

Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Professor Dr. rer. nat. Siegfried Schmauder

Datum: 11.02.2013

Hilfsmittel: ausgegebenes Formelblatt,
nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Prüfungsdauer: 60 min

Der im 1. Prüfungsteil aufgeführte Hinweis für Wiederholer gilt auch für diese Teilprüfung.

Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Lösungswege werden eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg wird mitbewertet!

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Studiengang: _____

Guten Erfolg!

MUSTERLÖSUNG

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:

(30 Punkte)

Eine geschliffene Antriebswelle (siehe Abbildung 1.1) aus 42CrMo4 wird durch eine statische Vorspannkraft belastet. Zusätzlich können im Betrieb weitere Zugkräfte sowie Biegemomente auftreten. Im betrachteten Bereich besitzt die Antriebswelle einen Absatz.

42CrMo4: $R_e = 650\text{MPa}$; $R_m = 1100\text{MPa}$; $E = 210000\text{MPa}$; $\mu = 0,3$; $A_5 > 12\%$

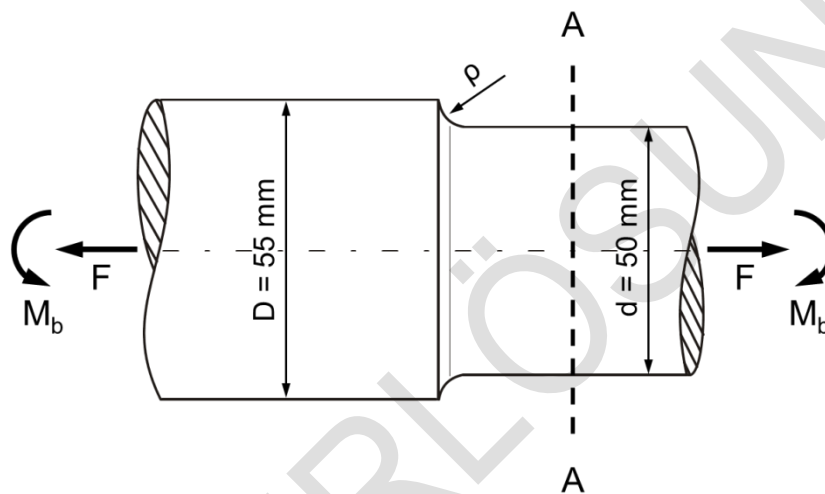


Abbildung 1.1: Antriebswelle aus 42CrMo4

Zunächst wirkt nur die statische Vorspannkraft $F_1 = 20\text{ kN}$ auf die Antriebswelle.

- a) Berechnen Sie die Zugspannung in Axialrichtung σ_{zugl} im Querschnitt A-A (siehe Abbildung 1.1).

Querschnittsfläche A-A:

$$A_d = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (50\text{ mm})^2 = 1.963,5\text{ mm}^2$$

Axiale Zugspannung im Querschnitt A-A:

$$\sigma_{\text{zugl}} = \frac{F_1}{A_d} = \frac{20.000\text{ N}}{1.963,5\text{ mm}^2} = \underline{\underline{10,186\text{ MPa}}}$$

Falls Sie Aufgabenteil 1 a) nicht lösen können, verwenden Sie $\sigma_{\text{zug1}} = 10 \text{ MPa}$.

- b) Im Betrieb tritt zusätzlich zur statischen Vorspannkraft $F_1 = 20 \text{ kN}$ ein überlagertes Biegemoment M_b auf. Bei welchem statisch wirkenden Biegemoment M_b beginnt der Werkstoff im Querschnitt A-A (siehe Abbildung 1.1) zu fließen?

Biegespannung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

Widerstandsmoment gegen Biegung:

$$W_b = \frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} \cdot (50 \text{ mm})^3 = 12.2718 \text{ mm}^3$$

Fließen im Querschnitt A-A, wenn:

$$\sigma_{\text{max}} = R_e$$

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{zug1}} + \sigma_b = \sigma_{\text{zug1}} + \frac{M_b}{W_b}$$

Nach M_b aufgelöst ergibt sich:

$$M_b = W_b \cdot (R_e - \sigma_{\text{zug1}})$$

$$M_b = 12.2718 \text{ mm}^3 \cdot (650 \text{ MPa} - 10,186 \text{ MPa}) = \underline{\underline{7.8517 \text{ Nm}}}$$

Im Folgenden können Biegemomente komplett vernachlässigt werden.
Es wirken ausschließlich axiale Zugkräfte.

