

Name, Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Probeklausur

Bitte beachten Sie: Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, ist der Längsweg Teil der geforderten Prungsleistung. *Die Angabe des korrekten Ergebnisses ohne Längsweg kann daher zum Punktabzug führen.*

Hinweis zu den Multiple-Choice Aufgaben: Bitte bearbeiten Sie die Multiple-Choice Aufgaben *eindeutig* und *nur auf dem Aufgabenblatt*. Markieren Sie dazu die von Ihnen gewählte(n) Antwort(en jeweils) mit einem Kreuz. Vollständig ausgefüllte Kästchen dienen zur Korrektur und werden wie nicht angekreuzt gewertet.

Aufgabe 1 *Abtastung*

(12 Punkte)

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

Das kontinuierliche Signal $x(t) = \cos(5000\pi t)$ wird mit der Abtastperiode T abgetastet. Das Ergebnis der Abtastung ist das zeitdiskrete Signal $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$.

a) Ein möglicher Wert für die Abtastperiode T ist:

☐ $T = \frac{13}{15000}$

☐ $T = \frac{2}{15000}$

☐ $T = \frac{8}{15000}$

☐ $T = \frac{1}{3000}$

Teil 2:

Betrachten Sie das System aus Abbildung 1. Folgende Zusammenhänge gelten:

$$\begin{aligned} X_c(j\Omega) &= 0 \quad \text{für} \quad |\Omega| \geq 2 \cdot \pi 10^4 \\ x[n] &= x_c(nT) \\ y[n] &= T \cdot \sum_{k=-\infty}^n x[k] \end{aligned} \quad (1)$$

b) Der maximale Wert für T um Aliasing zu vermeiden und damit $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewonnen werden kann ist:

- | | |
|--|--|
| ☐ $T < \frac{1}{4 \cdot 10^4}$ | ☐ $T < \frac{1}{2 \cdot 10^4}$ |
| ☐ $T < \frac{4}{10^4}$ | ☐ $T < 2 \cdot 10^{-4}$ |

c) Die Impulsantwort $h[n]$ ist:

- | | |
|--|---|
| ☐ $h[n] = T \cdot \delta[n]$ | ☐ $h[n] = \frac{1}{T} \cdot u[n]$ |
| ☐ $h[n] = T \cdot u[n]$ | ☐ $h[n] = T \cdot u[n - T]$ |

d) Der Wert von $y[n]$ für $n \rightarrow \infty$ ist:

- | | |
|---|--|
| ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \frac{1}{T} \cdot X(e^{j\omega}) _{\omega=0}$ | ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = T \cdot X(e^{j\omega}) _{\omega=nT}$ |
| ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = T \cdot X(e^{j\omega}) _{\omega=0}$ | ☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = T \cdot X(e^{j\omega}) _{\omega=1/2\pi T}$ |

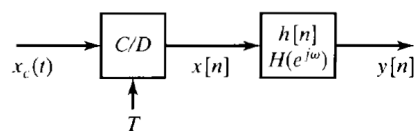


Abbildung 1: Darstellung eines zeitdiskreten Systems zur Verarbeitung zeitkontinuierlicher Signale.

Teil 3:

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches reelles Tiefpass-Signal $x_c(t)$ dessen höchste Frequenz kleiner als $2\pi 200$ rad/s ist. Der Ausgang eines Filterungssystems sei beschrieben durch $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{1000})$.

- e) Skizzieren Sie einen möglichen Betrag der zeitkontinuierlichen Fouriertransformierte von $x_c(t)$, also $|X_c(\omega)|$.

- f) Falls $x[n] = x_c[\frac{n}{500}]$, kann man theoretisch $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewinnen? Warum?

- g) Falls $y[n] = y_c[\frac{n}{500}]$, kann man theoretisch $y_c(t)$ aus $y[n]$ zurückgewinnen? Warum?

- h) Skizzieren Sie einen möglichen Betrag der zeitkontinuierlichen Fouriertransformierte von $y_c(t)$, also $|Y_c(\omega)|$.

- i) Wie kann man $y[n]$ aus $x[n]$ nach dem Schaltbild in Abb. 2 berechnen? Geben Sie dafür $H(e^{j\omega})$ an.

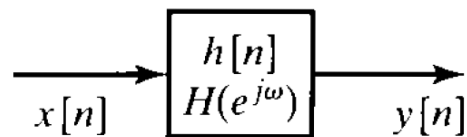


Abbildung 2: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems.

