UNIVERSITÄT STUTTGART
Institut für Systemdynamik

Prüfung im Fach **Elektrische Signalverarbeitung**
Prof. Dr.-Ing. C. Tarín
Wintersemester 2019/2020 am 13.02.2020, 08:00 – 10:00 Uhr

Bitte tragen Sie auf diesem Doppelblatt Ihren Namen, Ihre Fachrichtung und Ihre Matrikelnummer ein. Versehen Sie alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und legen Sie diese Blätter und die Aufgabenblätter bei Prüfungsende in das Doppelblatt ein.

Hilfsmittel: Zwei DIN A4 Seiten selbsterstellte Formelsammlung.

Name, Vorname: _____

Fachrichtung: _____ Matr.-Nr.: _____

Wiederholungsprüfung: ❍ Ja ❍ Nein Versuch Nr.: _____

Nur für Wiederholende:
Studierende, die diese schriftliche Prüfung als Wiederholungsprüfung ablegen und nicht bestehen, sind verpflichtet, sich unmittelbar nach Bekanntgabe der Prüfungsergebnisse beim Prüfungsamt über die Auswirkungen des Ergebnisses und das weitere Vorgehen zu erkundigen. Im Falle einer mündlichen Nachprüfung muss schnellstmöglich eine Anmeldung über den Prüfer/ die Prüferin/ das Sekretariat vorgenommen werden.

Zur Kenntnis genommen: _____
(Unterschrift)

Aufgabe	Punktezahl	Erreichte Punktezahl
1	10	
2	10	
3	29	
4	21	
5	28	
6	22	
Summe:	120	

Korrektur: _____

Prüfer/in: _____

Einsicht: _____

Note: _____

☐ Überziehung der Bearbeitungszeit

Gruppe **A**

Musterlösung und Punkteverteilung

Gruppe A

Hinweise:

- Bearbeitung der Aufgaben erfolgt auf den Bögen.
- Benutzen Sie kein eigenes Papier.
- Benutzen Sie *keine rote Farbe* und keine Rottöne.
- Heftklammern dürfen nicht entfernt werden.

Bitte beachten Sie: Falls nicht ausdrücklich anders angegeben, ist der Lösungsweg Teil der geforderten Prüfungsleistung. Die Angabe des korrekten Ergebnisses ohne Lösungsweg ergibt im Allgemeinen nicht die volle Punktzahl.

Hinweis zu den Multiple-Choice Aufgaben: Bitte bearbeiten Sie die Multiple-Choice Aufgaben *eindeutig* und *nur* auf dem Aufgabenblatt. Markieren Sie dazu die von Ihnen gewählte(n) Antwort(en jeweils) mit einem Kreuz. Vollständig ausgefüllte Kästchen dienen zur Korrektur und werden wie nicht angekreuzt gewertet. Ein Lösungsweg ist bei Multiple-Choice Aufgaben nicht notwendig.

Aufgabe 1 *Abtastung* *(10 Punkte)*

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist pro Teilaufgabe immer nur EINE der möglichen Antworten richtig. Lösen Sie die anderen Aufgabenteile ebenfalls auf dem Aufgabenblatt.

Betrachten Sie ein zeitkontinuierliches reelles Tiefpass-Signal $x_c(t)$, dessen höchste Frequenz kleiner als $2\pi 100$ rad/s ist. Der Ausgang eines Filterungssystems sei beschrieben durch $y_c(t) = x_c(t - \frac{1}{800})$.

a) Berechnen Sie die minimale Abtastfrequenz für das Tiefpass-Signal $x_c(t)$ so, dass das Nyquist-Theorem erfüllt ist und eine Rückgewinnung des Signals durch Interpolation möglich ist.

Lösung:

Lösung (2 Punkte): $F_{min} > 2 \cdot 100\,\text{Hz} = 200\,\text{Hz}$

b) Falls $x[n] = x_c[\frac{n}{400}]$, kann man theoretisch $x_c(t)$ aus $x[n]$ zurückgewinnen?

- ○ Nein, denn ein reelles Signal kann nie nach der Abtastung zurückgewonnen werden.
- ○ Nein, denn das Nyquist-Kriterium wird nicht eingehalten.
- ● Ja, denn das Nyquist-Kriterium wird eingehalten.
- ○ Ja, denn reelle Signale können stets nach der Abtastung zurückgewonnen werden.

c) Berechnen Sie die minimale Abtastfrequenz für das gefilterte Tiefpass-Signal $y_c(t)$ so, dass das Nyquist-Theorem erfüllt ist und eine Rückgewinnung des Signals durch Interpolation möglich ist.

Lösung:

Lösung (2 Punkte): $F_{min} > 200\,\text{Hz}$

d) Falls $y[n] = y_c[\frac{n}{400}]$, kann man theoretisch $y_c(t)$ aus $y[n]$ zurückgewinnen?

- ○ Ja, denn in diesem Fall hat sich die Nyquistfrequenz verdoppelt.
- ● Ja, denn das Nyquist-Kriterium wird weiterhin eingehalten.
- ○ Nein, denn eine Zeitverschiebung verändert auch die Nyquistfrequenz.
- ○ Nein, denn das Nyquist-Kriterium wird weiterhin nicht eingehalten.

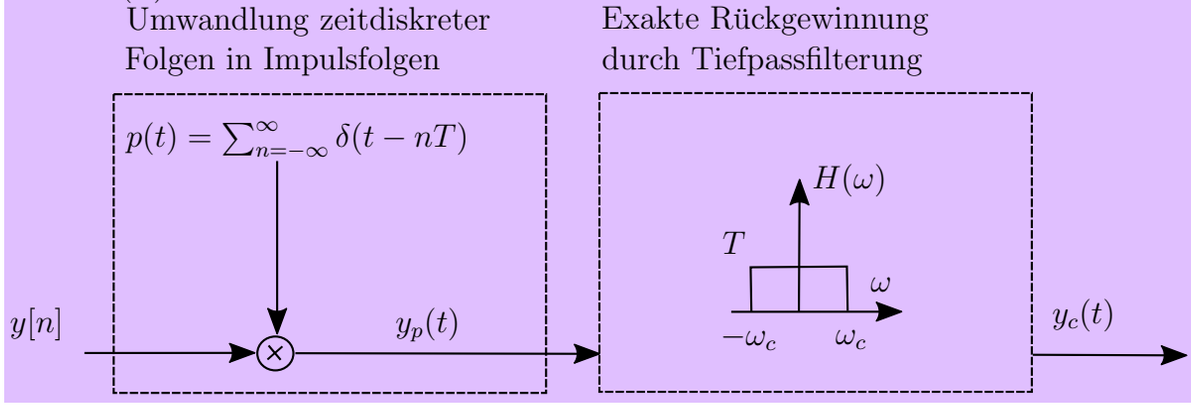
e) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ○ Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Frequenzverschiebung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals wird verändert.
- ● Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Phasendrehung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals bleibt unverändert.
- ○ Eine Zeitverschiebung im Zeitbereich entspricht einer Skalierung im Frequenzbereich, der Betrag des Signals wird verändert.

f) Geben Sie ein Blockschaltbild an, mit dem es möglich wäre aus dem abgetasteten Signal $y[n]$ das Originalsignal $y_c(t)$ zurückzugewinnen. Wenn die Abtastung ideal ist, welche Verluste muss man dennoch hinnehmen, wenn man dieses System mit realen Schaltungen implementiert?

Lösung:

Lösung (2 Punkte): Verluste entstehen durch nicht realisierbaren TP-Filter.
Hier: $H(\omega)$ ist TP-Filter



Aufgabe 2 *Modulation* *(10 Punkte)*

Eines der größten Anwendungsgebiete sinusförmiger Amplitudenmodulation sind Informationsübertragungssysteme im Bereich der Nachrichtentechnik. Die Notwendigkeit der Modulation ergibt sich aus zwei Gründen.

a) Nennen Sie diese zwei Gründe mit einer kurzen Erklärung bzw. einem kurzen Beispiel.

Lösung:

Lösung (2 Punkte): 1. Übertragungskanäle haben oft eine höhere Frequenz als Nutzsignale, z.B. Radio.
2. Durch die Amplitudenverstärkung kann man längere Signalstrecken ohne Fehler überbrücken; das Signal selbst könnte zu schwach und damit rauschanfällig sein.
3. Durch eine schmalere Bandbreite können mehrere Signale auf einmal übertragen werden (Frequenzmultiplex).

