

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1 - 2 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

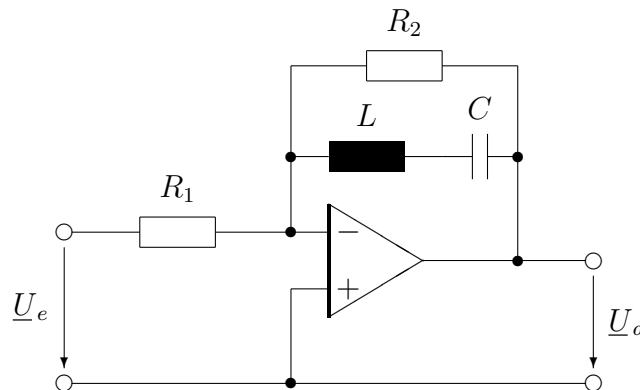


Abbildung 1: Aktives Filter

Die Schaltung in Abbildung 1 stellt ein aktives Filter dar. Es soll dazu genutzt werden die störende Netzfrequenz aus einer Signalübertragung herauszufiltern. Es stellt also eine Bandsperrfilter mit einer Tilgungsfrequenz von 50Hz dar.

Tilgungsfrequenz	$f_m = 50 \text{ Hz}$
Güte	$Q = 1$
stationäre Verstärkung	$A_{BS} = 0 \text{ dB}$

Die Kapazität des Kondensators ist fest gegeben mit $C = 100\mu F$.

- Berechnen Sie den Frequenzgang $\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}(j\omega)$ dieser Schaltung. Der Operationsverstärker kann dabei als ideal betrachtet werden. Welche Ordnung hat das Filter?
- Berechnen Sie den Amplitudengang und den Phasengang und skizzieren Sie diese.

$$a) \quad \frac{u_a}{u_e} = -\frac{z}{R_1} = -\frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot (j\omega L + \frac{1}{j\omega C})}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot (1 - \omega^2 LC)}{R_2 j\omega C - \omega^2 LC + 1}$$

$$z = \frac{R_2 \cdot (j\omega L + \frac{1}{j\omega C})}{R_2 + j\omega L + j\omega C}$$

Zordnung ←

$$b) \quad A(\omega) = |A(j\omega)| = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot (1 - \omega^2 LC)}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \angle\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \angle\left(\frac{R_2}{R_1} \cdot \omega^2 LC\right) \\ &\quad - \angle(R_2 j\omega C) - \angle(\omega^2 LC) - \angle(1) \\ &= 0 + 0 - \arctan\left(\frac{R_2 j\omega C}{1 - \omega^2 LC}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- c) Für den Filterentwurf wird zunächst von dem normierten Frequenzgang eines Tiefpassfilters ausgegangen. Dieser Mustertiefpass ist wie folgt gegeben:

$$G_{TP}(P) = \frac{A_0}{1 + P} \quad P = \frac{p}{\omega_g} \quad p = j\omega$$

Dabei ist $P = j\frac{\omega}{\omega_g}$ die auf die Eckfrequenz bezogene normierte Frequenz. Transformieren Sie das Beispielfilter mit der Frequenztransformation ($P \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{P+1/P}$) in eine äquivalente Bandsperre $G_{BS}(P)$. Dabei gilt: $\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_g}$. Welche Bedeutung kommt der Eckfrequenz ω_g nach der Transformation des Mustertiefpasses in eine Bandsperre zu?

- d) Formen Sie das Ergebnis um, so dass im Frequenzgang die statische Verstärkung A_{BS} und die Güte $Q = \frac{1}{\Delta\Omega}$ auftreten.
- e) Entnormieren Sie nun den Frequenzgang. Ersetzen Sie hierfür P und bestimmen Sie den Zusammenhang der Güte Q , der statischen Verstärkung A_{BS} und der Eckfrequenz ω_g mit den Bauteilen R_1 , R_2 und L . Geben Sie schließlich eine Dimensionierung für die Bauteile R_1 , R_2 und L an.

Teil 2: Neben analogen, aktiven Filtern wie in Abbildung 1 gezeigt gibt es auch analoge, passive Filter und diskrete Filter.