- j) Wie kann man $y[n]$ aus $x[n]$ nach dem Schaltbild in Abb. 3 berechnen? Geben Sie dafür $H_1(e^{j\omega})$ an.

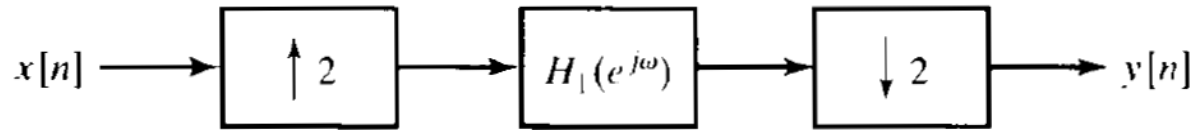


Abbildung 3: Darstellung eines zeitdiskreten Filterungssystems mit Dezimierungs- und Interpolationsstufe.

Aufgabe 2 Modulation

(10 Punkte)

Betrachten Sie folgende Amplitudenmodulation: Das Nutzsignal ist ein Ton $x(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ mit $A_m = 4$ V und $f_m = 0.5$ Hz. Das Trägersignal hat eine Trägerfrequenz von $f_c = 10$ Hz und eine Amplitude von $A_c = 10$ V. Das modulierte Signal wird als $y(t) = A_c (1 + mx(t)) \cos(2\pi f_c t)$ bezeichnet. Geben Sie für diese Modulation an:

- Welcher Bedingung muss der Modulationsindex m erfüllen, damit das modulierte Signal $y(t)$ keine Übermodulation aufweist?
- Nehmen Sie für alle folgende Teilaufgaben an, dass für den Modulationsindex $m = 1/8$ gilt. Geben Sie den numerischen Ausdruck des modulierten Signals $y(t)$ an.
- Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des modulierenden Signals $X(\omega)$ explizit (numerisch). Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte dieses Signals $X(\omega)$. Beschriften Sie die Achsen und geben Sie die Schnittpunkte mit den Achsen an.
- Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals $Y(\omega)$ explizit (numerisch). Skizzieren Sie die Fourier-Transformierte dieses Signals $Y(\omega)$. Beschriften Sie die Achsen und geben Sie die Schnittpunkte mit den Achsen an.
- Berechnen Sie die maximale Leistung des modulierten Signals $y(t)$ über einem Widerstand von 50Ω .
- Berechnen Sie die Bandbreite des modulierten Signals $y(t)$.
- Geben Sie ein Schaltbild zur Modulation des Signals an (Eingang ist das Nutzsignal $x(t)$, Ausgang ist das modulierte Signal $y(t)$). Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein.
- Geben Sie ein Schaltbild zur Demodulation des Signals an (Eingang ist das modulierte Signal $y(t)$, Ausgang das Nutzsignal $x(t)$). Alle Filter, die Sie dafür benötigen, sollen symmetrisch im Frequenzbereich sein.

Aufgabe 3 *Fourier*

(30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1,2 und 3 ken **unabhängig** voneinander gel werden.

Teil 1:

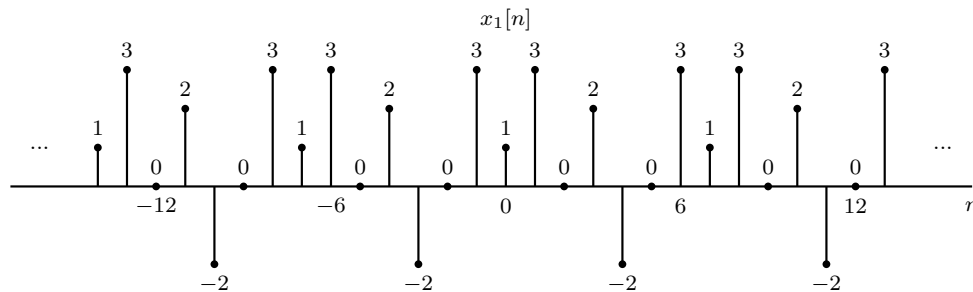


Abbildung 4: periodisches Signal $x_1[n]$

- a) Bestimmen Sie die Spektralkoeffizienten $a_{1,k}$ der zeitdiskreten Fourier-Reihe fdes periodische, zeitdiskrete Signal aus Abbildung 4. Fassen Sie diese unter Ausnutzung der Symmetrien vollstg zu trigonometrischen Funktionen zusammen.

