

Bachelor-Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Prüfer: Prof. Dr. rer. nat. S. Schmauder

Datum: 25.03.2015

Prüfungsdauer: 60 min

Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab KW 19 im LSF bekannt gegeben.
Die Wiederholerinnen und Wiederholer sind verpflichtet, die Prüfungsergebnisse einzusehen
und sich ggf. unverzüglich für die mündliche Nachprüfung am IMWF zu melden.

Name	Matrikelnummer	Unterschrift
Studiengang		
Wiederholerin / Wiederholer	☐ nein	☐ ja

**Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Rechenwege
werden eingesammelt und bewertet!**

Viel Erfolg!

Diese Tabelle darf nur von den Korrektoren ausgefüllt werden!

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g		Bonus
2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g		

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Eine fest eingespannte Haltelasche aus 5 mm dickem Stahlblech (42CrMo4) wird durch eine im Punkt P angreifende Kraft F_α belastet, siehe Abbildung 1.1. Die Richtung der Kraft F_α wird durch den Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ festgelegt. Die Oberfläche der Haltelasche ist poliert.

42CrMo4: $R_e = 900 \text{ MPa}$; $R_m = 1100 \text{ MPa}$; $E = 210000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,3$; $A_5 > 12 \%$

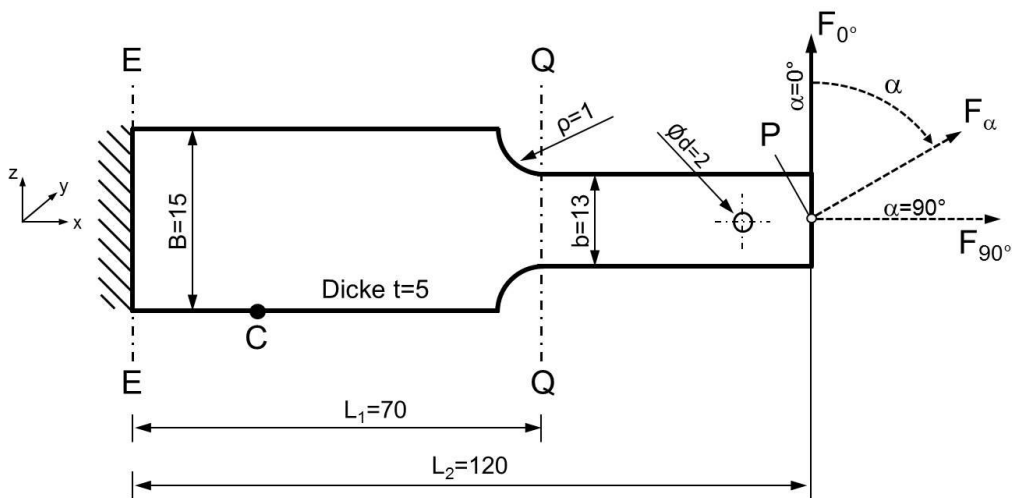


Abbildung 1.1: Haltelasche aus 42CrMo4; Längeneinheit: mm.

- a) Kennzeichnen Sie in untenstehendem Bild die kritischen Bereiche, an denen bei der Kraft F_{60° ($\alpha = 60^\circ$) möglicherweise mit Versagen zu rechnen ist und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Lösung	Kritische Bereiche: - Einspannung unten: max. Biegebeanspruchung, ggf. Kerbwirkung - Querschnittsübergang unten: Kerbwirkung, Zugseite bei Biegung - Bohrung unten: Kerbwirkung
---------------	--

- b) Im Betrieb tritt in Punkt C eine Zugspannung von $\sigma_{\max,C} = 300 \text{ MPa}$ auf. Wie groß darf dort eine zusätzlich wirkende Schubspannung $\tau_{\max,C}$ maximal werden, damit Fließen im Punkt C mit der üblichen Sicherheit ausgeschlossen werden kann?

Rechenweg	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} \Leftrightarrow \sigma_v \leq \frac{R_e}{S_F}$ <u>Mehrachsige Beanspruchung:</u> Variante 1: Schubspannungshypothese (SH) $\sigma_{v,SH} = \sqrt{\sigma_{\max,C}^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \frac{R_e}{S_F} \left(= \frac{900 \text{ MPa}}{1,5} = 600 \text{ MPa} \right)$ Gleichsetzen und nach τ auflösen: $\sigma_{\max,C}^2 + 4 \cdot \tau^2 \leq \left(\frac{R_e}{S_F} \right)^2 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_e}{S_F} \right)^2 - \sigma_{\max,C}^2}$ $\Rightarrow \tau \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{900 \text{ MPa}}{1,5} \right)^2 - (300 \text{ MPa})^2} = \underline{\underline{259,81 \text{ MPa}}}$ Variante 2: Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) $\sigma_{v,GEH} = \sqrt{\sigma_{\max,C}^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq \frac{R_e}{S_F} \left(= \frac{900 \text{ MPa}}{1,5} = 600 \text{ MPa} \right)$ Gleichsetzen und nach τ auflösen: $\sigma_{\max,C}^2 + 3 \cdot \tau^2 \leq \left(\frac{R_e}{S_F} \right)^2 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_e}{S_F} \right)^2 - \sigma_{\max,C}^2}$ $\Rightarrow \tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(\frac{900 \text{ MPa}}{1,5} \right)^2 - (300 \text{ MPa})^2} = \underline{\underline{300 \text{ MPa}}}$ Die zusätzliche Schubspannung darf maximal 259,81 MPa (SH) bzw. 300 MPa (GEH) betragen. <u>Anmerkung:</u> Sicherheitsbeiwerte S_F von 1,2 bis 2,0 sind ebenfalls möglich.
Lösung	Ergebnis
Schubspannung	$\tau(\text{SH}) = 259,81 \text{ MPa} \quad / \quad \tau(\text{GEH}) = 300 \text{ MPa}$

