

ESV - Formelsammlung zur Prüfung

Hinweis: Diese Formelsammlung muss nach der Prüfung wieder abgegeben werden!

Verschiedene Darstellungen zeitkontinuierlicher Fourier-Integrale

Föllinger

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Doetsch

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jyt} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{jyt} dy$$

Bronstein (frühere Auflagen)

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{+jyx} dx \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{-jxy} dy$$

Literatur

- FÖLLINGER, O.: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. 7. Auflage. Hüthig 2000, S. 200–201.
- DOETSCH, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser 1970, S. 16.
- BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 19. Auflage, Harri Deutsch 1980, S. 670.

Eigenschaften der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation*

Fourier-Integral:	$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
Umkehr-Integral:	$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$
Äquivalenz:	$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = x(t), \quad \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}\} = X(\omega)$
Existenz-Bedingung:	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt < M, \quad x(t) - \text{absolut integrierbar}$
Konvergenz in Unstetigkeitsstellen t_i :	$\frac{x(t_i + 0) + x(t_i - 0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$
Symmetrie:	$\mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$
Linearität:	$\mathcal{F}\{k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)\} = k_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + k_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\} \quad k_{1,2} \text{ beliebig}$ $\mathcal{F}^{-1}\{k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)\} = k_1 \mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega)\} + k_2 \mathcal{F}^{-1}\{X_2(\omega)\}$
Zeitverschiebung:	$\mathcal{F}\{x(t - b)\} = e^{-j\omega b} X(\omega) \quad b \text{ reell}$
Frequenzverschiebung:	$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega - c)\} = e^{jct} x(t) \quad c \text{ reell oder komplex}$
Maßstabsänderung:	$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \text{ reell} \quad \text{z.B. } a = -1$ $\mathcal{F}^{-1}\{X(a\omega)\} = \frac{1}{ a } x\left(\frac{t}{a}\right) \quad a \text{ reell}$
Differentiation:	$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$ $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}\right\} = (-jt)^n x(t)$
Integration:	$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \cdot \delta(\omega)$
Faltungsintegrale:	$\mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega)X_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau)x_2(\tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$ $\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega - \eta)X_2(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Parsevalsches Theorem:	$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$
Systemantwort:	$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)X(\omega)\} = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)x(\tau) d\tau$

Korrespondenzen der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation ¹

Nr.	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
3	$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
4	1	$2\pi\delta(\omega)$
5	$\cos \omega_0 t$	$\pi \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \}$
6	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j} \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \}$
7	$u(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{j\omega}{2} \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \} + \frac{j\omega}{\omega_0^2 + (j\omega)^2}$
8	$u(t) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{2j} \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \} + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (j\omega)^2}$
9	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$
10	$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \leq \omega_0 \\ 0, & \omega > \omega_0 \end{cases}$
11	$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
12	$\frac{1}{a^2 + t^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }, \quad a > 0$
13	$e^{-a t } \cos \omega_0 t, \quad a > 0$	$\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}$
14	$e^{-a t } \sin \omega_0 t, \quad a > 0$	$\frac{-ja}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{-ja}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}$
15	$\frac{t^n}{n!} u(t) e^{-at}, \quad a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^{n+1}}$
16	$u(t) e^{-at} \cos \omega_0 t, \quad a > 0$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
17	$u(t) e^{-at} \sin \omega_0 t, \quad a > 0$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
18	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}, \quad a > 0$	$2\pi e^{-a\omega^2}$

¹ z. B. FÖLLINGER, O.: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Hüthig 2000.