Teil 2:

- b) Bestimmen Sie die Spektralkoeffizienten $a_{2,k}$ der Fourier-Reihe fdes folgende periodische, zeitdiskrete Signal und skizzieren Sie Betrag und Phase von $a_{2,k}$:

$$x_2[n] = \sqrt{2} \sin \left(\frac{12\pi}{7}n - \frac{6\pi}{5} \right).$$

Teil 3:

Es sei das kausale, zeitdiskrete LTI-System aus Abbildung 5 gegeben.

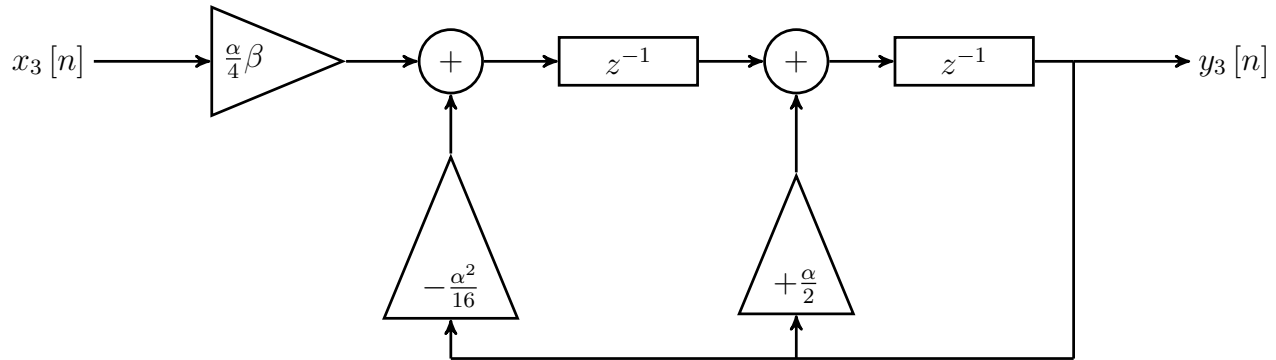


Abbildung 5: LTI-System.

- c) Bestimmen Sie die zugehörige Differenzengleichung.
- d) Geben Sie die Gleichung der Übertragungsfunktion $H_3(z)$ des Systems an.
- e) Berechnen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$.
- f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $H_3[z]$. Für welche α ist das System stabil? Wie beeinflusst β die Stabilität des Systems?
- g) Im Folgenden sei das Eingangssignal durch

$$x_3[n] = \begin{cases} \frac{n}{3} \left(\frac{3}{7}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die z-Transformation des zugehörigen Ausgangssignals $Y_3(z)$.

- h) Skizzieren Sie das Pol-Nullstellen Diagramm von $Y_3(z)$ mit $\alpha = \frac{4}{7}$ und $\beta = 28$ und geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich für $Y_3(z)$ an.
- i) Handelt es sich bei $y_3[n]$ um eine stabile Folge? Kurze Begründung!

Aufgabe 4 *Filterentwurf*

(18 Punkte)

Der Frequenzgang eines frequenzselektiven Filters lautet:

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{f}|\Omega| \leq \frac{2\pi}{7} \\ 5e^{-7j\Omega} & \text{f}\frac{2\pi}{7} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

- Skizzieren Sie den Amplituden-Frequenzgang $|H_1(\Omega)|$ f
 $|\Omega| < \pi$. Um welche Art von Filter handelt es sich?
- Welcher Kompromiss muss in der Praxis eingegangen werden, wenn ein passives RLC-Filter mit einem Amplituden-Frequenzgang entsprechend $H_1(\Omega)$ entworfen werden soll? Welche Eigenschaft von $H_1(\Omega)$ kann ein solches passives Filter prinzipiell nicht erfen?
- Berechnen Sie die Impulsantwort $h_1[n]$.
- Das Eingangssignal des Filters lautet im Zeitbereich:

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{7}\right) + e^{j\pi n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n}.$$

Bestimmen Sie das zugehge Ausgangssignal $y_1[n]$ falle n .

- Fden Entwurf eines digitalen Tiefpassfilters soll eine der beiden gigsten zeitdiskreten Filterimplementierungen gewt werden. Nennen Sie beide Implementierungsarten und leiten Sie aus deren Eigenschaften einen Vor- und einen Nachteil des jeweiligen Verfahrens ab.