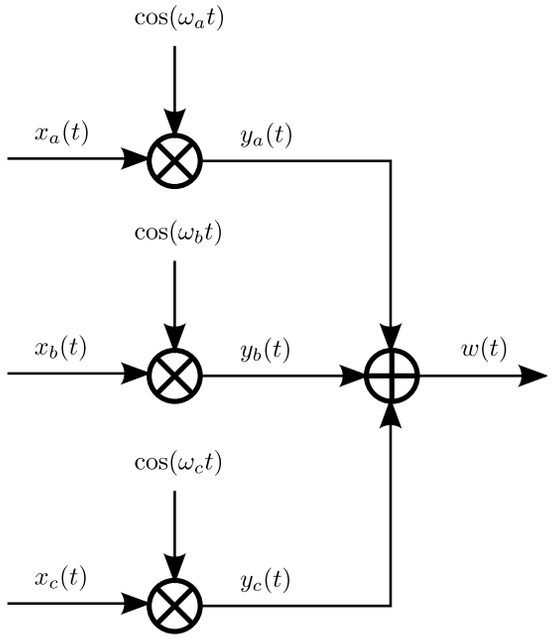


Abbildung 1: Frequenzmultiplex unter Verwendung sinusförmiger Amplitudenmodulation.

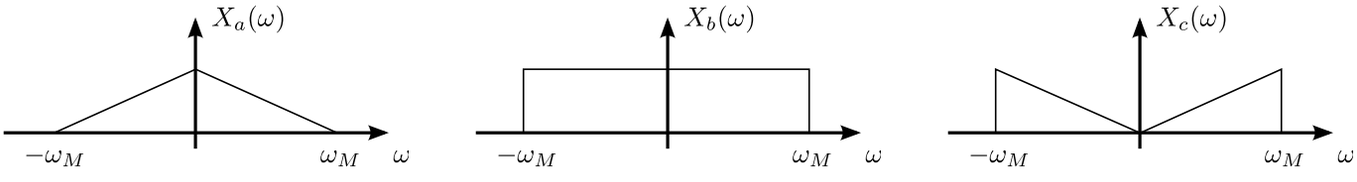


Abbildung 2: Bandbegrenzte Spektren der Siganle der Kanäle a, b und c.

Das Verfahren des Frequenzmultiplex ist in der Abbildung 1 dargestellt.
Hierbei gilt $\omega_c > \omega_b > \omega_a$. Die Spektren der Signale der Kanäle a, b und c entsprechen den in der Abbildung 2 gezeigten, jeweils mit ω_M bandbegrenzten Spektren.

b) Welche Bedingungen müssen ω_a, ω_b und ω_c bezüglich ω_M erfüllen, damit alle Kanäle exakt rekonstruiert werden können?

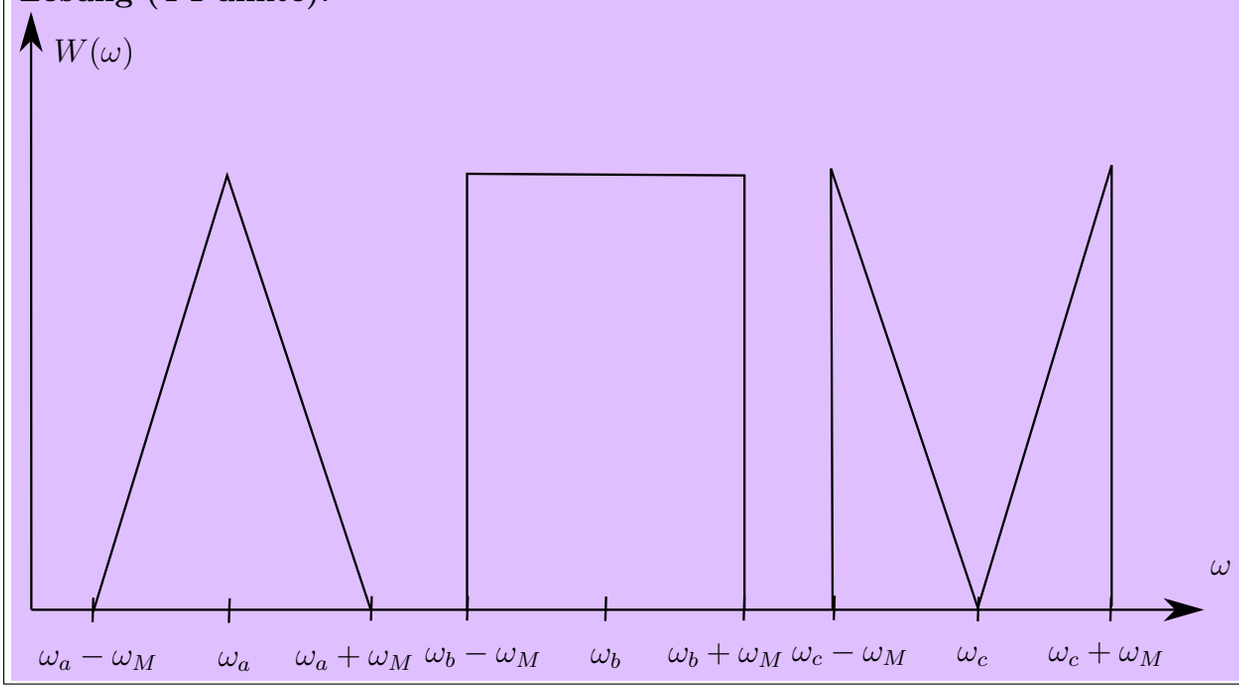
Lösung:

Lösung (2 Punkte):
1. $\omega_b - \omega_M > \omega_a + \omega_M$
2. $\omega_c - \omega_M > \omega_b + \omega_M$
3. $\omega_a > \omega_M$, $\omega_b > \omega_M$, $\omega_c > \omega_M$
$\Rightarrow$ 3. in 1.: $\omega_b > \omega_a + 2\omega_M \rightleftarrows \omega_b > 3\omega_M$ (4)
3. in 2.: $\omega_c > \omega_b + 2\omega_M$ mit (4): $\omega_c > 5\omega_M$

c) Skizzieren Sie das Spektrum $W(\omega)$ des Signals $w(t)$ für $\omega \geq 0$ unter der Annahme, dass die Bedingung aus Teilaufgabe 1b) erfüllt ist. Kennzeichen Sie dabei die Abschnitte auf der ω-Achse.

Lösung:

Lösung (4 Punkte):



d) Welche zwei Verarbeitungsschritte müssen zur Rekonstruktion der Signale der einzelnen Kanäle durchgeführt werden?

Lösung:

Lösung (2 Punkte):
- Demultiplexen
- Demodulieren

Aufgabe 3 *Fourier* *(29 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1 (11 Punkte):

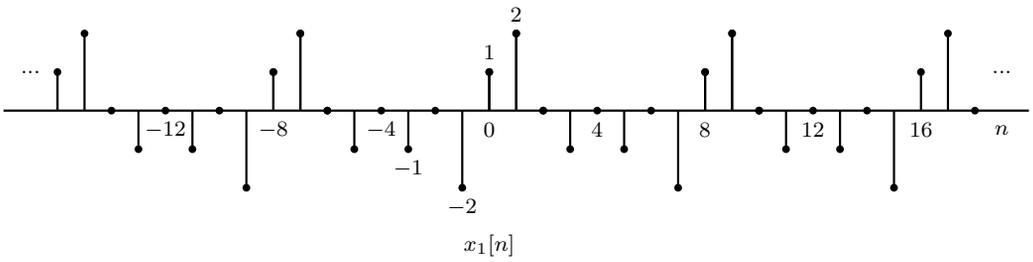


Abbildung 3: periodisches Signal $x_1[n]$

Es sei das periodische Signal $x_1[n]$ aus Abbildung 3 gegeben.

a) Bestimmen Sie die Periodendauer N des Signals $x_1[n]$.

Lösung (1 Punkte): N=8. (1)

b) Geben Sie eine Periode des Signals als Impulsfolge an.