- c) Die Haltelasche wird jetzt durch die Kraft $F_{0^\circ} = 375 \text{ N}$ ($\alpha = 0^\circ$) statisch belastet. Dürfen dabei Schubspannungen, die durch Querkräfte verursacht werden, an der Einspannstelle E – E vernachlässigt werden? Berechnen Sie dazu die Vergleichsspannung einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der Schubspannungen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Berechnen Sie anschließend die Sicherheit gegen Fließen an der Einspannstelle E – E. Ist diese Sicherheit ausreichend?

Hinweis:

Die Schubspannung soll konstant über der Fläche wirken. Zudem darf die Kerbwirkung an der Einspannstelle E – E vernachlässigt werden.

Rechenweg	Beanspruchung an der Einspannstelle E-E: Biegung + Schub Maximale Biegespannung: $\sigma_{b\max,E} = \frac{M_b}{W_b} = \frac{45000 \text{ Nmm}}{187,5 \text{ mm}^3} = 240 \text{ MPa}$ mit $W_b = \frac{t \cdot B^2}{6} = \frac{5 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}^2}{6} = 187,5 \text{ mm}^3$ und $M_b = F_{0^\circ} \cdot L_2 = 375 \text{ N} \cdot 120 \text{ mm} = 45000 \text{ Nmm}$ Schubspannung: $\tau_E = \frac{F_{0^\circ}}{A_1} = \frac{F_{0^\circ}}{t \cdot B} = \frac{375 \text{ N}}{5 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}} = 5 \text{ MPa}$ Vergleichsspannung ohne Schubspannungen: $\sigma_v = \sigma_{b\max,E} = 240 \text{ MPa}$ Vergleichsspannung mit Schubspannung: $\sigma_v(\text{SH}) = \sqrt{\sigma_{b\max,E}^2 + 4 \cdot \tau_E^2} = 240,21 \text{ MPa} \quad \text{alternativ: } \sigma_v(\text{GEH}) = 240,16 \text{ MPa}$ Vergleich: $\sigma_{b\max,E} \approx \sigma_v(\text{SH})$ bzw. $\sigma_{b\max,E} \approx \sigma_v(\text{GEH})$ Schubspannungen dürfen vernachlässigt werden! <u>Berechnung der Sicherheit gegen Fließen:</u> Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} \Leftrightarrow \sigma_{b\max,E} \leq \frac{R_e}{S_F}$ $\Rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_{b\max,E}} = \frac{900 \text{ MPa}}{240 \text{ MPa}} = \underline{\underline{3,75}}$ Die Sicherheit gegen Fließen ist ausreichend (> 1,2 bis 2,0).
Lösung	Ergebnis
Schubspannungen durch Querkräfte vernachlässigbar?	Ja
Sicherheit gegen Fließen	$S_F = 3,75$ (ausreichend)

Hinweis:

In den folgenden Aufgabenteilen sind Spannungen infolge des Querkraftschubs zu vernachlässigen.

- d) Im Folgenden wirkt nur die Kraft $F_{55^\circ} = 500 \text{ N}$ unter einem Winkel $\alpha = 55^\circ$ auf die Haltelasche. Wie groß ist die Sicherheit gegen Fließen an der Einspannstelle E – E? Ist diese Sicherheit ausreichend? Die Kerbwirkung an der Einspannstelle E – E darf vernachlässigt werden.

Rechenweg	Schub wird vernachlässigt. Zerlegung der schrägen Kraft ($\alpha=55^\circ$) in einen horizontalen ($\alpha=90^\circ$) und einen vertikalen ($\alpha=0^\circ$) Kraftanteil: $F_{90^\circ} = \sin(\alpha) \cdot F_\alpha = \sin(55^\circ) \cdot 500 \text{ N} = 409,58 \text{ N}$ $F_{0^\circ} = \cos(\alpha) \cdot F_\alpha = \cos(55^\circ) \cdot 500 \text{ N} = 286,79 \text{ N}$ Berechnung der maximalen Spannung: → Überlagerung von Zug und Biegung: Unterseite $\sigma_{\max E} = \sigma_z + \sigma_b$ $\sigma_z = \frac{F_{90^\circ}}{A_1} = \frac{409,58 \text{ N}}{75 \text{ mm}^2} = 5,46 \text{ MPa}$ mit $A_1 = t \cdot B = 5 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} = 75 \text{ mm}^2$ $\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} = \frac{34414,59 \text{ Nmm}}{187,5 \text{ mm}^3} = 183,54 \text{ MPa}$ mit $M_b = F_{0^\circ} \cdot L_2 = \cos(55^\circ) \cdot F_{55^\circ} \cdot L_2 = \cos(55^\circ) \cdot 500 \text{ N} \cdot 120 \text{ mm} = 34414,59 \text{ Nmm}$ und $W_b = \frac{t \cdot B^2}{6} = \frac{5 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm}^2}{6} = 187,5 \text{ mm}^3$ $\Rightarrow \sigma_{\max, E} = 5,46 \text{ MPa} + 183,54 \text{ MPa} = \underline{\underline{189,0 \text{ MPa}}}$ Berechnung der Sicherheit gegen Fließen: Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{\text{zul}} \Leftrightarrow \sigma_{\max, E} \leq \frac{R_e}{S_F}$ $\Rightarrow S_F = \frac{R_e}{\sigma_{\max, E}} = \frac{900 \text{ MPa}}{189,0 \text{ MPa}} = \underline{\underline{4,76}}$ Die Sicherheit gegen Fließen ist ausreichend (> 1,2 bis 2,0).
Lösung	Ergebnis
Sicherheit gegen Fließen	$S_F = 4,76$ (ausreichend)

