrespondenzen wird die Übertragungsfunktion zunächst umgeformt zu

$$\frac{s^2 + 2s + 10 + 9}{s^2 + 2s + 10} = 1 + \frac{9}{s^2 + 2s + 10}.$$

Da der Nenner konjugiert komplexe Pole hat, wird dieser nicht weiter aufgeteilt.
Möglichkeit 1 für den Bruch:

$$\frac{9}{s^2 + 2s + 10} = 3 \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad 3e^{-t} \sin(3t).$$

Möglichkeit 2 für den Bruch:

$$\frac{9}{s^2 + 2s + 10} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{5}s + 1}$$

mit $T_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $D = \frac{1}{\sqrt{10}}$:

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{5}s + 1} \quad \circ \text{---} \bullet \quad 3e^{-t} \sin(3t).$$

Damit folgt insgesamt

$$g(t) = \delta(t) + 3e^{-t} \sin(3t).$$

- e) Mit Hilfe der Laplace-Transformierten aus a) ergibt sich direkt

$$Y_1(s) = \underbrace{\frac{s^2 + 2s + 19}{s^2 + 2s + 10} \cdot \frac{1}{s}}_{\text{partikulärer Anteil}} + \underbrace{\frac{2s}{s^2 + 2s + 10}}_{\text{homogener Anteil}}.$$

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Gegeben sei das folgende System in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_1 : \quad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Hinweis: Alle Aufgabenteile können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- Nennen Sie zwei Möglichkeiten die Transitionsmatrix e^{At} zu berechnen. (1 Punkt)
- Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} des Systems Σ_1 mit einer geeigneten Methode. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems Σ_1 . (1 Punkt)
- Nennen Sie für die allgemeine Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u, \quad y = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} u, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

eine Berechnungsvorschrift für das Ausgangssignal $y(t)$. (1 Punkt)

- Transformieren Sie die allgemeine Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u, \quad y = \underline{C} \underline{x} + \underline{D} u, \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

für **nicht-verschwindende** Anfangsbedingungen $\underline{x}_0 \neq 0$ in den Laplace-Bereich und stellen Sie die Gleichung nach $Y(s)$ um. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 5.

- Ähnlichkeitstransformation, Laplace

$$b) \quad \begin{pmatrix} \frac{e^{-t} 1i}{2} + \frac{e^t 1i}{2} & \frac{e^{-t} 1i}{2} - \frac{e^t 1i}{2} \\ -\frac{e^{-t} 1i}{2} + \frac{e^t 1i}{2} & \frac{e^{-t} 1i}{2} + \frac{e^t 1i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$c) \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$d) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$e) \quad Y(s) = C (sI - A)^{-1} X_0 + [C (sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Die sogenannte *logistische Gleichung*

$$x(t + \Delta t) = \alpha x(t) (1 - x(t))$$

ist ein Musterbeispiel für chaotisches Verhalten in der Mathematik. Wie anhand des Zeitinkrements $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ zu erkennen, handelt es sich um eine zeitdiskrete Gleichung. Das bedeutet, durch Auswerten der rechten Seite der Gleichung zum Zeitpunkt t ergibt sich der Systemzustand zum nächsten Zeitpunkt $t + \Delta t$.

- a) Leiten Sie durch Einsetzen in die Diskretisierungs-Vorschrift

$$\dot{x} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

eine zeitkontinuierliche Differentialgleichung her. (2 Punkte)

- b) Eine Taylor-Linearisierung des zeitkontinuierlichen Systems um die Ruhelage $x_s = 0$ führt zu

$$\dot{x}(t) \approx \frac{\alpha - 1}{\Delta t} x(t).$$

Geben Sie den Wertebereich von $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für den dieses System asymptotisch stabil ist. (1 Punkt)

- c) Eine Taylor-Linearisierung des zeitdiskreten Systems um die Ruhelage $x_s = 0$ führt zu

$$x(t + \Delta t) \approx \alpha x(t).$$

Erläutern Sie, weshalb dieses System für $0 < \alpha < 1$ asymptotisch stabil ist. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 6.