Lösung (2 Punkte):

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1[n] &= -\delta[n+3] - 2\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \\ &= \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] - \delta[n-5] - 2\delta[n-7]\end{aligned}$$ (2)

c) Bestimmen Sie die Spektralkoeffizienten der Fourier-Reihe für das periodische, zeitdiskrete Signal $x_1[n]$. Wie lautet die Fourier-Reihendarstellung von $x_1[n]$? Vereinfachen Sie so weit wie möglich (z.B. Eulerformel). Setzen Sie alle bekannten Größen ein.

Lösung (4 Punkte):

$$
\begin{aligned}
a_{1,k} &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x_1[n] e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\
&= \frac{1}{8}\left(-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)(-3)} - 2e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)(-1)} + 1 + 2e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 1} - e^{-jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 3}\right) \quad \textbf{2} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\frac{2}{2}\left(e^{jk\frac{3\pi}{4}} + e^{-jk\frac{3\pi}{4}}\right) - \frac{2}{8}\frac{2j}{2j}\left(e^{jk\frac{\pi}{4}} - e^{-jk\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) - \frac{j}{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi k\right) \quad \textbf{1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= \sum_{k=<N>} a_{1,k} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\
&= \sum_{k=<8>} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) - \frac{j}{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi k\right)\right) e^{jk\left(\frac{2\pi}{8}\right)n} \quad \textbf{1}
\end{aligned}
$$

Nun sei $\tilde{x}_1[n]$ ein aperiodisches Signal mit

$$\tilde{x}_1[n] = \begin{cases} x_1[n] & \text{für } n \in [-3, .., 4] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $x_1[n]$ in Abbildung 3 dargestellt ist. Die Fouriertransformierte von $\tilde{x}_1[n]$ sei $X_1(\Omega)$.

d) Bestimmen Sie $X_1(\Omega)$. Wie groß ist der Betrag $|X_1(0)|$? Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Lösung (4 Punkte): Allgemein gilt

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}.$$

Angewandt auf $\tilde{x}_1[n]$ folgt

$$\begin{aligned} X_1(\Omega) &= \sum_{n=-3}^{4} \tilde{x}_1[n] e^{-j\Omega n} \\ &= -e^{-j\Omega(-3)} - 2e^{-j\Omega(-1)} + 1 + 2e^{-j\Omega\cdot 1} - e^{-j\Omega\cdot 3} \quad (2) \\ &= -e^{j3\Omega} - 2e^{j\Omega} + 1 + 2e^{-j\Omega} - e^{-j3\Omega} \\ &= 1 - 2\frac{2j}{2j}\left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega}\right) - \frac{2}{2}\left(e^{j3\Omega} + e^{-j3\Omega}\right) \\ &= e^{-j0\Omega}\left(1 - 4j\sin(\Omega) - 2\cos(3\Omega)\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Der Betrag $|X_1(0)|$ kann nun abgelesen werden:

$$|X_1(0)| = |1 - 2| = |-1| = 1 \quad (1)$$

Teil 2 (7 Punkte):

Gegeben sei das periodische, zeitdiskrete Signal

$$x_2[n] = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{8\pi}{7}n - \frac{\pi}{5}\right).$$

f) Für welches N gilt $x_2[n] = x_2[n-N]$? Wie viele Perioden m des äquivalenten zeitkontinuierlichen Signals $x_2(t)$ vergehen während einer Periode von $x_2[n]$?

Lösung (2 Punkte):

$$\frac{8\pi}{7}N = 2\pi m$$

$$N = 7 \quad (1)$$

$$m = 4 \quad (1).$$

g) Berechnen Sie die Spektralkoeffizienten a_k für $k \in [0, N-1]$ für die Darstellung des Signals $x_2[n]$ als zeitdiskrete Fourier-Reihe.

Lösung (5 Punkte):

$$x_2[n] = \frac{4}{3}\frac{1}{2j}\left(e^{j\left(\frac{8\pi}{7}n-\frac{\pi}{5}\right)} - e^{-j\left(\frac{8\pi}{7}n-\frac{\pi}{5}\right)}\right) \quad (1)$$
$$= -\frac{2}{3}je^{-j\frac{\pi}{5}}e^{j\frac{8\pi}{7}n} + \frac{2}{3}je^{j\frac{\pi}{5}}e^{-j\frac{8\pi}{7}n}$$

Vergleich mit Definition

$$x_2[n] = \sum_{k=<N>} a_{2,k}e^{jk\frac{2\pi}{7}n}$$

liefert

$$a_{2,4} = -\frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{5}} \quad (2)$$

$$a_{2,-4} = a_{2,-4+N} = a_{2,3} = \frac{2}{3}je^{j\frac{\pi}{5}} \quad (2)$$

Teil 3 (11 Punkte):

Es sei das zeitdiskrete LTI-System aus Abbildung 4 mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

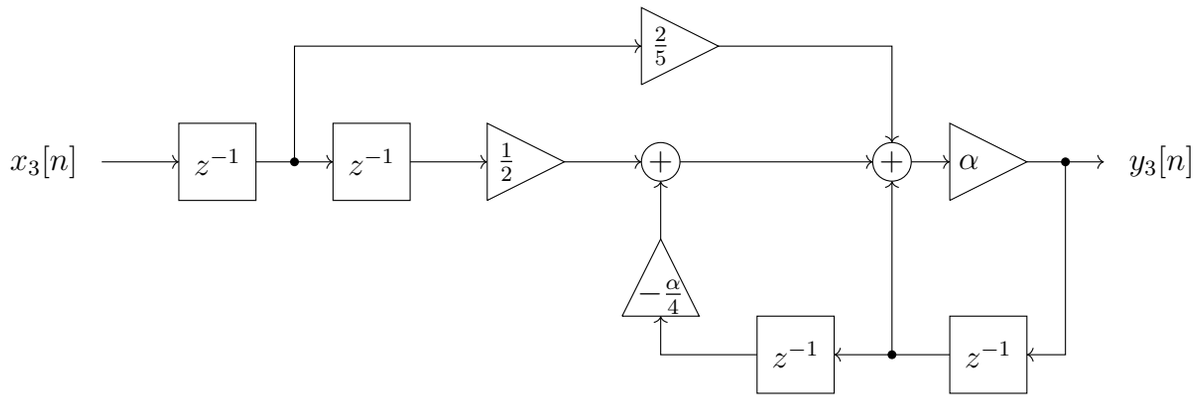


Abbildung 4: LTI-System.

h) Geben Sie die Differenzengleichung des Systems und deren z-Transformierte an.

Lösung (2 Punkte):

$$Y_3(z) = \frac{2\alpha}{5} z^{-1} X_3(z) + \frac{\alpha}{2} z^{-2} X_3(z) + \alpha z^{-1} Y_3(z) - \frac{\alpha^2}{4} z^{-2} Y_3(z) \quad (1)$$

$$y_3[n] = \frac{2\alpha}{5} x_3[n-1] + \frac{\alpha}{2} x_3[n-2] + \alpha y_3[n-1] - \frac{\alpha^2}{4} y_3[n-2] \quad (1)$$

i) Wie lauten die Übertragungsfunktion $H_3(z) = \frac{Y_3(z)}{X_3(z)}$ und deren Impulsantwort $h_3[n]$? Geben Sie die verwendeten Eigenschaften und Korrespondenzen der z-Transformation an.

Lösung (4 Punkte):

$Y_3(z)(1 - \alpha z^{-1} - \frac{\alpha^2}{4} z^{-2}) = X_3(z)(\frac{2\alpha}{5} z^{-1} + \frac{\alpha}{2} z^{-2})$

Ü-Fkt $H_3(z) = \frac{Y_3(z)}{X_3(z)} = \frac{\frac{2}{5}\alpha z^{-1} + \frac{\alpha}{2} z^{-2}}{1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha^2}{4} z^{-2}} = \frac{\frac{\alpha}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2} z^{-1}\right)^2} \left(\frac{4}{5} + z^{-1}\right)$ (0.5)

Kausales System (0.5) + Linearität (0.5) + Zeitverschiebung (0.5) + Korr. 6: (0.5)

$$h_3[n] = \frac{4}{5} n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n u[n] + (n-1) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} u[n-1], \quad (1.5) \quad \left(|z| > |\frac{\alpha}{2}|\right)$$

j) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $H_3(z)$. Für welche α ist das System stabil?