- e) Nun wird die Haltelasche nur durch die Kraft F_{90° unter einem Winkel $\alpha = 90^\circ$ belastet. Bei welcher Kraft F_{90° beginnt der Werkstoff im Querschnittsübergang Q – Q zu fließen?

Rechenweg	Reine Zugbeanspruchung <u>Fließen im Querschnitt Q – Q, wenn:</u> $\sigma_{\max,Q} = R_e$ Maximale Zugspannung im Querschnitt Q – Q: $\sigma_{\max,Q} = \alpha_{k,z} \cdot \sigma_{n,Q}$ Formzahl $\alpha_{k,z}$ aus Formzahldiagramm: $\left. \begin{aligned} \frac{B}{b} &= \frac{15 \text{ mm}}{13 \text{ mm}} = 1,1538 \\ \frac{\rho}{b} &= \frac{1 \text{ mm}}{13 \text{ mm}} = 0,0769 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_{k,z} = 2,0 \text{ (gültig: 1,95 bis 2,05)}$ berechneter Wert: $\alpha_{k,z} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{B-b} + 5 \cdot \frac{\rho}{b} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \rho}{b}\right)^2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{15-13} + 5 \cdot \frac{1}{13} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 1}{13}\right)^2}} = 1,994$ Die zugehörige Nennspannung beträgt: $\sigma_{n,Q} = \frac{R_e}{\alpha_{k,z}} = \frac{900 \text{ MPa}}{2,0} = 450 \text{ MPa} = \frac{F_{90^\circ}}{A_2}$ <u>Kraft bei Fließbeginn:</u> $\Rightarrow F_{90^\circ} = A_2 \cdot \sigma_{n,Q} = 65 \text{ mm}^2 \cdot 450 \text{ MPa} = \underline{\underline{29250 \text{ N}}}$ mit $A_2 = t \cdot b = 5 \text{ mm} \cdot 13 \text{ mm} = 65 \text{ mm}^2$
Lösung	Ergebnis
Kraft F_{90° bei Fließbeginn	$F_{90^\circ} = 29250 \text{ N}$

- f) Die Gesamtdehnung an der höchstbeanspruchten Stelle im Kerbgrund der Bohrung ist auf 0,5 % zu begrenzen. Berechnen Sie hierfür die entsprechende Kraft F_{90° unter einem Winkel $\alpha = 90^\circ$.

Rechenweg	<u>Zustand bei 0,5 % Gesamtdehnung?</u> → Berechnung der Dehnung bei Fließbeginn: $\sigma = E \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Leftrightarrow \varepsilon_F = \frac{R_e}{E} = \frac{900 \text{ MPa}}{210000 \text{ MPa}} = 0,4286 \% < 0,5 \%$ Bei 0,5 % Gesamtdehnung herrscht somit ein (teil)plastischer Zustand. Formzahl $\alpha_{k,\text{Bohrung}}$ aus Formzahldiagramm: $\frac{d}{b} = \frac{2 \text{ mm}}{13 \text{ mm}} = 0,1538 \Rightarrow \alpha_{k,\text{Bohrung}} = 2,6 \text{ (gültig 2,6 bis 2,65)}$ <u>Fließbeginn im Bereich der Bohrung, wenn:</u> $\sigma_{\max B} = R_e$ Maximale Spannung im Bereich der Bohrung: $\sigma_{\max B} = \alpha_{k,\text{Bohrung}} \cdot \sigma_{n,B}$ Die zugehörige Nennspannung beträgt: $\sigma_{n,B} = \frac{R_e}{\alpha_{k,\text{Bohrung}}} = \frac{900 \text{ MPa}}{2,6} = 346,15 \text{ MPa} = \frac{F_{90^\circ, F}}{A_{\text{Bohrung}}}$ <u>Kraft bei Fließbeginn:</u> $F_{90^\circ, F} = A_{\text{Bohrung}} \cdot \sigma_{n,B} = 55 \text{ mm}^2 \cdot 346,15 \text{ MPa} = 19038,46 \text{ N}$ mit $A_{\text{Bohrung}} = (b - d) \cdot t = (13 \text{ mm} - 2 \text{ mm}) \cdot 5 \text{ mm} = 55 \text{ mm}^2$ Berechnung der plastischen Stützziffer: $\eta_{pl} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{ges}}}{\varepsilon_F}} = \sqrt{\frac{0,5 \%}{0,4286 \%}} = 1,08$ <u>Kraft bei einer Gesamtdehnung von 0,5 % (teilplastisch):</u> $\Rightarrow F_{90^\circ, pl} = \eta_{pl} \cdot F_{90^\circ, F} = 1,08 \cdot 19038,46 \text{ N} = \underline{\underline{20563,89 \text{ N}}}$
Lösung	Ergebnis
Kraft F_{90° bei 0,5 % Gesamtdehnung	$F_{90^\circ} = 20563,89 \text{ N}$