a) $\dot{x} = \frac{\alpha-1}{\Delta t}x - \frac{\alpha}{\Delta t}x^2$

- b) wichtig ist $\Delta t > 0$, damit kann man sagen $\alpha < 1$

- c) Egal wo man anfängt, man wird immer kleiner und läuft Richtung 0

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Hinweis: Alle Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

- a) Sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Aus der Mathematik ist bekannt, dass die Taylorreihe von f an der Entwicklungstelle x_s lautet

$$f(x_s + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_s} (x - x_s)^n$$

mit $\Delta x = x - x_s$. Erläutern Sie, wie sich hieraus eine Linearisierung der Funktion f herleiten lässt. (1 Punkt)

- b) Gegeben sei das nichtlineare System des *Lorenz-Attraktors*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1(2 - x_3) - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - 4x_3.\end{aligned}$$

Dieses System besitzt eine Ruhelage bei $\underline{x}_{s,1} = [0, 0, 0]^T$. Besitzt das System weitere Ruhelagen? Wenn ja, berechnen Sie die weiteren Ruhelagen. (3 Punkte)

- c) Linearisieren Sie die Van-der-Pol Differentialgleichung $\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ um die Ruhelage $x_s = 0$. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 7.

a) $f(x_s + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_{x_s} (x - x_s)^n$

b)
$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_s, u_s} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_s, u_s} \Delta u \\ \Delta y &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_s, u_s} \Delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_s, u_s} \Delta u\end{aligned}$$

Damit sich der affine Anteil aus der Taylorreihe beider Systemgleichungen rauskürzt, muss sowohl $f(x_s, u_s) = 0$, als auch $g(x_s, u_s) = y_s$ gelten.

c) $\ddot{x} = \alpha(1 - x^2)\dot{x} - x = f(x, \dot{x})$

$$\Delta x = x - x_s$$

$$\Delta \ddot{x} = \ddot{x} = f(x, \dot{x}) = f(x_s + \Delta x, \dot{x}_s + \Delta \dot{x}_s) = f(x_s, \dot{x}_s) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_s, \dot{x}_s} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x_s, \dot{x}_s} \Delta \dot{x}$$

$$\Delta \ddot{x} = -\Delta x + \alpha \Delta \dot{x} \Rightarrow \Delta \ddot{x} - \alpha \Delta \dot{x} + \Delta x = 0$$

Aufgabe 8. (10 Punkte)

Hinweis: Aufgabenteil d) kann unabhängig von den vorherigen bearbeitet werden.

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{0.1} \frac{s^2 + s + 64}{s^4 + s^3 + 100^2 s^2}.$$

- a) Faktorisieren Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ in Teilsysteme minimaler Ordnung ($n = 1$ bei reeller Pol-/ Nullstelle, $n = 2$ bei konjugiert komplexem Polstellen-/ Nullstellenpaar). (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Frequenzgang von $G(s)$ und ermitteln Sie daraus den zugehörigen Amplitudengang des Systems. (2 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Geradenapproximation des Amplitudengangs sowie die Treppenapproximation des Phasengangs. Verwenden Sie zum Zeichnen bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten. (4 Punkte)

Im Folgenden wird ein anderes, lineares, zeitinvariantes System $G(s)$ betrachtet. Sein Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $\varphi(\omega)$ sind gegeben durch

$$A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + (14\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega).$$

- d) Das System wird mit dem Signal $u(t) = \sin(4t)$ angeregt. Berechnen Sie die den zugehörigen Systemausgang $y(t)$ unter der Annahme verschwindender Anfangsbedingungen. (2 Punkte)

Lösung Aufgabe 8.

- a) $G(s) = 10 s^{-2} (s^2 + s + 64) \frac{1}{s^2 + s + 100^2}$
- b) $H(j\omega) = 10 \frac{1}{-\omega^2} (j\omega + 64 - \omega^2) \frac{1}{j\omega + 100^2 - \omega^2}$
- c) Für das Zeichnen werden folgende Werte benötigt: $c = 10$, $r = -2$, $\omega_1 = 8$, $\omega_2 = 100$
- d) $y(t) = 0.03 \cdot \sin(4t - 1.3)$