- c) Wie groß muss der Kerbradius ρ mindestens sein, wenn lediglich die statische Vorspannkraft $F_1 = 20\text{kN}$ anliegt und die Kerbspannung maximal 3,0 % der Streckgrenze betragen soll?

Maximale Spannung im Kerbquerschnitt:

$$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \sigma_n = 3,0\% \cdot R_e = 19,5\text{MPa}$$

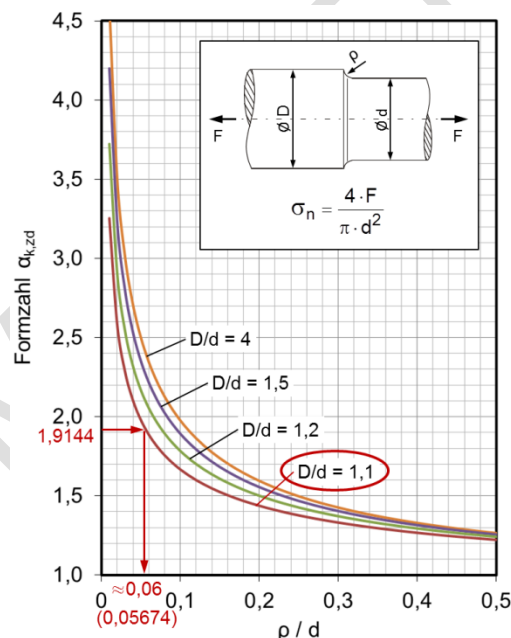
Nach $\alpha_{k,zd}$ aufgelöst ergibt sich:

$$\alpha_{k,zd} = \frac{3,0\% \cdot R_e}{\sigma_n} = \frac{19,5\text{MPa}}{10,186\text{MPa}} = 1,9144$$

$$\left(\alpha_{k,zd} = \frac{3,0\% \cdot R_e}{F_1} \cdot A_d = \frac{3,0\% \cdot 650\text{MPa}}{20\text{kN}} \cdot 1.963,5\text{mm}^2 = 1,9144 \right)$$

Aus dem Formzahldiagramm folgt: $\frac{\rho}{d} = 0,05674 (\approx 0,055 \text{ bis } 0,06)$

(mit $\frac{D}{d} = \frac{55\text{mm}}{50\text{mm}} = 1,1$ und $\alpha_{k,zd} = 1,9144$)



Nach ρ aufgelöst ergibt sich:

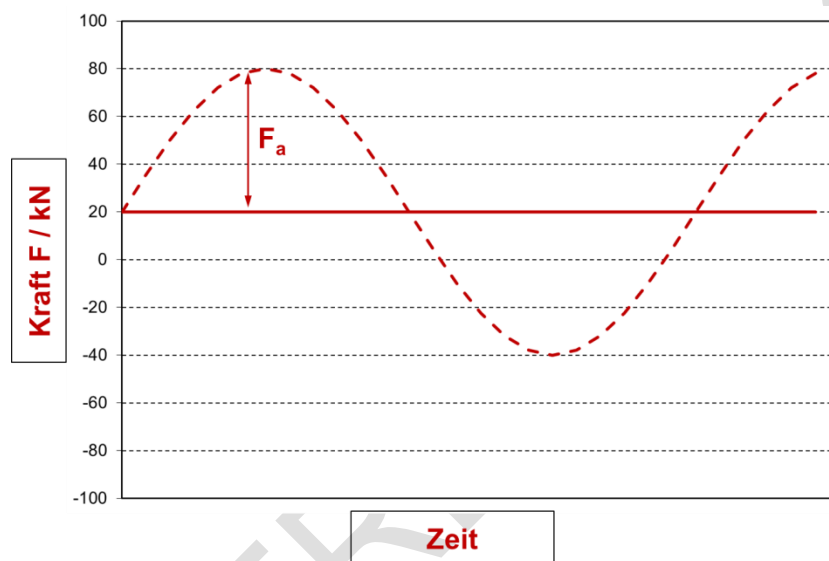
$$\rho = 0,05674 \cdot d = 0,05674 \cdot 50\text{mm} = \underline{\underline{2,837\text{mm}}}$$

Der Kerbradius muss mindestens 2,837 (2,75 bis 3,0) mm betragen.