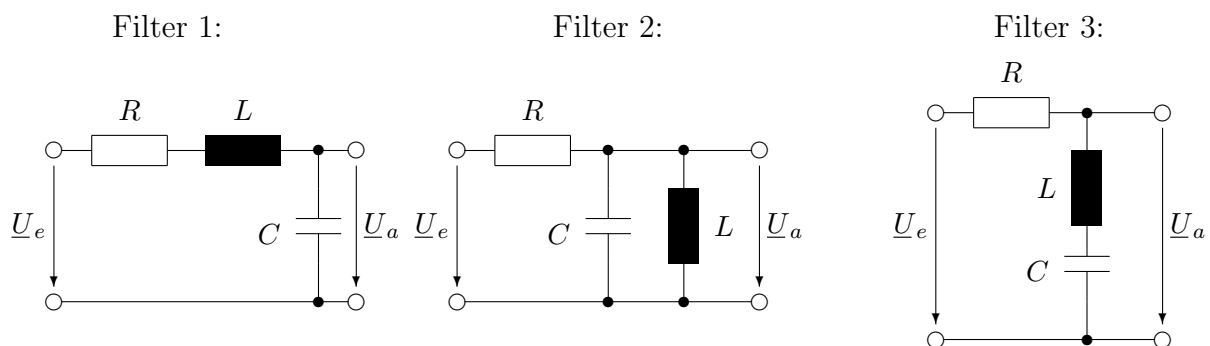


Abbildung 2: Passive Filter

- f) Welches der in Abbildung 2 gezeigten passiven Filter entspricht dem aus Abbildung 1 gezeigten aktiven Filter? Wie lautet dessen Frequenzgang?
- g) Welchen Vorteil bietet das aktive Filter aus Abbildung 1 gegenüber dem passiven Filter aus Abbildung 2?

- c) Für den Filterentwurf wird zunächst von dem normierten Frequenzgang eines Tiefpassfilters ausgegangen. Dieser Mustertiefpass ist wie folgt gegeben:

$$G_{TP}(P) = \frac{A_0}{1+P} \quad P = \frac{p}{\omega_g} \quad p = j\omega$$

Dabei ist $P = j\frac{\omega}{\omega_g}$ die auf die Eckfrequenz bezogene normierte Frequenz. Transformieren Sie das Beispielfilter mit der Frequenztransformation ($P \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{P+1jP}$) in eine äquivalente Bandsperre $G_{BS}(P)$. Dabei gilt: $\Delta\Omega = \frac{\Delta\omega}{\omega_g}$. Welche Bedeutung kommt der Eckfrequenz ω_g nach der Transformation des Mustertiefpasses in eine Bandsperre zu?

$$P = j \frac{\omega}{\omega_g} =$$

Aufgabe 2: (30 Punkte)

Ein Nachrichtensignal sei gegeben durch:

$$x(t) = 10 + 4 \cos(2\pi t) + 8 \cos(4\pi t) + 10 \cos(20\pi t).$$

- Bestimmen und skizzieren Sie die kontinuierliche Fourier-Transformierte $X(f)$ des Nachrichtensignals.
- Die Abbildung 3 zeigt eine Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation, bei der das Oberseitenband und die ersten beiden Frequenzkomponenten des Unterseitenbands durchgelassen werden.
 Bestimmen und skizzieren Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals $s(t)$.

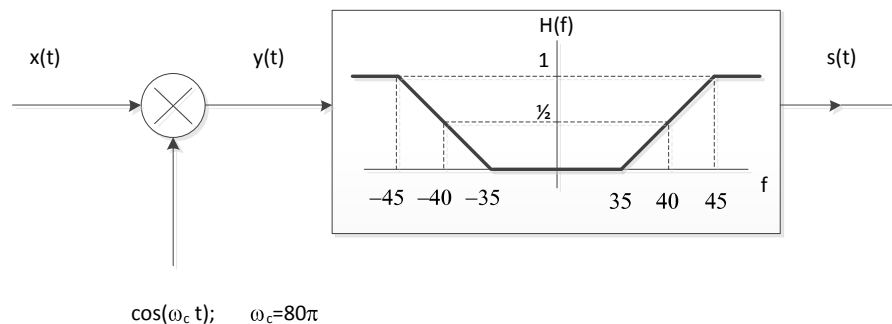


Abbildung 3: Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation

- Die Restseitenbandsignale lassen sich durch das in der Abbildung ?? dargestellte System demodulieren.
 Bestimmen und skizzieren Sie $W(f)$.

