Institut für Materialprüfung,
Werkstoffkunde und Festigkeitslehre
Universität Stuttgart

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder

Institut für Materialprüfung,
Werkstoffkunde und Festigkeitslehre
Universität Stuttgart

Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder

Datum: 08.10.2012

Hilfsmittel: Ausgegebenes Formelblatt, nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Prüfungsdauer: 60 min

Der im 1. Prüfungsteil aufgeführte Hinweis für Wiederholer gilt auch für diese Teilprüfung. **Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Lösungswege werden eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg wird mitbewertet!**

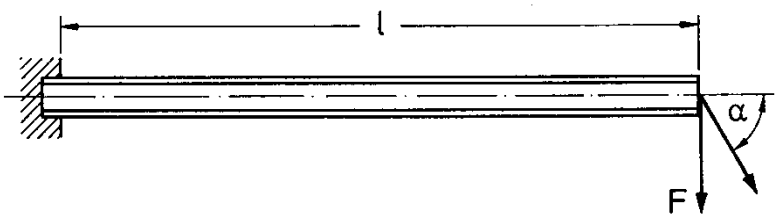
Name: **Matrikelnummer:**

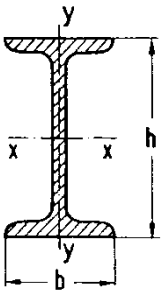
Studiengang:

Musterlösung

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Ein Träger aus dem Baustahl St 60 mit dem Walzprofil I 120 (siehe **Abbildung 1.1**) und der freien Länge l = 2,25 m ist an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch die Kraft 4 kN statisch belastet. Diese wirkt normalerweise senkrecht zu dem Träger (α = 90°), sie kann aber auch schräg bis zu einem Winkel von α = 58° angreifen (**Abbildung 1.1**).





Profil I 120 (DIN 1025)

h = 120 mm	I_x = 328 cm^4	W_{bx} = 54,7 cm^3
b = 58 mm	I_y = 21,5 cm^4	W_{by} = 7,41 cm^3
A = 14,2 cm²		

Abbildung 1.1: Träger mit dem Walzprofil I 120

St 60: R_e = 340 N/mm²
$R_m \geq$ 600 N/mm²
$\sigma_{bw(gewalzt)}$ = 190 N/mm²
A_5 = 15 %

a) Geben Sie die beiden Bereiche an, an denen die Last betragsmäßig maximal ist. Welche Art von Belastung liegt dort jeweils vor?

Ergebnis	
	Obere Fläche (Zuglast) und untere Fläche (Druckbelastung). **Das betragsmäßige Maximum der Zug- und Druckspannungen liegt jeweils an der Kante bei der Einspannung.**

b) Berechnen Sie den Betrag der höchsten Spannung im Träger für den Fall der senkrechten Belastung (α = 90°). Geben Sie die Spannungen in den beiden höchstbelasteten Bereichen des Trägers an.

Platz für Nebenrechnungen

$$\sigma_{b,max} = \frac{M_{b,max}}{W_b} \qquad M_{b,max} = F \cdot l \qquad W_b = W_{bx}$$

$$\sigma_{b,max} = \frac{M_{b,max}}{W_b x} = \frac{F \cdot l}{W_{b,x}} = \frac{4000\,N \cdot 2250\,mm}{54{,}7 \cdot 10^3\,mm^3} = 164{,}5\,MPa$$

Zuglast an der oberen Kante:

$\sigma_{Zug,max} = 164{,}5\,MPa$

Druckbelastung an der unteren Kante:

$\sigma_{Druck,max} = -164{,}5\,MPa$

Ergebnis

$\sigma_{Zug,max} = 164{,}5\,MPa$

$\sigma_{Druck,max} = -164{,}5\,MPa$

c) Berechnen Sie die höchste Zugspannung und die höchste Druckspannung im Träger an der jeweils höchstbelasteten Stelle für den Belastungsfall $\alpha = 58°$.

Platz für Nebenrechnungen

Horizontale Kraftkomponente (Zug):

$$F_h = F \cdot \cos\alpha = 4000\,N \cdot 0{,}5299 = 2119{,}7\,N$$

Vertikale Kraftkomponente (Biegung):

$$F_V = F \cdot \sin\alpha = 4000\,N \cdot 0{,}8480 = 3392{,}2\,N$$

Spannungskomponenten:

$$\sigma_z = \frac{F_h}{A} = \frac{2119{,}7\,N}{1420\,mm^2} = 1{,}5\,MPa$$

$$\sigma_b = \frac{F_h \cdot l}{W_{bx}} = \frac{3392{,}2\,N \cdot 2250\,mm}{54{,}7 \cdot 10^3\,mm^3} = 139{,}5\,MPa$$