- g) Der statisch wirkenden Kraft $F_{90^\circ, m} = 10000 \text{ N}$ ($\alpha = 90^\circ$) wird im Betrieb eine rein wechselnde Kraft $F_{90^\circ, a} = \pm 2500 \text{ N}$ ($\alpha = 90^\circ$) überlagert. Wie groß ist die Sicherheit gegen Schwingungsbruch an der höchstbeanspruchten Stelle im Kerbgrund der Bohrung? Verwenden Sie als Kerbwirkungszahl $\beta_{k, \text{Bohrung}} = 2,2$.

Hinweis:

Falls Sie Aufgabenteil f) nicht lösen konnten, verwenden Sie eine Formzahl von $\alpha_{k, \text{Bohrung}} = 2,6$.

Rechenweg	Festigkeitsbedingung: $\sigma_{v,a} \leq \sigma_{a,zul} \Leftrightarrow \sigma_{a,max,B} \leq \frac{\sigma_A}{S_D}$ <u>Maximale Spannungsamplitude (linke Seite):</u> $\sigma_{a,max,B} = \beta_{k, \text{Bohrung}} \cdot \sigma_{a,n,B} = 2,2 \cdot 45,45 \text{ MPa} = 100 \text{ MPa}$ mit $\sigma_{a,n,B} = \frac{F_{90^\circ, a}}{A_{\text{Bohrung}}} = \frac{2500 \text{ N}}{55 \text{ mm}^2} = 45,45 \text{ MPa}$ und $A_{\text{Bohrung}} = (b - d) \cdot t = (13 \text{ mm} - 2 \text{ mm}) \cdot 5 \text{ mm} = 55 \text{ mm}^2$ <u>Ertragbare Spannungsamplitude (rechte Seite):</u> $\sigma_A = \sigma_w \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = 450 \text{ MPa} \cdot \sqrt{1 - \frac{472,73 \text{ MPa}}{1100 \text{ MPa}}} = 339,8 \text{ MPa}$ (zähe Werkstoffe) Zug-/Druck-Wechselfestigkeit: $\sigma_w = f(R_m) = f(1100 \text{ MPa}) = 450 \text{ MPa}$ (aus Diagramm) Mittelspannung: $\sigma_m = \alpha_{k, \text{Bohrung}} \cdot \sigma_{m,n,B} = 2,6 \cdot 181,81 \text{ MPa} = 472,73 \text{ MPa}$ mit $\sigma_{m,n,B} = \frac{F_{90^\circ, m}}{A_{\text{Bohrung}}} = \frac{10000 \text{ N}}{55 \text{ mm}^2} = 181,81 \text{ MPa}$ <u>Berechnung der Sicherheit gegen Schwingungsbruch:</u> $\Rightarrow S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_{a,max,B}} = \frac{339,8 \text{ MPa}}{100 \text{ MPa}} = \underline{\underline{3,398}}$ Die Sicherheit gegen Schwingungsbruch ist ausreichend (> 1,5 bis 2,5).			
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Lösung</th><th>Ergebnis</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Sicherheit gegen Schwingungsbruch</td><td>$S_D = 3,398$</td></tr> </tbody> </table>	Lösung	Ergebnis	Sicherheit gegen Schwingungsbruch
Lösung	Ergebnis			
Sicherheit gegen Schwingungsbruch	$S_D = 3,398$			

Aufgabe 2:

(30 Punkte)

Ein Fußball soll mit einer Handpumpe (siehe Abbildung 2.1) aufgepumpt werden. Zylinder, Stab und Kolben der Pumpe sind aus der Aluminiumlegierung EN AW-2014 gefertigt.

EN AW-2014: $R_e = 270 \text{ MPa}$; $R_m = 410 \text{ MPa}$; $E = 70000 \text{ MPa}$; $\mu = 0,33$; $A_5 = 13 \%$