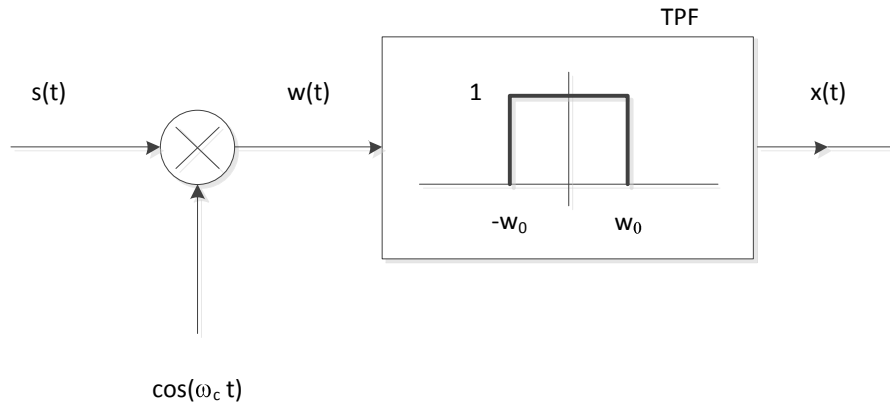


Abbildung 4: System zur Demodulation

d) Welche ist die minimale und maximale Grenzfrequenz des idealen Tiefpassfilters?

$$x(t) = 10 + 4 \cos(2\pi t) + 8 \cos(4\pi t) + 10 \cos(20\pi t).$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie die kontinuierliche Fourier-Transformierte $X(f)$ des Nachrichtensignals.

$$\cos(\omega t) \rightarrow \pi \{ \delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c) \}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = 2\pi \delta(\omega) + 4\pi \{ \underbrace{\delta(\omega - 2\pi)}_{f=1} + \underbrace{\delta(\omega + 2\pi)}_{f=-1} \} + \dots$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \delta(f - 1) \quad \delta(f + 1)$$

b) Die Abbildung 3 zeigt eine Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation, bei der das Oberseitenband und die ersten beiden Frequenzkomponenten des Unterseitenbands durchgelassen werden.

Bestimmen und skizzieren Sie die Fourier-Transformierte des modulierten Signals $s(t)$.

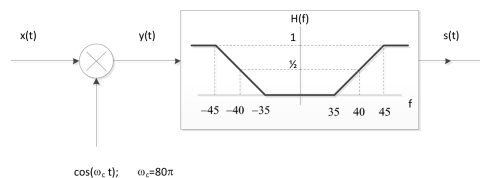


Abbildung 3: Methode zur Erzeugung einer Restseitenbandmodulation

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Die Aufgabenteile 1 - 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1:

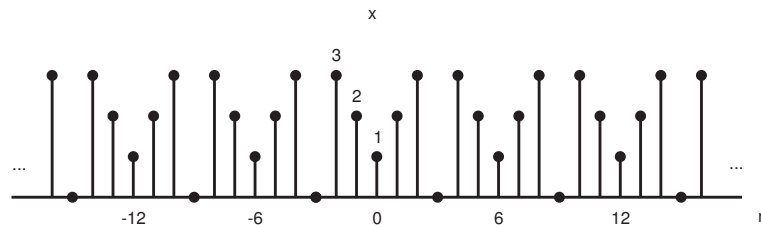


Abbildung 5: periodisches Signal $x_1[n]$

- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten für das periodische zeitdiskrete Signal aus Abbildung 4.
- Skizzieren Sie die Koeffizientenmenge a_k .