Aufgrund betrieblicher Vorgaben wird die Antriebswelle mit einem Kerbradius von $\rho = 2,5 \text{ mm}$ gefertigt.

In Ausnahmefällen wirkt zusätzlich zur statischen Vorspannkraft $F_1 = 20 \text{ kN}$ eine rein wechselnde Zugkraft mit der Amplitude $F_2 = \pm 60 \text{ kN}$.

- d) Zeichnen Sie den daraus resultierenden Kraft-Zeit-Verlauf maßstäblich in untenstehendes Diagramm. Beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie die Belastungsamplitude F_a . Wie groß ist die maximal auftretende Kraft?



$$F_{\max} = F_1 + F_2 = 20 \text{ kN} + 60 \text{ kN} = 80 \text{ kN}$$

Achsenbeschriftung:

Korrektter Kraft-Zeit-Verlauf:

Belastungsamplitude F_a :

- e) Dauerfestigkeitsschaubilder (DFS) beschreiben den Zusammenhang zwischen der ertragbaren Spannungsamplitude σ_A und der Mittelspannung σ_m . Nennen Sie zwei Dauerfestigkeitsschaubilder (Namen).

Dauerfestigkeitsschaubild (DFS) nach Smith

Dauerfestigkeitsschaubild (DFS) nach Haigh

- f) Bestimmen Sie für die Maximalkraft aus Aufgabenteil 1 d) die Sicherheit gegen Fließen (Fließbeginn) und begründen Sie, ob die Sicherheit ausreichend ist.

Hinweis: Kerbquerschnitt betrachten.

Festigkeitsbedingung (FB):

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

Maximal vorliegende (Kerb-)Spannung:

$$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \sigma_n = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_{\max}}{A_d} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_1 + F_2}{A_d}$$

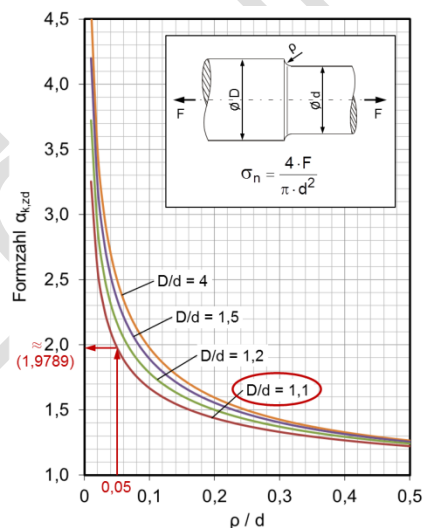
$$(F_{\max} = F_1 + F_2 = 20\text{kN} + 60\text{kN} = 80\text{kN}), (\sigma_n = 40,74\text{MPa})$$

Aus dem Formzahldiagramm folgt:

$$\alpha_{k,zd} = 1,9789 (\approx 2,0)$$

$$\text{(mit } \frac{D}{d} = \frac{55\text{mm}}{50\text{mm}} = 1,1$$

$$\text{und } \frac{\rho}{d} = \frac{2,5\text{mm}}{50\text{mm}} = 0,05)$$



$$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_1 + F_2}{A_d} = 1,9789 \cdot \frac{20\text{kN} + 60\text{kN}}{1.963,5\text{mm}^2} = 80,63\text{MPa}$$

Zulässige Spannung:

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F}$$

Gleichsetzen und nach S_F auflösen:

$$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_1 + F_2}{A_d} \leq \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{A_d}{F_1 + F_2} \cdot \frac{R_e}{\alpha_{k,zd}} = \frac{1.963,5\text{mm}^2}{20\text{kN} + 60\text{kN}} \cdot \frac{650\text{MPa}}{1,9789} \left(= \frac{R_e}{\sigma_{\max}} = \frac{650\text{MPa}}{80,63\text{MPa}} \right)$$

$$S_F = 8,06 > 1,2 \text{ (1,5)}$$

Die Sicherheit ist ausreichend!

- g) Bestimmen Sie für die überlagerte Belastung aus Aufgabenteil 1 d) die Sicherheit gegen Schwingungsbruch in der Kerbe und begründen Sie, ob die Sicherheit ausreichend ist.