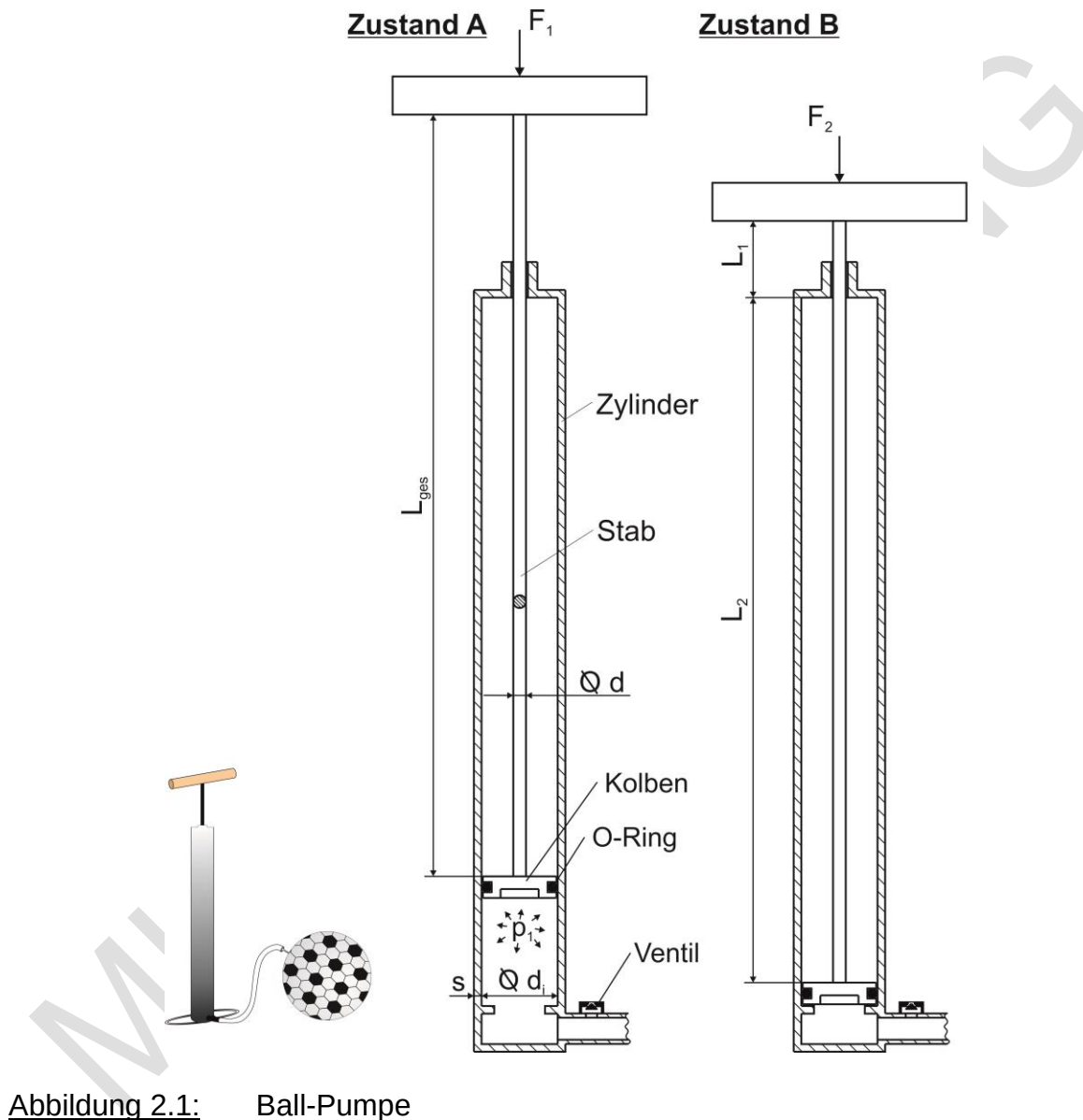


Abbildung 2.1: Ball-Pumpe

$L_{ges} = 500 \text{ mm}$; $L_1 = 30 \text{ mm}$; $L_2 = 470 \text{ mm}$; $d = 5 \text{ mm}$; $d_i = 30 \text{ mm}$; $s = 1 \text{ mm}$

Hinweise:

Eventuell auftretende Kerbwirkung sowie der Einfluss von Reibung darf in allen Aufgabenteilen vernachlässigt werden. Der Zylinder der Pumpe darf in allen Aufgabenteilen als dünnwandiger Hohlzylinder behandelt werden.

- a) Nach den Regeln des Weltfußball-Verbands darf der Luftdruck in einem Fußball den Wert von 1,1 bar nicht überschreiten.
Welche Druckkraft F_1 ist nötig, um in Ball und Pumpe einen Innendruck von $p_1 = 1,1 \text{ bar}$ zu erzeugen. Berechnen Sie außerdem die auftretende Druckspannung im Stab der Ball-Pumpe.

Hinweis:

Es kann ein Lastangriff entsprechend Zustand A in Abbildung 2.1 angenommen werden.

Rechenweg	Fläche des Druckstempels: $S_{0,\text{Pumpe}} = \frac{\pi}{4} d_i^2 = \frac{\pi}{4} (30\text{mm})^2 = 706,86\text{mm}^2$ Druckkraft im Stab: $p_1 = \frac{-F_1}{S_{0,\text{Pumpe}}} \rightarrow F_1 = -p_1 \cdot S_{0,\text{Pumpe}} = -0,11\text{MPa} \cdot 706,86\text{mm}^2 = -77,75\text{N}$ Druckspannung im Stab der Pumpe: $\sigma_d = \frac{F_1}{S_{0,\text{Stab}}} = \frac{-77,75\text{N}}{19,63\text{mm}^2} = -3,96\text{MPa}$ mit: $S_{0,\text{Stab}} = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} (5\text{mm})^2 = 19,63\text{mm}^2$
Lösung	Ergebnis
Druckkraft	$F_1 = -77,75\text{N}$
Druckspannung im Stab der Pumpe	$\sigma_d = -3,96\text{MPa}$

- b) Um welchen Betrag ändert sich auf Grund der Druckspannung die Länge des Stabes?