Lösung (2 Punkte):
Pole: $z_{1,2} = \frac{\alpha}{2}$

ROC: kausales System, daher $|z| > \frac{|\alpha|}{2} = |\frac{\alpha}{2}|$. (1)

Einheitskreis liegt für $|\alpha| < 2$ im ROC. (1)

k) Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in folgender Tabelle mit einem Kreuz. Vollständig ausgefüllte Kästchen werden als nicht markiert gewertet. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können für die Teilaufgabe nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Welche der folgenden Eigenschaften beschreiben das System für den **gesamten Definitionsbereich** von α korrekt?

Lösung (3 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P

(3)

Eigenschaft	Wahr	Falsch
Das System besitzt eine endliche Impulsantwort.		✓
Das System ist stabil.		✓
Das System ist instabil.		✓
Das System ist kausal.	✓	
Das System kann mit 2 Speichern realisiert werden.	✓	
Das System besitzt eine Ausgangs-Rückführung.	✓	

Aufgabe 4 *Filterentwurf* *(21 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

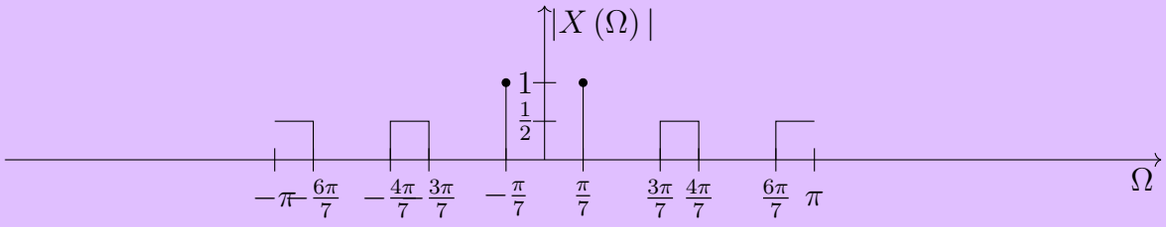
Teil 1 (15 Punkte): Gegeben sei das analoge Eingangssignal $x(t)$ mit drei unterscheidbaren Anteilen in den im Folgenden beschriebenen Frequenzbändern:

- Überreste der Trägerfrequenz $X_T(\Omega)$ mit $|X_T(\Omega)| = 1$ für $|\Omega| = \frac{1}{7}\pi$
- das Nutzsignal $X_N(\Omega)$ mit $|X_N(\Omega)| = \frac{1}{2}$ für $\frac{3}{7}\pi \leq |\Omega| \leq \frac{4}{7}\pi$
- hochfrequentes Rauschen $X_R(\Omega)$ mit $|X_R(\Omega)| = \frac{1}{2}$ für $|\Omega| > \frac{6}{7}\pi$.

Für alle anderen Frequenzen ist $X(\Omega) = 0$. Das Signal soll von einem A/D-Wandler bei fester Abtastrate erfasst werden. Hierbei ist $X(\Omega)$ das abgetastete Signal.

a) Skizzieren Sie die Amplituden des Eingangssignals $X(\Omega)$ auf dem Intervall $\Omega = [-\pi, \pi]$.

Lösung (2 Punkte):
0,5 für Achsenskalierung, 0,5 für Achsenbeschriftung, 1 für korrekte Frequenzen



b) Welcher Signalanteil macht die eindeutige Abtastung des Eingangssignals unmöglich? Wie nennt sich dieses Problem? Bis zu welcher Frequenz $\Omega_{\max}$ kann das Signal theoretisch eindeutig aus der Abtastung zurückgewonnen werden?

Lösung (2 Punkte):
Der Rauschanteil würde sich mit Nutzsignal überlagern und macht daher die eindeutige Abtastung unmöglich 0,5, Stichwort Aliasing 0,5. Das Signal kann bis $\Omega_{\max} = \pi$ (Nyquistfrequenz) eindeutig aus der Abtastung zurückgewonnen werden 1.

c) Um eine eindeutige Abtastung zu ermöglichen, soll ein analoges Vorfilter mit hoher Güte verwendet werden. Welches ideale Filter kommt dafür in Frage?

Lösung (1 Punkte):

- ● Tiefpass mit $\Omega_g = \frac{11}{14}\pi$
- ○ Tiefpass mit $\Omega_g = \frac{7}{6}\pi$
- ○ Bandpass mit $\Omega_m = \frac{6}{7}\pi$, $\Delta\Omega = \frac{2}{7}\pi$
- ○ Bandpass mit $\Omega_m = \frac{7}{14}\pi$, $\Delta\Omega = \frac{1}{14}\pi$
- ○ Bandsperre mit $\Omega_m = \frac{7}{14}\pi$, $\Delta\Omega = \frac{1}{7}\pi$
- ○ Bandsperre mit $\Omega_m = \frac{7}{14}\pi$, $\Delta\Omega = \frac{2}{7}\pi$
- ○ Hochpass mit $\Omega_g = \frac{5}{7}\pi$
- ○ Hochpass mit $\Omega_g = \frac{6}{7}\pi$

d) Zur Isolierung des Nutzsignals soll nach erfolgter Abtastung ein digitales Filter entworfen werden. Es soll durch Hintereinanderschaltung von einem oder mehrerer der zur Verfügung stehenden Filter

$$H_1(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\Omega| < \frac{5}{7}\pi \\ 0 & \text{für } \frac{5}{7}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_2(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{2}{7}\pi < |\Omega| < \frac{5}{7}\pi \\ 1 & \text{für } |\Omega| \leq \frac{2}{7}\pi \quad \text{und} \quad \frac{5}{7}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_3(\Omega) = \begin{cases} 4e^{-2j\Omega} & \text{für } |\Omega| \leq \frac{3}{7}\pi \\ 0 & \text{für } |\Omega| > \frac{3}{7}\pi \end{cases}$$

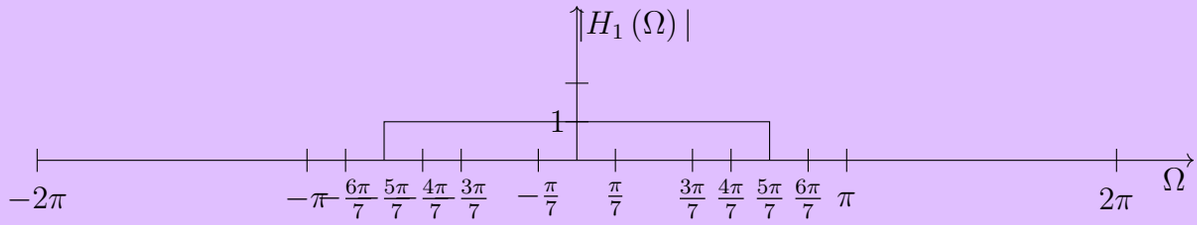
$$H_4(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Omega| < \frac{2}{7}\pi \\ 4e^{-2j\Omega} & \text{für } \frac{2}{7}\pi \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

realisiert werden. Wählen Sie das/die Filter aus und geben Sie die korrekte Verschaltung an. Geben Sie den Filtertyp des/der verwendeten Filter und des resultierenden Filters an und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum des/der verwendeten Filter und des resultierenden Filters. Geben Sie auch die Übertragungsfunktion des resultierenden Filters an.