Aufgabe 5 Analogfilter

(25 Punkte)

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 ken **unabhig** voneinander gel werden.

Teil 1:

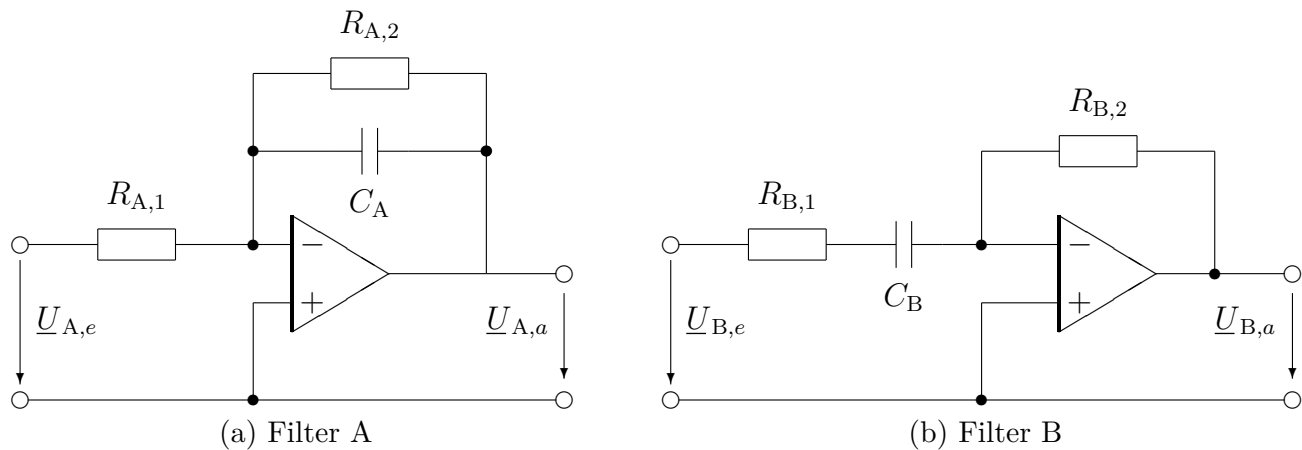


Abbildung 6: Aktive Filter

Die Schaltungen in Abbildung 6 zeigen Realisierungen zweier analoger aktiver Filter. Nehmen Sie im folgenden an, dass ideale Operationsverstärker verwendet werden.

- Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_A(j\omega)$ von Filter A (Abbildung 6a) und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters. Berechnen Sie die ungedfzte Verstärkung K_A im Durchlassbereich und die Grenzfrequenz $\omega_{g,A}$ von Filter A.
- Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_B(j\omega)$ von Filter B (Abbildung 6b) und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.

Filter A soll nun mit Filter B zusammen geschaltet werden. Die Filter A und B sollen so hintereinander geschaltet werden, dass $\underline{U}_{B,e} = \underline{U}_{A,a}$.

Es gelte im Folgenden $10R_{A,1} = R_{A,2} = R_A$, $R_{B,1} = \sqrt{2}R_{B,2} = R_B$, und $C_A = C_B = C$.

- Geben Sie die Gesamttragungsfunktion

$$\underline{A}_{\text{ges}}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{B,a}}{\underline{U}_{A,e}}$$

an. Bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.

- Geben Sie eine einfache Bedingung an, so dass die maximale Gesamtverstärkung K_{ges} mindestens 11 dB betr.

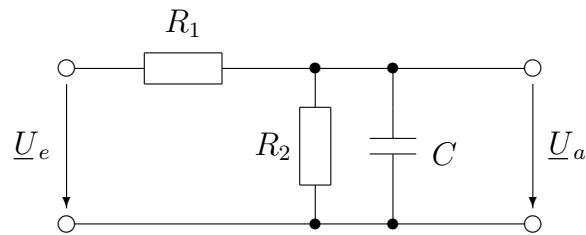


Abbildung 7: Passives Filter

Teil 2:

Betrachten Sie nun das passive Filter aus Abbildung 7.

- e) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}(j\omega)$ des passiven Filters und bestimmen Sie Typ und Ordnung des Filters.
- f) Berechnen Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ und Phasengang $B(\omega)$ des Filters.
- g) Nehmen Sie an, dass durch einen Defekt des Bauteils kein Strom durch R_2 fließt. Nehmen Sie des Weiteren an, dass die verbleibenden Bauteile $R_1 = 100\ \Omega$ und $C = 1\ \text{mF}$ gewartet werden.