Hinweis:

Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit einer Druckspannung von $\sigma_d = -4,0\text{MPa}$.

Rechenweg	Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ Druckspannung aus Aufgabenteil a): $\sigma_d = -3,96\text{MPa}$ Dehnung im Stab: $\varepsilon = \frac{\sigma_d}{E} = \frac{-3,96\text{MPa}}{70000\text{MPa}} = -5,657 \cdot 10^{-5} = -0,005657 \%$ Längenänderung des Stabs: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_{\text{ges}}} \rightarrow \Delta L = \varepsilon \cdot L_{\text{ges}} = -5,657 \cdot 10^{-5} \cdot 500\text{mm} = -0,0283\text{mm}$ ohne Aufgabenteil a): $\Delta L = \varepsilon \cdot L_{\text{ges}} = \frac{\sigma_d}{E} \cdot L_{\text{ges}}$ $= \frac{-4\text{MPa}}{70000\text{MPa}} \cdot 500\text{mm} = -5,714 \cdot 10^{-5} \cdot 500\text{mm} = -0,0286\text{mm}$
Lösung	Ergebnis
Längenänderung des Stabs	$\Delta L = -0,0283\text{mm}$

- c) Zwischen Kolben und Zylinder befindet sich ein O-Ring. Dieser dichtet bis zu einer Aufweitung des Innendurchmessers von 0,03 mm zuverlässig ab. Wie groß darf der Innendruck p_2 (in bar) maximal werden, ohne dass der O-Ring undicht wird?

Hinweis:

Querdehnungsbehinderung durch die Deckel des Pumpen-Zylinders kann vernachlässigt werden.

Rechenweg	Vergrößerung des Umfangs: $\varepsilon_u = \frac{\Delta U}{U_0}$ Innenseite des Zylinders: $U_0 = \pi \cdot d_i$ $\Delta U = \Delta(\pi \cdot d_i) = \pi \cdot \Delta d_i$ $\varepsilon_u = \frac{\pi \cdot \Delta d_i}{\pi \cdot d_i} = \frac{\Delta d_i}{d_i} = \frac{0,03\text{mm}}{30\text{mm}} = 0,001 = 0,1\%$ 2-achsiger Spannungszustand, Innenseite des Zylinders: $\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u - \mu \cdot \sigma_r] = \frac{1}{E} \left[\frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} - \mu \cdot (-p) \right]$ $\Rightarrow p = \frac{\varepsilon_u \cdot E}{\left(\frac{d_i}{2 \cdot s} + \mu \right)}$ Innendruck: $p_2 = \frac{\varepsilon_u \cdot E}{\left(\frac{d_i}{2 \cdot s} + \mu \right)} = \frac{0,001 \cdot 70000 \text{ MPa}}{\left(\frac{30\text{mm}}{2 \cdot 1\text{mm}} + 0,33 \right)} = 4,566 \text{ MPa} = 45,66 \text{ bar}$
Lösung	Ergebnis
Innendruck	$p_2 = 45,66 \text{ bar}$

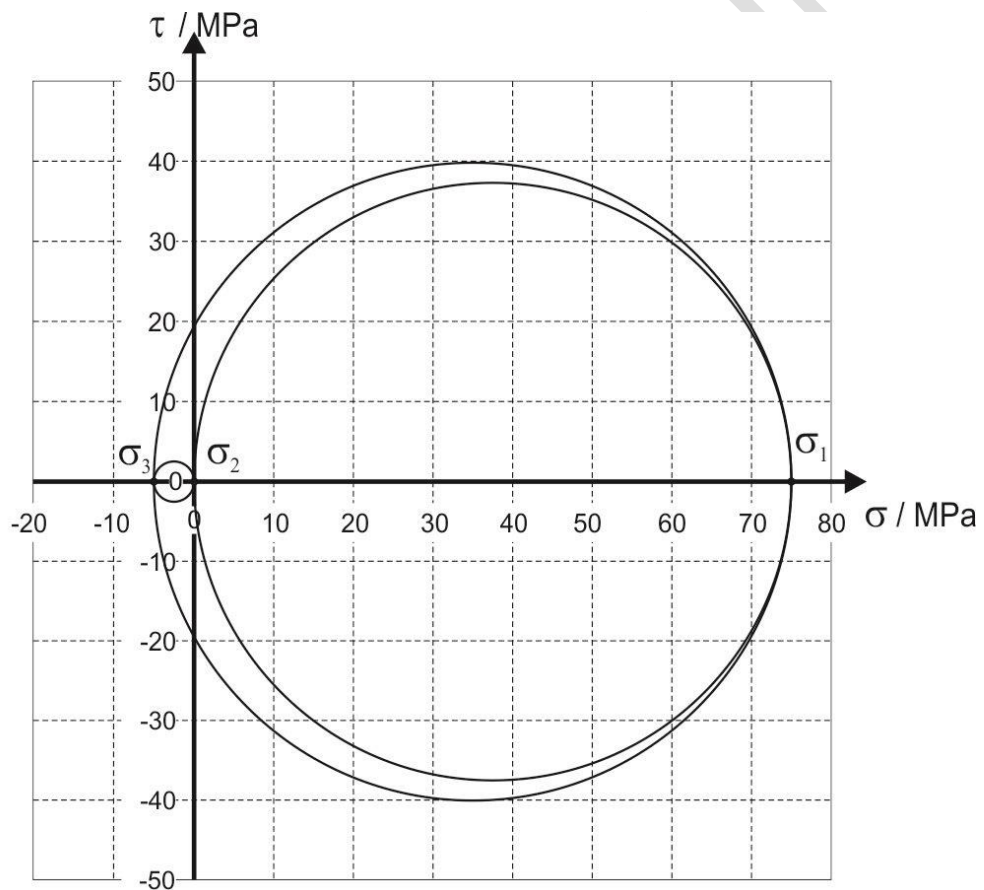
- d) Bestimmen Sie für einen Innendruck von $p_3 = 50\text{ bar}$ die Umfangs-, Längs- und Radialspannung an der Innenseite des Zylinders. Zeichnen Sie außerdem die Mohr'schen Spannungskreise für die Zylinder-Innenseite und markieren Sie die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 .