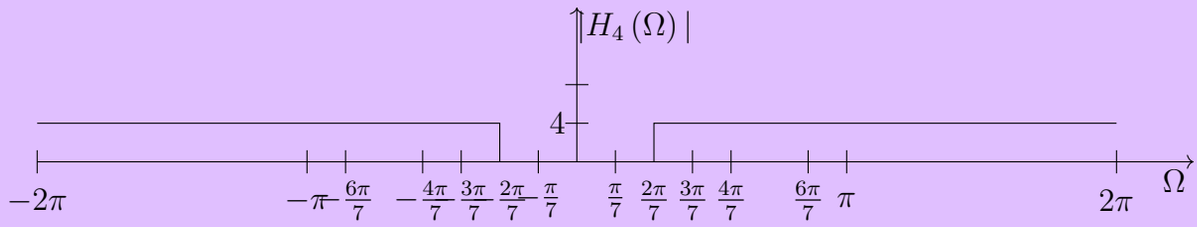
Lösung (5 Punkte):

Korrekte Verschaltung: $H(\Omega) = H_1(\Omega) \cdot H_4(\Omega)$ (1) $= \begin{cases} 4e^{-2j\Omega} & \text{für } \frac{2}{7}\pi \leq |\Omega| < \frac{5}{7}\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (1)

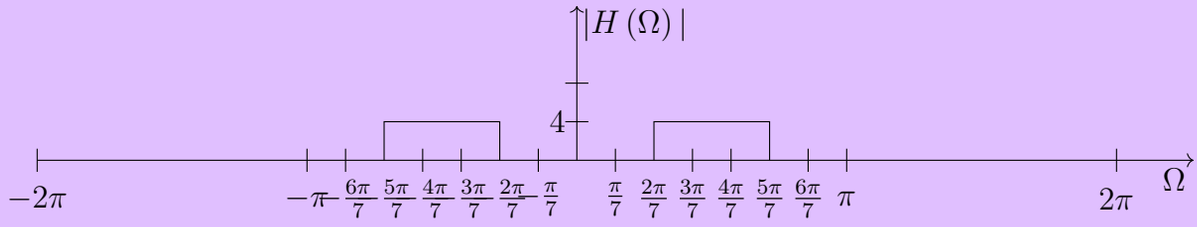
$H_1(\Omega)$ ist Tiefpassfilter + Skizze (1),



$H_4(\Omega)$ ist Hochpassfilter + Skizze (1),



$H(\Omega)$ ist Bandpassfilter + Skizze (1)



e) Das Nutzsignal vor der Filterung lautet im Zeitbereich:

$$x[n] = \sin\left(\frac{7}{14}\pi n + \frac{1}{7}\pi\right).$$

Bestimmen Sie das zugehörige Ausgangssignal. Hinweis: Sie müssen $h[n]$ nicht explizit berechnen.

Lösung (3 Punkte):

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Nur eine Frequenz bei $\frac{7}{14}\pi$: (1)

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * \sin\left(\frac{7}{14}\pi n + \frac{1}{7}\pi\right) \\ &= \left|H\left(\frac{7}{14}\pi\right)\right| \sin\left(\frac{7}{14}\pi n + \frac{1}{7}\pi + < \left(H\left(\frac{7}{14}\pi\right)\right)\right) \quad (1) \\ &= 4\sin\left(\frac{7}{14}\pi n + \frac{1}{7}\pi - \pi\right) \quad (1) \end{aligned}$$

f) Das Nutzsignal erfährt durch das ausgesuchte Filter zwei Änderungen. Nennen und quantisieren Sie die beiden Änderungen. Welche dieser Änderungen lässt/ lassen sich einfach (im Sinne der Kausalität) nach der Filterung herausrechnen? Welche nicht und warum nicht?

Lösung (2 Punkte):

Es erfährt eine Verstärkung um den Faktor 4 (0,5) und eine Phasenverzögerung um π (0,5). Die Verstärkung kann herausgerechnet werden (0,5). Die Phasenverzögerung ist zwar bekannt, kann aber nicht kausal berechnet werden (0,5).

Teil 2 (6 Punkte):

Gegeben sei ein lineares, zeitinvariantes und zeitdiskretes System mit der Systemfunktion

$$H(z) = \frac{(1 - 0.3z^{-1})\,(1 + 16z^{-2})}{(1 - 0.49z^{-2})}.$$

g) Bestimmen Sie ein minimalphasiges System $H_{\min,1}(z)$ und ein Allpass-System $H_{\text{ap}}(z)$, so dass

$$H(z) = H_{\min,1}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z).$$

Achten Sie bei allen Teilsystemen auf Realisierbarkeit.

Lösung (3 Punkte):
Allpass: Pole konjugiert reziprok zu NS
Minimalphasig: alle Pole und NS in EK

$$H_{\text{ap}}(z) = \frac{z^2 + 16}{z^2 + \frac{1}{16}} = \frac{1 + 16z^{-2}}{1 + \frac{1}{16}z^{-2}} \quad \textbf{1,5}$$

Neue Pole bei $z = \pm\frac{1}{4}j$ müssen bei $H_{\min,1}$ als NS auftauchen.

$$H_{\min,1}(z) = \frac{(z - 0.3)\left(z^2 + \frac{1}{16}\right)}{z\,(z^2 - 0.49)} = \frac{(1 - 0.3z^{-1})\left(1 + \frac{1}{16}z^{-2}\right)}{(1 - 0.49z^{-2})} \quad \textbf{1,5}$$

h) Bestimmen Sie ein weiteres minimalphasiges System $H_{\min,2}(z)$ und ein linearphasiges FIR-System $H_{\text{lin}}(z)$, so dass

$$H(z) = H_{\min,2}(z) \cdot H_{\text{lin}}(z).$$

Achten Sie bei allen Teilsystemen auf Realisierbarkeit.

Lösung (3 Punkte):
FIR: Pole bei 0
Linearphasig: NS sind konjugiert reziprok
Ergänzung konjugiert reziproker NS und Ergänzung 4 Pole bei 0 für Kausalität

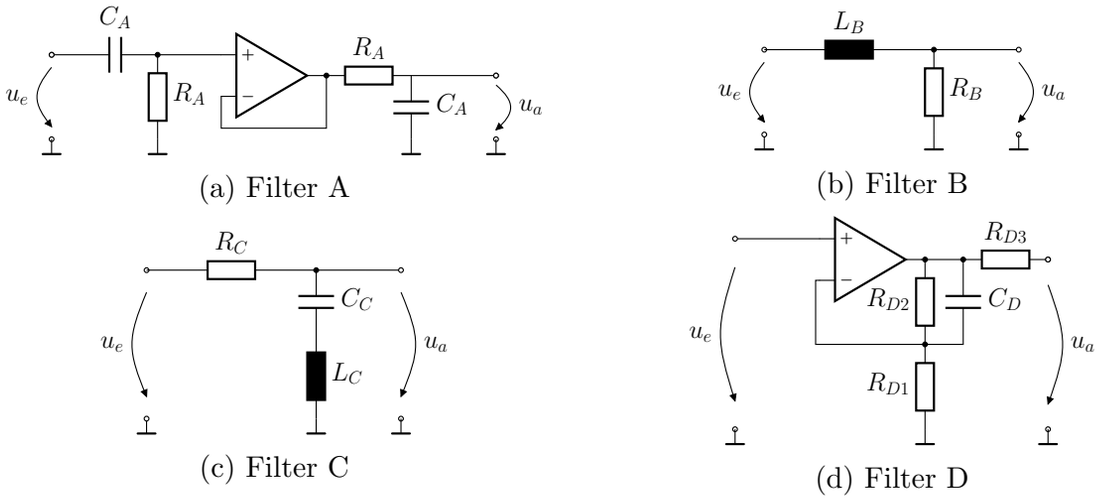
$$H_{\text{lin}}(z) = \frac{(z^2 + 16)\left(z^2 + \frac{1}{16}\right)}{z^4} = \left(1 + 16z^{-2}\right)\left(1 + \frac{1}{16}z^{-2}\right) \quad \textbf{1,5}$$

$$H_{\min,2}(z) = \frac{(z - 0.3)\,z^4}{z\,(z^2 - 0.49)\left(z^2 + \frac{1}{16}\right)} = \frac{(1 - 0.3z^{-1})}{(1 - 0.49z^{-2})\left(1 + \frac{1}{16}z^{-2}\right)} \quad \textbf{1,5}$$

Aufgabe 5 *Analogfilter* *(28 Punkte)*

Die Aufgabenteile 1, 2 und 3 können **unabhängig** voneinander gelöst werden.

Teil 1: (8 Punkte)



(a) Filter A (b) Filter B

(c) Filter C (d) Filter D

Abbildung 5: Analoge Filter

Die Schaltungen in Abbildung 5 zeigen verschiedene analoge Filtervarianten. Nehmen Sie im Folgenden an, dass alle genutzten Operationsverstärker als ideal betrachtet werden können.

a) Bestimmen Sie die Eigenschaften der Filter aus Abbildung 5.

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen. Es sind keine Begründungen notwendig. Vollständig ausgefüllte Kästchen werden als nicht markiert gewertet. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können insgesamt nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P

Eigenschaft	Filter A		Filter B		Filter C		Filter D	
	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Die Ausgangsimpedanz ist Null / Eine Last am Filterausgang hat **keinen** Einfluss auf die Übertragungsfunktion		✓		✓		✓		✓

b) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}_A(j\omega)$ des Filters A.