Teil 2:

Es sei das folgende LTI-System gegeben:

$$y_2[n] - \frac{3}{10}y_2[n-1] - \frac{1}{10}y_2[n-2] = 2x_2[n] + 3x_2[n-1].$$

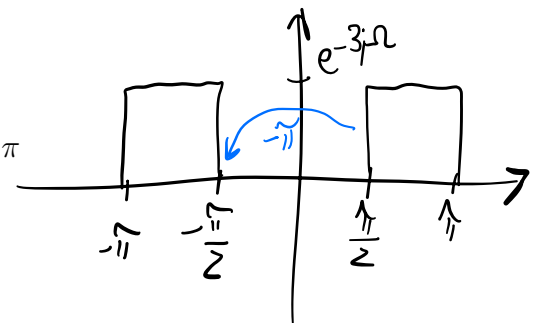
- Bestimmen Sie die zugehörige Frequenzantwort $H_2(\Omega)$.
- Bestimmen Sie die zugehörige Impulsantwort $h_2[n]$.

$$H_2(\Omega) = H_2(\Omega + j\pi) = \begin{cases} e^{-3j(\Omega + j\pi)} \\ 0 \end{cases}$$

Teil 3:

Der Frequenzgang eines Hochpassfilters lautet:

$$H_3(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ e^{-3j\Omega} & \text{für } \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$



- Berechnen Sie die Impulsantwort $h_3[n]$.
- Das Eingangssignal für den Filter lautet im Zeitbereich:

$$x_3[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{2}\right) + 3\delta(n-5) + 2.$$

Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal $y_3[n]$ für alle n .

Aufgabe 4: (20 Punkte)

In Abbildung 5 ist das Gesamtsystem zur Filterung eines zeitkontinuierlichen Signals mit einem zeitdiskreten Filter dargestellt. Für $H_1(\Omega)$ und $H_2(\omega)$ gemäß Abbildung 5 und für $1/T = 20\text{kHz}$ berechnen und skizzieren Sie

$X_p(\omega)$, $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, $Y_p(\omega)$ und $Y_c(\omega)$.

Die Skizzen enthalten: Achsenbeschriftung und Angabe der Schnittpunkte mit den jeweiligen Achsen.

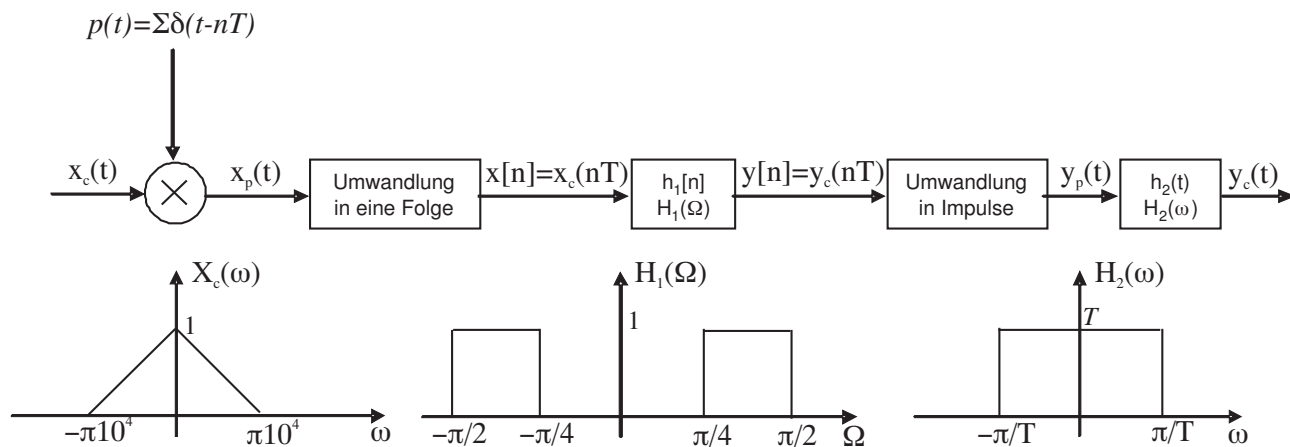


Abbildung 6: Gesamtsystem zur Filterung

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den jeweiligen Teilaufgaben. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender Signale.
 I:

$$3t + \frac{\pi}{4} = 2\pi m$$

$$x(t) = 2 \cos(3t + \frac{\pi}{4})$$

Eigenschaft	Ja	Nein
Das Signal ist aperiodisch?		X
Das Signal ist periodisch mit Periode = $2\pi/3$?	X	
Das Signal ist periodisch mit Periode = $3\pi/2$?		X