Eigenschaften der zeitdiskreten Fourier-Transformation

Analysegleichung:	$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$
Synthese Gleichung:	$\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$
Äquivalenz:	$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x[n]\}\} = x[n], \quad \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}\} = X(\Omega)$
Existenzbedingung:	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] < M, \quad x[n] - \text{absolut summierbar}$
Linearität:	$\mathcal{F}\{k_1x_1[n] + k_2x_2[n]\} = k_1\mathcal{F}\{x_1[n]\} + k_2\mathcal{F}\{x_2[n]\} \quad k_{1,2} \text{ beliebig}$ $\mathcal{F}^{-1}\{k_1X_1(\Omega) + k_2X_2(\Omega)\} = k_1\mathcal{F}^{-1}\{X_1(\Omega)\} + k_2\mathcal{F}^{-1}\{X_2(\Omega)\}$
Zeitverschiebung:	$\mathcal{F}\{x[n - n_0]\} = e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \quad n_0 \text{ ganzzahlig } (\mathbb{Z})$
Frequenzverschiebung:	$\mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega - \Omega_0)\} = e^{j\Omega_0 n}x[n]$
Maßstabsänderung:	$\mathcal{F}\{x_{(k)}[n]\} = X(k\Omega)$ mit: $x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}], & \frac{n}{k} \in \mathbb{Z} \text{ (ganzzahlig)} \\ 0, & \frac{n}{k} \notin \mathbb{Z} \text{ (gebrochen rational)} \end{cases}$
Konjugiert komplex:	$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(-\Omega)$
Differenz:	$\mathcal{F}\{x[n] - x[n - 1]\} = (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Summierung:	$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^n x[k]\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Lineare Gewichtung:	$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Faltung:	$\mathcal{F}^{-1}\{X_1(\Omega)X_2(\Omega)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n - k] = x_1[n] * x_2[n]$ $\mathcal{F}\{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega - \eta)X_2(\eta)d\eta = \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) * X_2(\Omega)$
Parsevalsches Theorem:	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) ^2 d\Omega$

Korrespondenzen der zeitdiskreten Fourier-Transformation ²

Nr.	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$
1	$\delta[n]$	1
2	$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi k)$
3	1	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
4	$\cos \Omega_0 n$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \}$
5	$\sin \Omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \}$
6	$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
7	$a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
8	$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin \left(\Omega \left(N_1 + \frac{1}{2} \right) \right)}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)}$
9	$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc} \left(\frac{Wn}{\pi} \right)$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq W \\ 0, & W < \Omega < \pi \end{cases}$
10	$(n+1)a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
11	$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^r}$

² z. B. OPPENHEIM, A. V. und WILLSKY, A. S.: Signale und Systeme - Lehrbuch. VCH 1989.

Eigenschaften der Z-Transformation

Synthesegleichung: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad \text{mit } z = re^{j\Omega}$

Analysegleichung: $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$

mit C – beliebige geschlossene Kurve um Ursprung

Linearität: $\mathcal{Z}\{k_1x_1[n] + k_2x_2[n]\} = k_1\mathcal{Z}\{x_1[n]\} + k_2\mathcal{Z}\{x_2[n]\}, \quad k_{1,2} - \text{beliebig}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{k_1X_1(z) + k_2X_2(z)\} = k_1\mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)\} + k_2\mathcal{Z}^{-1}\{X_2(z)\}$$

Zeitverschiebung: $\mathcal{Z}\{x(n-b)\} = z^{-b}X(z) \quad \text{mit } b - \text{ganzzahlig}$

Frequenzverschiebung: $\mathcal{Z}^{-1}\{X(e^{-j\Omega_0}z)\} = e^{j\Omega_0n}x[n] \quad \text{mit } \Omega_0 - \text{reell}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(a^{-1}z)\} = a^n x[n]$$

Zeitumkehr $\mathcal{Z}\{x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right)$

Differenz: $\mathcal{Z}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})X(z)$

Differentiation der Bildfunktion: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{z\frac{dX(z)}{dz}\right\} = -nx[n]$

Summierung: $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=-\infty}^n x[k]\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$

Grenzwertsätze: (für $n \geq 0$) $x[k] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^k \left(X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{-n}x[n] \right)$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

Faltungssumme: $\mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z)X_2(z)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[n-k]x_2[k] = x_1[n] * x_2[n]$

Korrespondenzen der Z-Transformation ³

Nr.	$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$ C - beliebige geschlossene Kurve um Ursprung	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ z - komplex	Konvergenz- bereich
1	$\delta[n]$	1	alle z
2	$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4	$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
5	$-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
6	$n\alpha^n u[n]$ „pos. Folge“	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
7	$-n\alpha^n u[-n - 1]$ „neg. Folge“	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
8	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\Omega_0) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10	$r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - r \cos(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\Omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
11	$r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{r \sin(\Omega_0) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\Omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$

³ z. B. OPPENHEIM, A. V. und WILLSKY, A. S.: Signale und Systeme - Lehrbuch. VCH 1989.