Lösung (2 Punkte):
Kombination RC Tiefpass und RC Hochpass mit Impedanzwandler

$$\begin{aligned}
\underline{A}_A(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega R_A C_A}\,\textcircled{1}\cdot\frac{j\omega R_A C_A}{1+j\omega R_A C_A}\,\textcircled{1} \\
&= \frac{j\omega R_A C_A}{1+j\omega R_A C_A + j\omega R_A C_A - \omega^2 R_A R_A C_A C_A} \\
&= \frac{j\omega R_A C_A}{(1+j\omega R_A C_A)^2} \qquad = \frac{j\omega R_A C_A}{1+2j\omega R_A C_A - \omega^2 R_A^2 C_A^2}
\end{aligned}$$

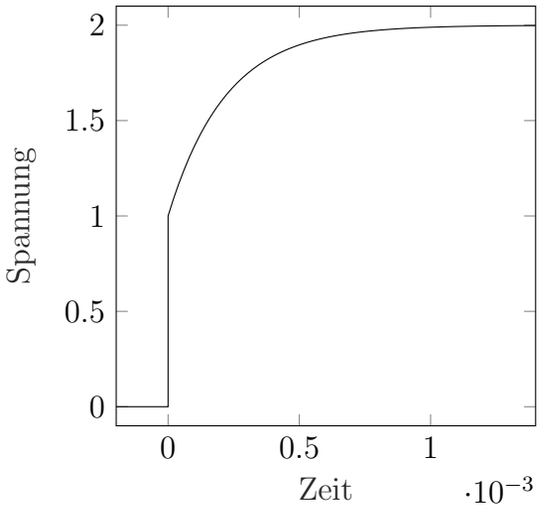
c) Ordnen Sie die folgenden Sprungantworten den Filtern aus Abbildung 5 zu.

Das Eingangssignal ist somit $u_e(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$.

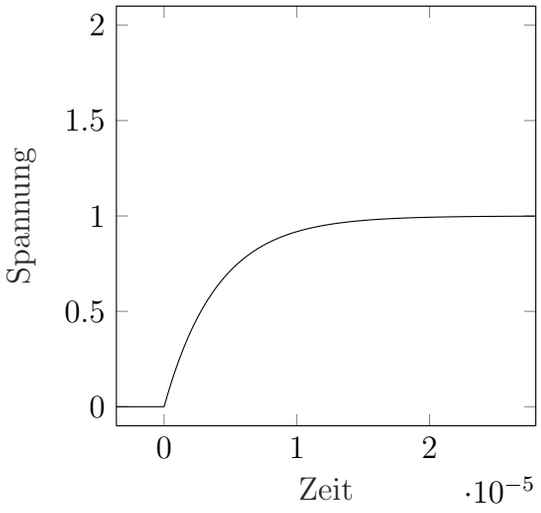
Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können insgesamt nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Lösung (4 Punkte):

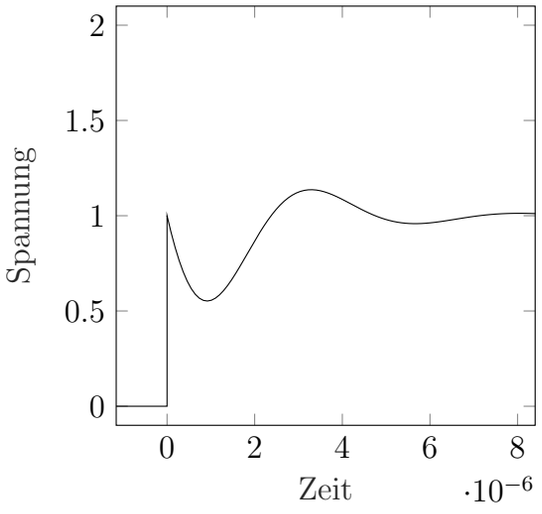
- Pro richtiger Antwort +1 P
- Pro falscher Antwort −1 P
  Vorgehen:
  Berechnete Übertragungsfunktion von Filter A aus vorheriger Teilaufgabe hat Endwert 0 und kann direkt zugeordnet werden.
  Das andere aktive Filter muss das mit Verstärkung > 1 sein.
  Die beiden passiven Filter springen beide von 0 auf 1, aber nur das mit C und L kann schwingen.



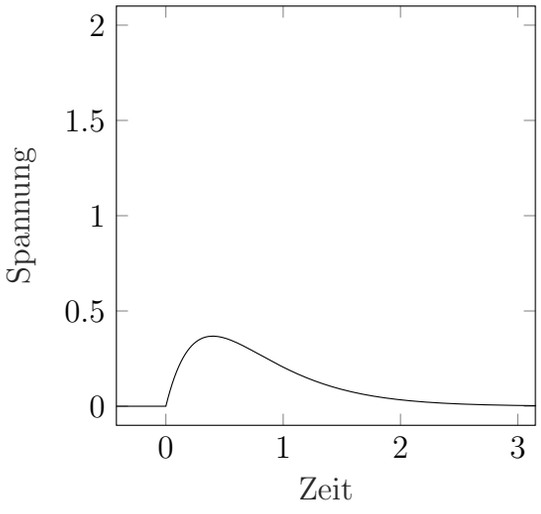
Filter D



Filter B



Filter C



Filter A

Teil 2: (11 Punkte)

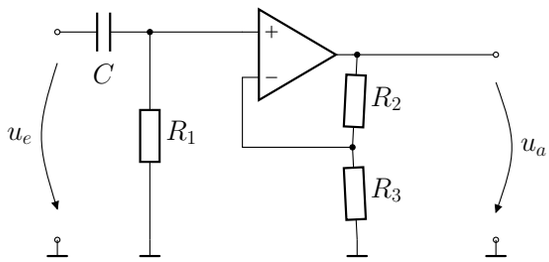


Abbildung 6: Analoges Filter

Im Folgenden soll das analoge Filter aus Abbildung 6 betrachtet werden:

d) Bestimmen Sie den Frequenzgang $\underline{A}(j\omega)$ des Filters.

Lösung (2 Punkte):
RC mit nichtinvertierendem Verstärker

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \textcircled{1} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \textcircled{1} = \frac{j\omega R_1 C\,(R_2 + R_3)}{R_3 + j\omega R_1 R_3 C}$$

mit $u_{OP} = 0 \Rightarrow u_{R1} = u_{R3}$

aus Spannungsteiler: $u_{R3} = u_a \cdot \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$

$$\frac{u_a}{u_{R3}} = 1 + \frac{R_2}{R_3}$$

e) Berechnen Sie den Amplitudengang und den Phasengang des Filters.

Lösung (2 Punkte):

$$A(\omega) = |\underline{A}(j\omega)| = \frac{\omega R_1 C}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \textcircled{1}$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} \textcircled{0.5} - \arctan(\omega R_1 C) \textcircled{0.5}$$

f) Um welche Art von Filter handelt es sich? (Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandsperre)

Lösung (0.5 Punkte):

Hochpassfilter 0.5

g) Berechnen Sie die Verstärkung K im Durchlassbereich und die Grenzfrequenz ω_g des Filters.

Lösung (2 Punkte):

$$K = \lim_{\omega \to \infty} \underline{A}(j\omega) = 1 + \frac{R_2}{R_3} \quad (1)$$

$$\omega_g = \frac{1}{R_1 C} \quad (1)$$

h) Geben Sie für $\omega = \omega_g$ (Grenzfrequenz) die Verstärkung sowie die Phase an (ohne Rechnung).

Lösung (2 Punkte):
Die Grenzfrequenz ist gegeben durch die Frequenz, unterhalb derer die Verstärkung weniger als $\frac{K}{\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)/\sqrt{2} = K - 3\,\mathrm{dB}$ (1) beträgt. Die Phase beträgt $\frac{\pi}{4} = 45°$ (1).

i) Wie lautet die maximale Flankensteilheit des Filters in dB/Dekade?

Lösung (0.5 Punkte):

Hochpassfilter 1. Ordnung $\Rightarrow +20\,\mathrm{dB/Dekade}$ (0.5), korrekt nur mit richtigem Vorzeichen

j) Es gelte $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Berechnen Sie die Kapazität C des Kondensators und den Widerstand R_3 so, dass $K = 11$ sowie die Grenzfrequenz $f_g = \frac{100}{\pi}\mathrm{Hz} \approx 31,8\,\mathrm{Hz}$ beträgt. Geben Sie das Ergebnis mit der jeweils gebräuchlichen Einheit sowie mit passendem Dezimalpräfix an (Beispiele dafür wären $20\,\mathrm{k\Omega}$, $1,3\,\mathrm{m\Omega}$, $47\,\mu\mathrm{F}$, ...)