Umfangsspannung: $\sigma_u = \frac{p_3 \cdot d_i}{2 \cdot s} = \frac{5\text{MPa} \cdot 30\text{mm}}{2 \cdot 1\text{mm}} = 75\text{MPa}$

Längsspannung: $\sigma_l = 0\text{MPa}$

Radialspannung: $\sigma_r = -p_3 = -5\text{MPa}$

Rechenweg



Lösung	Ergebnis
Umfangsspannung	$\sigma_u = 75\text{MPa}$
Längsspannung	$\sigma_l = 0$
Radialspannung	$\sigma_r = -5\text{MPa}$

- e) Der Stab der Pumpe ist vollständig eingefahren (siehe Zustand B in Abbildung 2.1) und es wirkt die Druckkraft $F_2 = -350\text{N}$. Kann ein Knicken des Stabes mit Sicherheit ausgeschlossen werden? Berechnen Sie die Sicherheit gegen Knicken.

Hinweis:

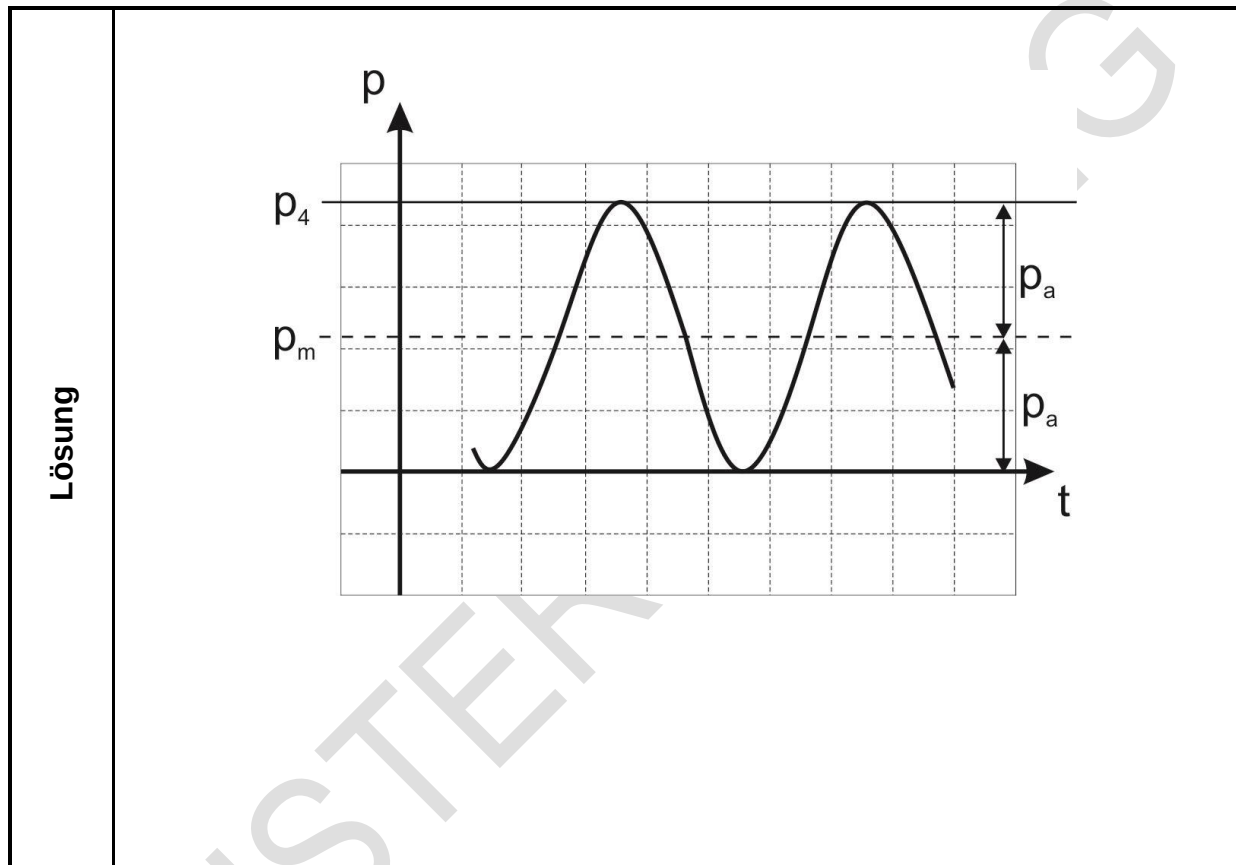
Es kann ein Lastangriff entsprechend Zustand B in Abbildung 2.1 angenommen werden. Der Kolben kann innerhalb des Zylinders nicht verkanten.