Hinweis: Kerbquerschnitt betrachten.

Falls Sie Aufgabenteil f) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\alpha_{k,zd} = 2,0$.

Festigkeitsbedingung (FB):

$$\sigma_{a,max} \leq \sigma_{a,zul}$$

Maximal wirkende (Kerb-)Spannung:

$$\sigma_{a,max} = \beta_{k,zd} \cdot \sigma_a = \beta_{k,zd} \cdot \frac{F_2}{A_d}$$

$$\beta_{k,zd} = \frac{\alpha_{k,zd}}{1 + \frac{55}{R_e} \sqrt{\frac{C}{\rho}}} = \frac{2,0}{1 + \frac{55}{650} \sqrt{\frac{2}{2,5}}} = 1,8593$$

(mit C=2 bei Zug)

$$\sigma_{a,max} = 1,8593 \cdot \frac{60 \text{ kN}}{1.963,5 \text{ mm}^2} = 56,82 \text{ MPa}$$

Zulässige Spannung:

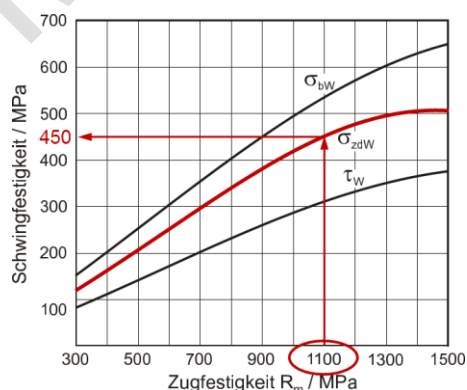
$$\sigma_{a,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D}$$

Mittelspannung:

$$\sigma_m = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_1}{A_d} = 1,9789 \cdot \frac{20 \text{ kN}}{1.963,5 \text{ mm}^2} = 20,16 \text{ MPa}$$

Aus Diagramm „Wechselfestigkeit“ folgt:

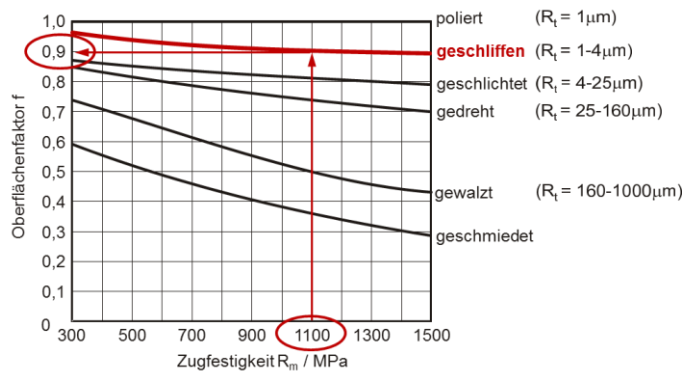
$$\sigma_{w, \text{poliert}}(R_m = 1100 \text{ MPa}) = 450 \text{ MPa}$$



zu 1 g)

Aus Diagramm „Oberflächenfaktor“ folgt:

$$f_{\text{geschliffen}}(R_m = 1100 \text{ MPa}) = 0,9$$



Zug-(Druck-)Wechselfestigkeit:

$$\sigma_{w,\text{geschliffen}} = f_{\text{geschliffen}} \cdot \sigma_{w,\text{poliert}}$$

$$\sigma_{w,\text{geschliffen}} = 0,9 \cdot 450 \text{ MPa} = 405 \text{ MPa}$$

Ertragbare Spannungsamplitude (zähe Werkstoffe):

$$\sigma_A = \sigma_{w,\text{geschliffen}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

$$\sigma_A = 405 \text{ MPa} \cdot \sqrt{1 - \frac{20,16 \text{ MPa}}{1100 \text{ MPa}}} = 401,27 \text{ MPa}$$

Gleichsetzen und nach S_D auflösen:

$$\sigma_{a,\text{max}} = \beta_{k,zd} \cdot \frac{F_2}{A_d} = \frac{\sigma_A}{S_D}$$

$$S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_{a,\text{max}}} = \left(\frac{\sigma_A}{\beta_{k,zd}} \cdot \frac{A_d}{F_2} \right) = \frac{401,27 \text{ MPa}}{56,82 \text{ MPa}}$$

$$\underline{\underline{S_D = 7,14 > 1,5}}$$

Die Sicherheit ist ausreichend!