Lösung (2 Punkte):
Rechnungen und Ergebnisse nur korrekt mit richtiger Einheit:

$$K = 1 + \frac{R_2}{R_3}$$

$$R_3 = \frac{R_2}{K - 1} = 1\,\mathrm{k\Omega} \quad (1)$$

$$\omega_g = 2\pi f_g = 200\,\mathrm{Rad/s}$$

$$\omega_g = \frac{1}{R_1 C}$$

$$C = \frac{1}{R_1 \omega_g} = \frac{1}{10\,\mathrm{k\Omega} \cdot 200\,\mathrm{Rad/s}} = 500\,\mathrm{nF} \quad (1)$$

Teil 3: (9 Punkte)

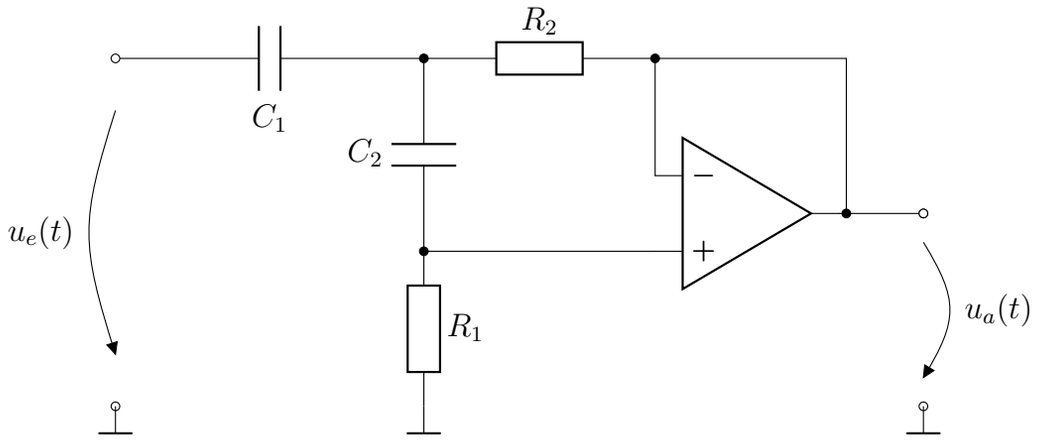
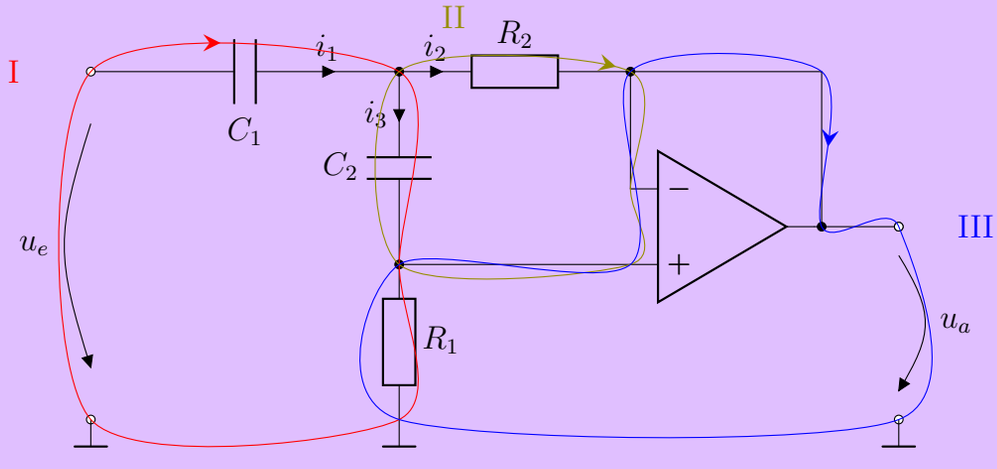


Abbildung 7: Aktives Filter

Betrachten Sie die in Abbildung 7 dargestellte Schaltung. Nehmen Sie im Folgenden an, dass hierfür ein *idealer* Operationsverstärker zum Einsatz kommt. Diese Schaltung soll in den folgenden Teilaufgaben analysiert werden:

k) Zeichnen Sie alle notwendigen Maschen und alle notwendigen Ströme zur Netzwerkanalyse in das Schaltbild ein.
Hinweis: Dies kann direkt in Abbildung 7 auf dem Aufgabenblatt erfolgen. Falsch eingezeichnete Maschen und Ströme führen zu Punktabzug. Insgesamt können jedoch nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Lösung (2 Punkte):
Richtig eingezeichnete Maschen: 0,5 Pkt je Masche. Maximal drei Maschen (mit Namen und Richtung) werden bewertet. Falsch eingezeichnete Maschen führen zu Punktabzug.
Richtig eingezeichneter Knoten mit Strömen: 0,5 Pkt je Knoten. Maximal ein Knoten wird bewertet. Falsch eingezeichnete Ströme führen zu Punktabzug.



l) Stellen Sie die zu Aufgabenteil k) passenden Maschen und Knotengleichungen auf. Nutzen Sie dazu die komplexwertigen Impedanzen der jeweiligen Bauteile.

Lösung (3.5 Punkte): 1 Pkt für jede richtige Masche und 0.5 Pkt für richtige Knotengleichung. Wenn zu viele Maschen und Knoten eingezeichnet wurden, so werden die Punkte anteilig vergeben und in dieser Teilaufgabe auf 0.25 Punkte aufgerundet.

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$-u_e + \frac{i_1}{j\omega C_1} + i_3\left(\frac{1}{j\omega C_2} + R_1\right) = 0 \qquad \text{I}$$

$$i_2 R_2 - \frac{i_3}{j\omega C_2} = 0 \qquad \text{II}$$

$$u_a - i_3 R1 = 0 \qquad \text{III}$$

Nach dem Umstellen und Einsetzen der Maschen- und Knotengleichungen ergibt sich eine Übertragungsfunktion von:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{-\omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2}{1 + j\omega R_2(C_1 + C_2) - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2} \tag{1}$$

Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf diese Übertragungsfunktion.

m) Geben Sie Typ und Ordnung des Filters an.

Lösung (1 Punkte):

Hochpass, (0.5) 2. Ordnung (0.5)

n) Geben Sie die Verstärkung K im Durchlassbereich an.

Lösung (1 Punkte):

$$K = \lim_{\omega\to\infty} \underline{A}(j\omega) = 1 \quad (1)$$

o) Geben Sie den Wert der Ausgangsspannung $u_a(t)$ für $\lim_{t\to\infty}$ an, wenn der Verlauf der Eingangsspannung $u_e(t)$ einer Sprungfunktion folgt, dass heißt $u_e(t) = u(t)\,\mathrm{V}$.

Lösung (1 Punkte): (1) für Wert und (0.5) für die Einheit.

$$\lim_{t\to\infty} u_a(t) = \lim_{\omega\to 0} j\omega \cdot \frac{1}{j\omega}\underline{A}(j\omega)\mathrm{V} = 0\,\mathrm{V} \tag{2}$$

Aufgabe 6 *Kurzfragen* *(22 Punkte)*

a) Eine kausale Umsetzung des zeitdiskreten Systems ist möglich.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P
  Bedingung: Zählergrad kleiner gleich Nennergrad

$H_1(z) = \dfrac{(z^{-2}-3)^3}{(1-2z)^4}$	● Ja ○ Nein
$H_2(z) = \dfrac{1-6z^{-2}}{z^{-2}-\frac{1}{5}z^{-1}}$	○ Ja ● Nein
$H_3(z) = \dfrac{(2-3z^{-1})^2}{1-\pi z^{-1}}$	● Ja ○ Nein
$H_4(z) = \dfrac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(2-3z^{-1})^2}$	● Ja ○ Nein

b) Das Signal ist periodisch.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P

$x_1(t) = \sin(\sqrt{2}t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$	● Ja ○ Nein
$x_2[n] = \cos(2n+\pi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}$	○ Ja ● Nein
$x_3(t) = e^{jt}\,, \quad t \in \mathbb{R}$	● Ja ○ Nein
$x_4[n] = \cos(\pi n^2)\,, \quad n \in \mathbb{Z}$	● Ja ○ Nein

c) Betrachten Sie den in Abbildung 8 dargestellten Amplitudengang. Markieren Sie die zugehörige Übertragungsfunktion.