Analoge Amplitudenmodulation

- Zeitkontinuierliche sinusförmige AM
 - $x(t)$ Modulationssignal/modulierendes Signal (informationstragendes Nutzsignal)
 - $c(t)$ Trägersignal (carrier)
 - * komplex exponentiell: $c(t) = e^{j(\omega_T t + \theta_T)}$
 - * sinusförmig: $c(t) = \cos(\omega_T t + \theta_T)$
 - * $\omega_T \dots$ Träger(kreis)frequenz
 - $y(t)$ Moduliertes Signal: $y(t) = x(t) \cdot c(t)$
- Modulationseigenschaft

$$\mathcal{F}\{x(t) c(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \eta) C(\eta) d\eta$$

- Demodulation
 - Synchron/Kohärent
 - Asynchron/Nicht-kohärent

$$y(t) = (A + x(t)) \cdot \cos(\omega_T t),$$

wobei $|x(t)| \leq K$ (maximale Amplitude von $x(t)$) und $A > K$, so dass $A + x(t) > 0$.

Modulationsindex $m = \frac{K}{A}$.

Analoge Winkelmodulationen

- Modulierendes Signal $x(t)$
- Sinusförmiges Trägersignal $c(t) = A_c \cos(\omega_T t + \theta_T)$
- Moduliertes Signal $y(t) = A_c \cos(\theta(t))$ mit $\theta(t) = \omega_T t + \theta_T(t)$
- Phasenmodulation (PM)

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \omega_T t + \theta_T(t) = \omega_T t + \theta_0 + k_p x(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \omega_T + k_p \frac{dx(t)}{dt}\end{aligned}$$

- Frequenzmodulation (FM)

$$\begin{aligned}\frac{d\theta(t)}{dt} &= \omega_T + k_f x(t) \\ \theta(t) &= \omega_T t + \theta_0 + k_f \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- Augenblicksfrequenz $\omega_a(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$
 - PM: $\omega_a(t) = \omega_T + k_p \dot{x}(t)$
 - FM: $\omega_a(t) = \omega_T + k_f x(t)$
- Eine Phasenmodulation mit $x(t)$ ist identisch mit einer Frequenzmodulation mit $\dot{x}(t)$.
- Bandbreite (*bandwidth* BW):
Gesamtbreite des Frequenzbandes, in dem Signalenergie vorhanden ist (d.h. Frequenzbereich, in dem die Fourier-Transformierte des Signals ungleich Null ist).
- Die Bandbreite BW umfasst negative und positive Frequenzen und hat damit den doppelten Wert der physikalischen Bandbreite B , welche für positive Frequenzen die Differenz zwischen oberer und unterer Grenzfrequenz darstellt:

$$BW = 2B.$$

- Modulationsindex m
 - Monochromatisches, sinusförmiges Modulationssignal

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_m t) \\ \Delta\omega &= k_f A \\ m &= \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{k_f A}{\omega_m} \end{aligned}$$

- Allgemeines, nichtsinusförmiges Modulationssignal

$$m = \frac{k_f \cdot \max \{|x(t)|\}}{\omega_{\max}},$$

wobei $\omega_{\max}$ die höchste in $x(t)$ vorkommende Frequenz darstellt, d.h. $X(\omega) = 0$ für $\omega > \omega_{\max}$.

- Schmalbandige Winkelmodulation (Kleinindex-Winkelmodulation)
 - falls $m \ll \frac{\pi}{2}$.
 - Physikalische Bandbreite $B = 2\omega_{\max}$.
- Breitbandige Winkelmodulation
 - falls $m \ll \frac{\pi}{2}$ nicht gilt.
 - *Carson-Regel* zur Abschätzung der effektiven physikalischen Bandbreite:

$$B_c = 2(m + 1)\omega_{\max}$$

- Maximale Phasen- und Frequenzabweichungen $\Delta\phi_{\max}$ bzw. $\Delta\omega_{\max}$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\max} &= k_p \max \{|x(t)|\} \\ \Delta\omega_{\max} &= k_f \max \{|x(t)|\} \\ \Delta f_{\max} &= \frac{\Delta\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{k_f}{2\pi} \max \{|x(t)|\} \end{aligned}$$