Maximale Spannungen:

$$\sigma_{Zug,max} = \sigma_b + \sigma_z = 139{,}5\,MPa + 1{,}5\,MPa = 141{,}0\,MPa$$

$$\sigma_{Druck,max} = \sigma_z - \sigma_b = 1{,}5\,MPa - 139{,}5\,MPa = -138{,}0\,MPa$$

Ergebnis

$$\sigma_{Zug,max} = 141{,}0\,MPa$$
$$\sigma_{Druck,max} = -138{,}0\,MPa$$

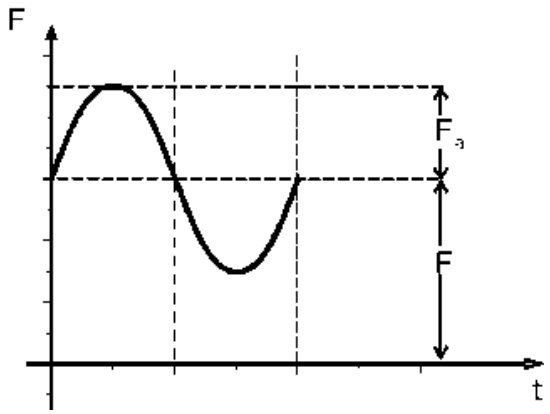
d) Wie lang dürfte der Träger höchstens sein, damit die maximale Spannung in Teilaufgabe 1c) den Wert von 42 MPa nicht überschreitet?

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_z = 1{,}5\,\text{MPa}$ unabhängig von l $\sigma_{Zug,max} = \sigma_b + \sigma_z \leq 42\,\text{MPa}$ $\sigma_b \leq 40{,}5\,\text{MPa}$ $\sigma_b = \frac{F_v \cdot l}{W_{bx}} = \frac{3395{,}2\,\text{N} \cdot l}{54{,}7 \cdot 10^3\,\text{mm}^3} \leq 40{,}5\,\text{MPa}$ $\rightarrow l \leq \frac{54{,}7 \cdot 10^3\,\text{mm}^3}{3392{,}2\,\text{N}} \cdot 40{,}5\,\text{MPa} = 653{,}1\,\text{mm}$
Ergebnis	$l_{max} = 653{,}1\,\text{mm}$

e) Die Kraft F werde nun durch eine an dem Träger der Länge l = 2,25 m hängende Masse verursacht, die häufig in vertikale Schwingungen gerät. Dadurch entsteht zusätzlich zu der statischen Belastung durch F eine überlagerte Wechselbeanspruchung, bei der man mit Amplituden von der Größe $F_a = F/2$ rechnen muss.

Skizzieren Sie das Kraft-Zeit-Diagramm und beschriften Sie es. Wie groß ist die maximal auftretende Kraft in diesem Belastungsfall?

Platz für Nebenrechnungen



je 0,5 für Beschriftungen (4x)

1P für Kurve mit Achsen

$$F_{max} = F + F_a = 1{,}5 \cdot F = 6\,kN$$

Ergebnis

$$F_{max} = 6\,kN$$

f) Als Sicherheit gegen plastisches Fließen ist $S_F \geq 1{,}3$ zu gewährleisten. Kann diese Sicherheit bei der Maximalkraft der schwingenden Belastung eingehalten werden?

Platz für Nebenrechnungen

Festigkeitsbedingung (FB):

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{max,zul}$$

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max} \cdot l}{W_{bx}} = \frac{6000\,N \cdot 2250\,mm}{54{,}7 \cdot 10^3\,mm^3} = 246{,}8\,MPa$$

$$\sigma_{max,zul} = \frac{R_e}{S_F}$$

$$S_F = \frac{R_e}{\sigma_{max}} = \frac{340\,MPa}{246{,}8\,MPa} = 1{,}38 > 1{,}3$$

Sicherheit gegen Fließen ist gewährleistet.

Ergebnis

Sicherheit gegen Fließen ist gewährleistet.

g) Als Sicherheit gegen Schwingungsbruch ist $S_D \geq 2{,}2$ zu gewährleisten. Kann diese Sicherheit bei der schwingenden Belastung eingehalten werden?

Platz für Nebenrechnungen	**Festigkeitsbedingung (FB):** $\sigma_a \leq \sigma_{a,zul}$ $\sigma_a = \frac{F_a \cdot l}{W_{bx}} = \frac{2000\,N \cdot 2250\,mm}{54{,}7 \cdot 10^3\,mm^3} = 82{,}3\,MPa$ $\sigma_{a,zul} = \frac{\sigma_A}{S_D}$ $\sigma_A = \sigma_{bw} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = 190\,MPa \cdot \sqrt{1 - \frac{164{,}5}{600}} = 161{,}9\,MPa$ $S_D = \frac{\sigma_A}{\sigma_a} = \frac{161{,}9\,MPa}{82{,}3\,MPa} = 1{,}97 < 2{,}2$ **Sicherheit gegen Schwingungsbruch ist nicht gewährleistet.**
Ergebnis	**Sicherheit gegen Schwingungsbruch ist nicht gewährleistet.**