Lösung (2 Punkte):

○ $A_1(j\omega) = \dfrac{1}{1+0.1j\omega} \cdot \dfrac{(10j\omega)^2}{(1+10j\omega)^2}$	○ $A_2(j\omega) = \dfrac{10}{1+0.1j\omega} \cdot \dfrac{(10j\omega)^2}{(1+10j\omega)^2}$
● $A_3(j\omega) = \dfrac{1}{(1+0.1j\omega)^2} \cdot \dfrac{10j\omega}{1+10j\omega}$	○ $A_4(j\omega) = \dfrac{10}{(1+0.1j\omega)^2} \cdot \dfrac{10j\omega}{1+10j\omega}$
○ $A_5(j\omega) = \dfrac{1}{1+10j\omega} \cdot \dfrac{(0.1j\omega)^2}{(1+0.1j\omega)^2}$	○ $A_6(j\omega) = \dfrac{1}{(1+10j\omega)^2} \cdot \dfrac{0.1j\omega}{1+0.1j\omega}$

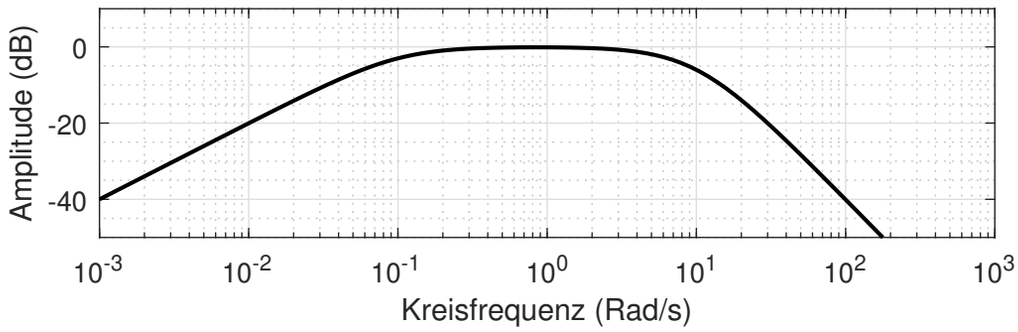


Abbildung 8: Amplitudengang

Markieren Sie die zutreffenden Aussagen in den folgenden Teilaufgaben. Es sind keine Begründungen notwendig. Vollständig ausgefüllte Kästchen werden als nicht markiert gewertet. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können pro Teilaufgabe nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

d) Bestimmen Sie die Eigenschaften der folgenden Systeme:

Lösung (9 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}\,\mathrm{P}$
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}$

i)

$$y_1(t) = \sin(x(t) \cdot t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

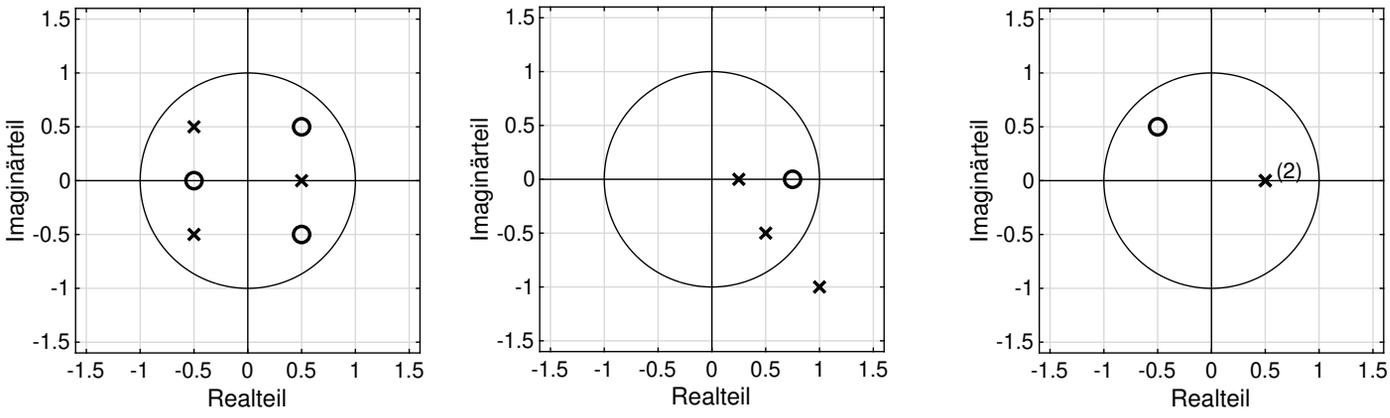
ii)

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^{5} \frac{x[n-k]}{6-k}\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

iii)

$$y_3(t) = \pi + \int_{\frac{t}{2}}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Eigenschaft	$y_1(t)$ Ja	$y_1(t)$ Nein	$y_2[n]$ Ja	$y_2[n]$ Nein	$y_3(t)$ Ja	$y_3(t)$ Nein
Das System ist zeitdiskret.		✓	✓			✓
Das System ist speicherfrei.	✓			✓		✓
Das System ist zeitinvariant.		✓	✓			✓
Das System ist linear.		✓	✓			✓
Das System ist kausal.	✓		✓		✓	
Das System ist stabil.	✓		✓			✓



System I System II System III

Abbildung 9: Pol-Nullstellen-Diagramme.

Abbildung 9 zeigt die Pol-Nullstellen-Diagramme von drei reellen, zeitdiskreten LTI-Systemen. Pole sind mit "×", Nullstellen mit "○" gekennzeichnet. Beachten Sie bitte, dass von System II und III nicht alle Pol- und Nullstellen angegeben sind.

e) Betrachten Sie zunächst System I. Der Konvergenzbereich ist gegeben durch $|z| < \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die zutreffenden Aussagen. Falsche Antworten führen zum Punktabzug, jedoch können nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+\frac{1}{2}$ P
- Pro falscher Antwort $-\frac{1}{2}$ P
  Bedingung Stabilität: Der Einheitskreis ist im ROC enthalten
  Bedingung Kausalität: ROC liegt außerhalb dem äußersten Pol und es gibt mindestens gleich viele Pole wie NS

Das System ist ein Allpass	○ Ja	● Nein
Das System besitzt eine endlich lange Impulsantwort	○ Ja	● Nein
Das System ist stabil	○ Ja	● Nein
Das System ist kausal	○ Ja	● Nein

f) Betrachten Sie nun das unvollständige Pol-Nullstellen-Diagramm von System II. Geben Sie die **eindeutig(!)** fehlenden Pole und Nullstellen unter der Annahme an, dass System II ausschließlich reelle Koeffizienten aufweist.
Hinweis: Unnötige oder falsche Pole / Nullstellen führen bei dieser Teilaufgabe zu Punktabzug. Insgesamt können jedoch nicht weniger als 0 Punkte erzielt werden.

Lösung: (bitte auf dem Aufgabenblatt bearbeiten):

Lösung (2 Punkte):

- Pro richtiger Antwort $+1\,\mathrm{P}$, pro falscher Antwort $-1\,\mathrm{P}$
  Pole müssen komplex konjugiert sein, da es ein reelles LTI System ist

Pole	Nullstellen
$z = 1 + 1i$	keine
$z = 0.5 + 0.5i$	

g) Betrachten Sie nun System III. Das System

- ist kausal,
- ist minimalphasig,
- besitzt reellwertige Koeffizienten.

Geben Sie den Konvergenzradius sowie die Anzahl und Lage aller weiterer möglicher Nullstellen an.

Lösung: (bitte auf dem Aufgabenblatt bearbeiten):

Konvergenzradius:

Anzahl möglicher weiterer Nullstellen:

Lage aller möglicher weiterer Nullstellen:

Lösung (3 Punkte):

Eine (1.5) Nullstelle ist möglich, damit die Kausalität nicht verletzt wird.

Lage: $z_n = -0.5 - 0.5j$, damit es komplex konjugiert zur anderen Nullstelle ist (1). Konvergenzradius ist gegeben durch $|z| > 0.5$, weil der ROC wegen der Kausalität außerhalb des äußersten Pols sein muss. (0.5)