II:

$$x[n] = 2 \cos(n/4) \cos(\pi n/4)$$

Eigenschaft	Ja	Nein
Das Signal ist aperiodisch?	X	
Das Signal ist periodisch mit Periode = 4?		X
Das Signal ist periodisch mit Periode = $4/\pi$?		X

b) Bestimmen Sie die Eigenschaften folgender Systeme.

I:

$$y(t) = e^{x(t)}; \quad t \in \mathbb{R}$$

II:

$$y[n] = x[-n]; \quad n \in \mathbb{Z}$$

System	I		II	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist speicherfrei?	X			X
Das System ist zeitinvariant?	X			X
Das System ist linear?		X	X	
Das System ist kausal?	X			X
Das System ist stabil?	X	X	X	



- c) Abbildung 6 zeigt Pol-Nullstellen-Diagramme von drei unterschiedlichen LTI-Systemen. Pole sind dabei mit "x" und Nullstellen mit "o" gekennzeichnet. Bei mehrfachen Pol-, bzw. Nullstellen bezeichnet "(n)" die Quantität. Der zugehörigen Konvergenzbereich (ROC) jedes Systems ist unter dem Pol-Nullstellen-Diagramm angegeben. Markieren Sie die zutreffenden Aussagen.

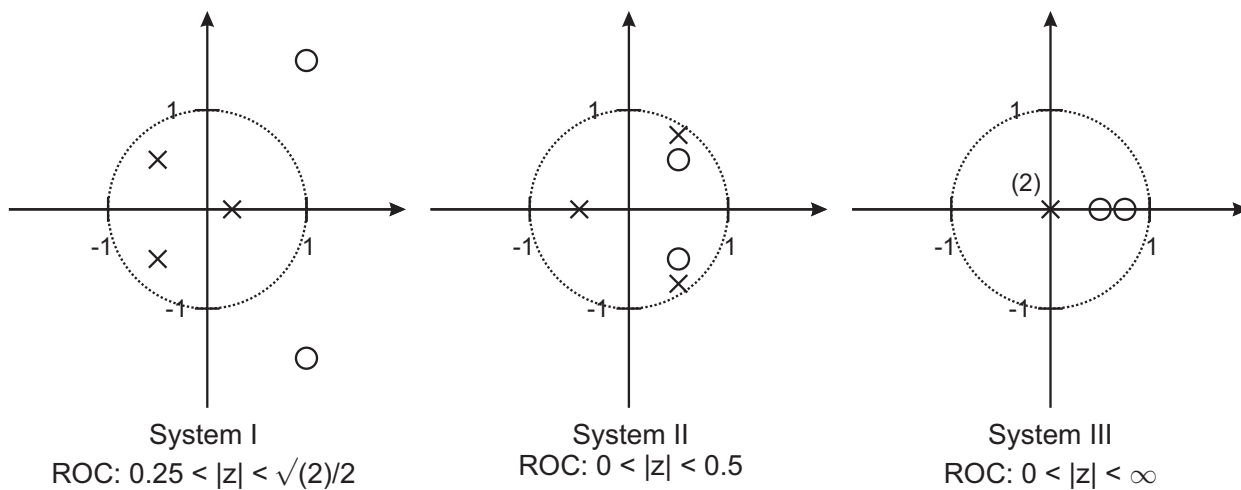


Abbildung 7: Pol-Nullstellen-Diagramme

System	I		II		III	
Eigenschaft	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Das System ist stabil?		X		X	X	
Das System ist kausal?	Ja	X	Ja	X	X	
Das System ist minimalphasig?		X	Ja	X	X	
Das System ist rekursiv?	X		X			X

Roe
 beinhaltet
 GK
 0. Zähler
 0. Nenner
 alle Pole +
 NSD in GK