Aufgabe 2:

(30 Punkte)

In einem rohrförmigen Behälter aus der Aluminiumlegierung 7475 (AlZn5,5MgCu) wird gasförmiger Treibstoff gelagert (siehe Abbildung 2.1). Der Tank hat einen Innendurchmesser von $d_i = 300\text{mm}$, eine zylindrische Länge von $l = 1200\text{mm}$ und eine Wandstärke von $s = 2\text{mm}$.

AlZn5,5MgCu: $R_e = 450\text{MPa}$; $R_m = 550\text{MPa}$; $E = 70000\text{MPa}$; $\mu = 0,3$; $A_5 \geq 10\%$

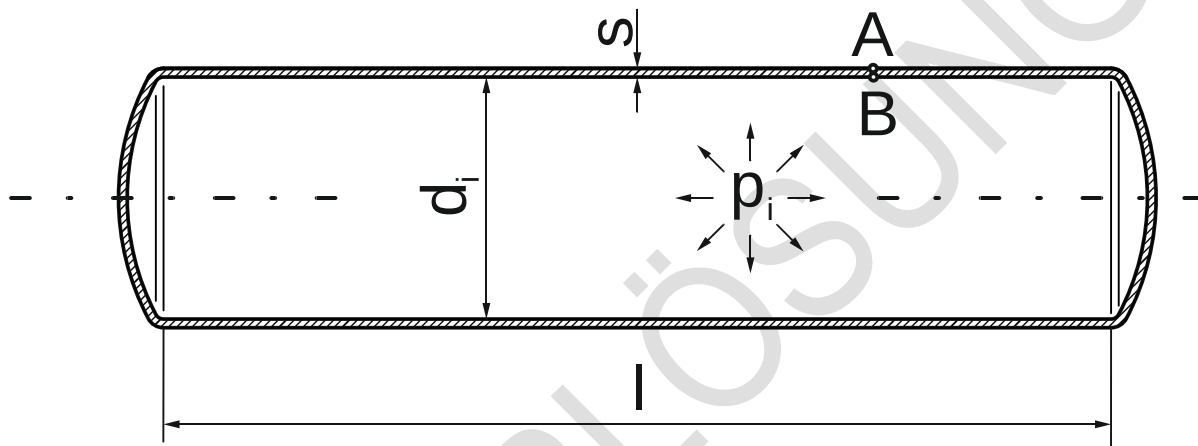


Abbildung 2.1: Treibstofftank aus AlZn5,5MgCu

- a) Der Tank wird mit gasförmigem Treibstoff mit einem Überdruck von 20 bar gefüllt. Berechnen Sie die Längsspannungen σ_l , die Radialspannungen σ_r und die Umfangsspannungen σ_u an den Punkten A (Rohraußenseite) und B (Rohrinnenseite), siehe Abbildung 2.1. Ist diese Belastung mit Sicherheit ertragbar? Verwenden Sie gegebenenfalls die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH).

Überprüfen, ob es sich um einen dünnwandigen Hohlzylinder handelt. Es muss gelten:

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{304}{300} = 1,013 \leq 1,2 \rightarrow \text{dünnwandiger Hohlzylinder}$$

Längsspannung an Punkt A und Punkt B gleich groß:

$$\sigma_{l,A} = \sigma_{l,B} = \frac{p \cdot d_i}{4 \cdot s} = \frac{2\text{MPa} \cdot 300\text{mm}}{4 \cdot 2\text{mm}} = \underline{\underline{75\text{MPa}}}$$

zu 2 a)

Umfangsspannung an Punkt A und Punkt B gleich groß:

$$\sigma_{u,A} = \sigma_{u,B} = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} = \frac{2 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm}}{2 \cdot 2 \text{ mm}} = \underline{\underline{150 \text{ MPa}}}$$

Radialspannung an Punkt A:

$$\sigma_r = \underline{\underline{0 \text{ MPa}}} \text{ (außen)}$$

Radialspannung an Punkt B:

$$\sigma_r = -p = \underline{\underline{-2 \text{ MPa}}} \text{ (innen)}$$

Festigkeitsbedingung gegen Versagen:

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul} = \begin{cases} R_e / S_F & \text{gegen Fließen} \\ R_m / S_B & \text{gegen Bruch} \end{cases}$$