Skizzieren Sie in diesem Fall den Amplitudengang in dB und den Phasengang in Grad. Ermitteln Sie durch den Defekt Typ und Ordnung des Filters? Wenn ja, geben Sie den neuen Typ und die neue Ordnung des Filters an.

Teil 3:

- h) Ersetzen Sie eines der Bauteile (R_1 , R_2 , C) der in Abbildung 7 dargestellten Schaltung durch eine Spule mit der Induktivität L , so dass ein passiver Bandpass entsteht und geben Sie dessen Frequenzgang $\underline{A}_{\text{BP}}(j\omega)$ an. Welche Ordnung hat das resultierende Filter?
- i) Bestimmen Sie die nötige Kapazität der Spule L damit der Bandpass die Güte $Q = 100$ besitzt. Verwenden Sie als Zahlenwerte die verbleibenden Bauteile $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ und $C = 1\ \text{mF}$. Welche Mittenfrequenz ω_0 besitzt das realisierte Filter?

Hinweis: Die Gleichung für den normierten Bandpass lautet

$$G_{\text{BP}} = \frac{A_0 \Delta\Omega P}{1 + \Delta\Omega P + P^2},$$

mit $\Delta\Omega = 1/Q$.

- j) Nennen Sie zwei Nachteile passiver Filter.

Aufgabe 6 Signale und Systeme

(25 Punkte)

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 ken **unabhig** voneinander gel werden.

Teil 1:

Markieren Sie in den folgenden Teilaufgaben die Antworten, fdie die gegebenen Aussagen zutreffen. Es sind keine Begrungen notwendig. Falsche Antworten fen zum Punktabzug, jedoch ken pro Teilaufgabe nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

a) Das Signal ist periodisch.

$$x_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + 3\right), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$x_2[n] = \tan(2\pi n + 3), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$x_3(t) = \sin(\sqrt{2\pi}t), \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$x_4[n] = \cos(\sqrt{2\pi}n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

b) Das Impulsrtragungsverhalten des zeitdiskreten Systems ist Null $fn < 0$.

$$H_1(z) = \frac{2z - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$H_2(z) = \frac{(2 - z^{-1})^2}{2 - \frac{3}{2}z^{-1}} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$H_3(z) = \frac{(z^2 - \frac{2}{3})^3}{(1 - z)^4} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

$$H_4(z) = \frac{(z - \frac{2}{3})^3}{(1 - z)^4} \quad \text{○ Ja} \quad \text{○ Nein}$$

Teil 2:

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den folgenden Teilaufgaben. Es sind keine Begrungen notwendig. Falsche Antworten fen zum Punktabzug, jedoch ken pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

c) Bestimmen Sie die Eigenschaften der folgenden Systeme:

i) Das zeitkontinuierliche System

$$y_1(t) = \int_0^{2t} \sqrt{a}x(\tau)d\tau, \quad t > 0, a > 0$$

ii) Das zeitdiskrete System

$$y_2[n] = \sum_{k=-1}^3 x^k[n], \quad n \in \mathbb{Z}$$

iii) Das zeitdiskrete System

$$y_3[n] = nx[n], \quad n \geq 0$$

System	$y_1(t)$		$y_2[n]$		$y_3[n]$	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist speicherfrei.						
Das System ist zeitinvariant.						
Das System ist linear.						
Das System ist kausal.						
Das System ist stabil.						

Teil 3:

System	I	II	III
Das System ist ein Allpass:	Nein	Nein	Ja
Konvergenzradius:	$2 < z < \infty$	$0 \leq z < 2$	$\frac{1}{2} < z < \infty$

Tabelle 1: Eigenschaften

- d) Tabelle 1 beschreibt die Eigenschaften drei verschiedener zeitdiskreter LTI-Systeme (jeweils 3. Ordnung).

Geben Sie fñedes der Systeme je 3 *verschiedene* miche Polstellen und 3 *verschiedene* miche Nullstellen an. Achten Sie dabei darauf, dass keine Pol-/Nullstellenkungen auftreten. Geben Sie fñedes System an, ob es stabil ist.

Es sind keine Begrungen notwendig. Falsche Antworten fen zum Punktabzug, jedoch ken pro System nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

System	I	II	III
Pole			
Nullstellen			
System ist stabil?	☐ Ja ☐ Nein	☐ Ja ☐ Nein	☐ Ja ☐ Nein