Rechenweg	Stab im Zylinder der Pumpe: Knickfall Euler 4 $F_K = -4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$ Länge des Stabs im Zylinder der Pumpe: $L_2 = 470\text{mm}$ axiales Trägheitsmoment I: $I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = \frac{\pi}{64} \cdot (5\text{mm})^4 = 30,68\text{mm}^4$ Knicklast: $F_K = -4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_2^2} = -4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{70000\text{MPa} \cdot 30,68\text{mm}^4}{(470\text{mm})^2} = -383,81\text{N}$ Sicherheit gegen Knicken: $S_K = \frac{F_K}{F_2} = \frac{-383,81\text{N}}{-350\text{N}} = 1,097$ $S_K < 2,5 \rightarrow$ Sicherheit nicht ausreichend
Lösung	Ergebnis
Sicherheit gegen Knicken	$S_K = 1,097$ (nicht ausreichend)

- f) Mit Hilfe der Pumpe sollen Bälle immer auf den gleichen Druck p_4 aufgepumpt werden. Zeichnen Sie schematisch in das vorgegebene Diagramm den zeitlichen Druckverlauf im Inneren der Pumpe. Markieren Sie außerdem den mittleren Druck p_m und die Druckamplitude p_a .

Hinweis:

Der Ball wird innerhalb eines einzigen Kolbenhubes auf den Druck p_4 aufgepumpt. Der Belastungsverlauf kann sinusförmig und als rein schwellend angenommen werden.



- g) Berechnen Sie den Druck p_4 (vgl. Aufgabenteil f)), auf welchen die Bälle aufgepumpt werden können, so dass ein Versagen des Zylinders durch Dauerbruch mit einer Sicherheit von $S_D = 2$ ausgeschlossen werden kann.

Hinweise:

Verwenden Sie zur Berechnung der Vergleichsmittelspannung und der Vergleichsamplitude die Kesselformel. Die Wechselfestigkeit für die vorliegende Oberfläche beträgt $\sigma_w = 110\text{MPa}$.

Rechenweg	Kesselformel: $\sigma_v = \frac{p \cdot d_m}{2 \cdot s}$ Mittlerer Durchmesser: $d_m = d_i + s = 30\text{mm} + 1\text{mm} = 31\text{mm}$ Aus Aufgabenteil f): $p_m = p_a = \frac{1}{2} p_4$ Festigkeitsbedingung: $\sigma_{va} \leq \sigma_{va,zul}$ mit $\sigma_{va,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D}$ Vergleichsspannungsamplitude: $\sigma_{va} = \frac{p_a \cdot d_m}{2 \cdot s} = \frac{p_4 \cdot d_m}{4 \cdot s}$ Ertragbare Spannungsamplitude: $\sigma_A = \sigma_w \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$ Vergleichsmittelspannung: $\sigma_{vm} = \frac{p_m \cdot d_m}{2 \cdot s} = \frac{p_4 \cdot d_m}{4 \cdot s}$ Aus Festigkeitsbedingung folgt: $\sigma_{va} = \sigma_{va,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D} \rightarrow \frac{p_4 \cdot d_m}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_w \cdot \sqrt{1 - \frac{p_4 \cdot d_m}{4 \cdot s \cdot R_m}}}{S_D}$ $p_{i,ii} = \frac{-\frac{\sigma_w^2}{S_D^2} \cdot \frac{d_m}{4 \cdot R_m \cdot s} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_w^2}{S_D^2} \cdot \frac{d_m}{4 \cdot R_m \cdot s}\right)^2 + \frac{d_m^2}{4 \cdot s^2} \cdot \frac{\sigma_w^2}{S_D^2}}}{\frac{d_m^2}{8 \cdot s^2}}$ $p_i = 6,637\text{MPa} = 66,37\text{bar} = p_4$ ($p_{ii} = -7,589\text{MPa}$) Alternativ: substituieren mit: $X = \frac{p_4 \cdot d_m}{4 \cdot s}$ $X = \frac{\sigma_w \cdot \sqrt{1 - \frac{X}{R_m}}}{S_D}$
Lösung	Ergebnis
Druck p_4	$p_4 = 66,37\text{bar}$

BONUSAUFGABE

(2 Punkte)

Zeichnen Sie qualitativ die Mohr'schen Kreise für die Außenseite des aufgepumpten Balls und markieren Sie die Hauptspannungen.

Hinweis:

Der Ball darf als ideal kugelförmig angenommen werden.

Lösung