Höchstbeanspruchte Stelle: Punkt B

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(150 - 75)^2 + (75 + 2)^2 + (-2 - 150)^2} \text{ MPa} = 131,64 \text{ MPa}$$

$$131,64 \leq \sigma_{zul} = \begin{cases} 450 \text{ MPa} / (1,2 - 2) = 225 \text{ MPa} - 375 \text{ MPa} \\ 550 \text{ MPa} / (2 - 3) = 183,3 \text{ MPa} - 275 \text{ MPa} \end{cases}$$

Die Last (Innendruck) kann mit Sicherheit ertragen werden.

- b) Wird die Sicherheit gegen Versagen größer oder kleiner, wenn Sie in Aufgabenteil 2 a) statt der Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) die Schubspannungshypothese (SH) verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Berechnung der Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese (SH):

Punkt A:

$$\sigma_V = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_u - \sigma_r = 150\text{MPa} - 0\text{MPa} = 150\text{MPa} > \sigma_V(\text{GEH})$$

Punkt B:

$$\sigma_V = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_u - \sigma_r = 150\text{MPa} + 2\text{MPa} = 152\text{MPa} > \sigma_V(\text{GEH})$$

Die Sicherheit wird kleiner, da die Vergleichsspannung bei Verwendung der Schubspannungshypothese (SH) größer wird.

(Auch andere Begründungen sind möglich.)

- c) Bei einer anderen Anwendung wurden am Tank die folgenden Spannungen am Punkt A (siehe Abbildung 2.1) numerisch ermittelt: $\sigma_l = 50\text{MPa}$, $\sigma_u = 100\text{MPa}$ und $\sigma_r = 0\text{MPa}$. Um wie viel verlängert sich bei dieser Belastung der zylindrische Teil des Behälters?

Verallgemeinertes Hookesches Gesetz:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_l - \mu \sigma_u]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{70.000\text{MPa}} \cdot [50\text{MPa} - 0,3 \cdot 100\text{MPa}] = 0,0002857$$

Daraus ergibt sich die Verlängerung zu:

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon_x = 1.200\text{mm} \cdot 0,0002857 = \underline{\underline{0,343\text{mm}}}$$

Der Tank verlängert sich um 0,343 mm.

- d) Bei einer Reparatur wird ein Wanddurchriss im Behälter geschweißt. Die Schweißnaht verläuft dabei unter 15° zur Zylinderachse (siehe Abbildung 2.2). Wie groß ist die Normalspannung senkrecht zur Naht und welche Schubspannung ergibt sich parallel zur Naht? Verwenden Sie für die Berechnung die folgenden Spannungen: $\sigma_l = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 100 \text{ MPa}$ und $\sigma_r = 0 \text{ MPa}$.

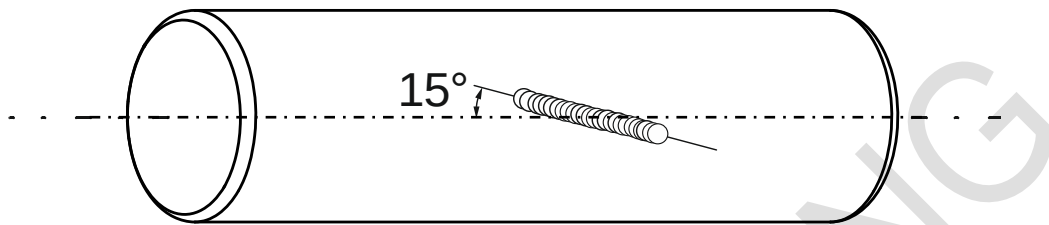
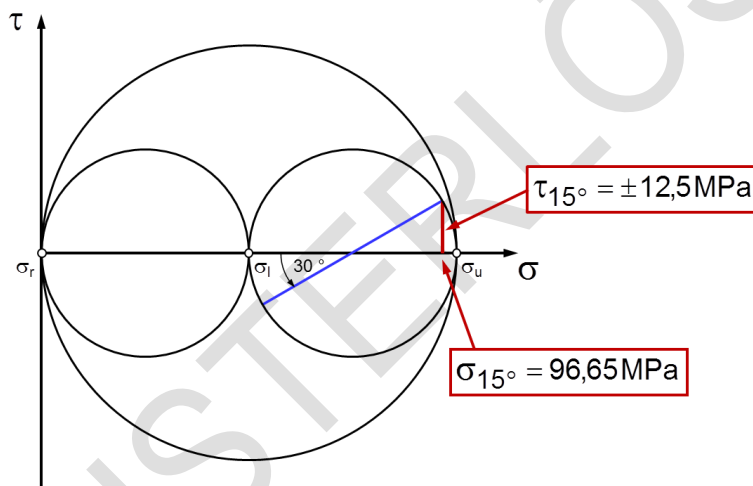


Abbildung 2.2: Treibstofftank mit Reparaturschweißnaht aus AlZn5,5MgCu

Variante 1: Mohrscher Kreis



Variante 2: Berechnung

Die aus der Längs- und Umfangsspannung resultierenden Spannungsanteile werden getrennt berechnet und dann superponiert:

$$\sigma_{15} = \sigma_l \cos^2(90^\circ - 15^\circ) + \sigma_u \cos^2(-15^\circ) = \underline{\underline{96,65 \text{ MPa}}}$$

$$\tau_{15} = \frac{1}{2} \sigma_l \sin 2(90^\circ - 15^\circ) + \frac{1}{2} \sigma_u \sin 2(-15^\circ) = \underline{\underline{-12,5 \text{ MPa}}}$$

(Das Vorzeichen hängt von der Definition des Winkels ab
→ beide Vorzeichen gelten)

- e) Der Tank soll an einem Tiefseetauchboot montiert werden. Der Tank wird wieder mit 20 bar Überdruck an Land befüllt. Das Tauchboot soll mindestens 2000 m tief tauchen können. Wie dick muss die Wandung gewählt werden, damit Fließen in Wandmitte mit Sicherheit ausgeschlossen wird (Berechnung nach Schubspannungshypothese (SH))? Bitte beachten Sie bei der Bestimmung von $\sigma_{\max}$, dass der Behälter unter Außendruck steht. Der Innendurchmesser des Tanks soll sich durch die veränderte Wanddicke nicht ändern ($d_i = \text{konst.}$). Wenn es Ihnen nicht gelingt, den in 2000 m Tiefe wirkenden Druck zu berechnen, verwenden Sie bitte $p_a = 20 \text{ MPa}$.

Festigkeitsbedingung nach Schubspannungshypothese (SH) für die Wandmitte ($\sigma_r > \sigma_u$, da Außendruck):

$$\sigma_v = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_r - \sigma_u = -\frac{p}{2} - \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot s} \leq \sigma_{\text{zul}} = \frac{R_e}{S_F}$$

Nach s aufgelöst ergibt sich:

$$\frac{-p \cdot d_i}{2 \cdot \left(\frac{R_e}{S_F} + \frac{p}{2} \right)} = \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot \left(-\frac{R_e}{S_F} - \frac{p}{2} \right)} \leq s$$

Der Außendruck ergibt sich zu:

$$p_a = \frac{\text{Gewicht} \cdot \text{Wassersäule } g}{\text{Wirkfläche}} = \frac{(\rho \cdot t \cdot S) g}{S}$$

$$p_a = 0,001 \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \cdot 2.000.000 \text{ mm} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$p_a = 19.620 \frac{\text{g}}{\text{mm}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19,62 \text{ MPa}$$

Der wirkende Druck wird so:

$$p_i - p_a = 2 \text{ MPa} - 19,62 \text{ MPa} = -17,62 \text{ MPa}$$

Die Wanddicke ergibt sich damit zu:

$$s \geq \frac{p \cdot d_i}{2 \cdot \left(-\frac{R_e}{S_F} - \frac{p}{2} \right)} = \frac{-17,62 \text{ MPa} \cdot 300 \text{ mm}}{2 \cdot \left(-\frac{450 \text{ MPa}}{15} - \frac{-17,62 \text{ MPa}}{2} \right)} = \underline{\underline{9,08 \text{ mm}}}$$

Überprüfen, ob es sich um einen dünnwandigen Hohlzylinder handelt. Es muss gelten:

$$\frac{d_a}{d_i} = \frac{318}{300} = 1,06 \leq 1,2 \rightarrow \text{dünnwandiger Hohlzylinder}$$

Die Wanddicke muss mindestens 9,1 mm betragen.