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

In einem Versuchsstand soll ein Rohrsegment aus dem austenitischen Stahl 1.4301 (R_e = 650 MPa, R_m = 750 MPa, A = 45 %, E = 190000 MPa und μ = 0,3) geprüft werden. Das Rohrsegment wird mit dem Innendruck p_i belastet. Um das Rohr dicht zu verschließen wird es zwischen zwei biegesteifen Platten eingespannt, **Abbildung 2.1**, und mit einer Kraft F hydraulisch belastet. Die Reibung zwischen Rohrsegment und den Platten kann vernachlässigt werden, die Maßangaben in der Abbildung sind in mm.

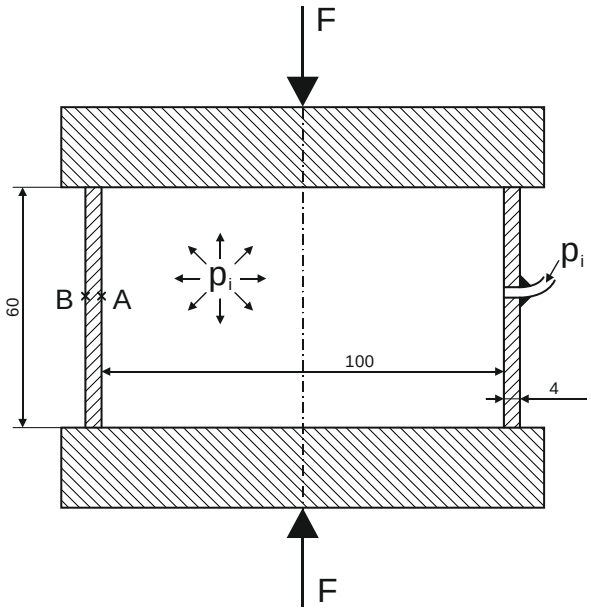


Abbildung 2.1: Rohrprüfstand

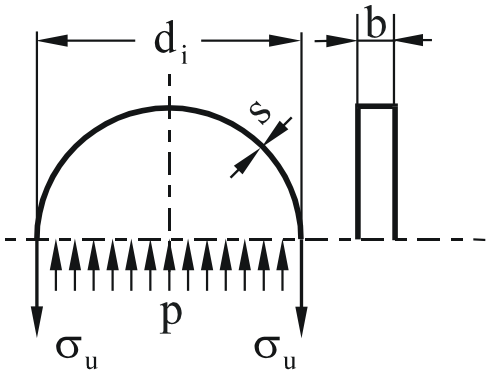
a) Geben Sie die Beziehung zur Berechnung der minimal erforderlichen Anpresskraft F in Abhängigkeit vom Durchmesser d_i und vom Druck p_i an.

Platz für Nebenrechnungen	***Die außen aufgebrachte Last F muss gleich der aus dem Innendruck resultierenden Kraft auf die innere Kreisfläche sein.*** $F = \text{Innendruck} \cdot \text{belastete Ringfläche} = p_i \cdot \pi \cdot r^2 = p_i \cdot \pi \cdot \frac{d_i^2}{4}$
Ergebnis	$F = p_i \cdot \pi \cdot r^2 = p_i \cdot \pi \cdot \frac{d_i^2}{4}$

b) Welche Anpresskraft wird bei einem Innendruck p_i = 300 bar mindestens benötigt, um das Rohr dicht zu verschließen?

Ergebnis	$F = p_i \cdot \pi \cdot \frac{d_i^2}{4} = 30MPa \cdot \pi \cdot \frac{100^2}{4} mm^2 = 235{,}62kN$

c) Leiten Sie über das Kräftegleichgewicht am Rohr die Formel zur Berechnung der Umfangsspannung σ_u als Funktion des Innendurchmessers d_i, des Innendrucks p_i und der Wanddicke s her.

Platz für Nebenrechnungen	 $p d_i b = \sigma_u \cdot 2sb$ $\sigma_u = \frac{p d_i}{2s}$
Ergebnis	$\sigma_u = \frac{p d_i}{2s}$

d) Das Rohrsegment soll in einem Versuch mit einem Innendruck p_i = 400 bar und einer Deckelkraft von 400 kN belastet werden. Berechnen Sie am Punkt A (**Abbildung 2.1**) die Spannung σ_u in Umfangsrichtung, die Spannung σ_r in radialer Richtung und die Spannung σ_a axialer Richtung (Falls Sie Aufgabe 2c) nicht lösen konnten verwenden Sie die folgende Näherungsgleichung: $\sigma_u = \frac{p d_i}{10\,mm}$).

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_u = \frac{p_i d_i}{2s} = \frac{40MPa \cdot 100mm}{2 \cdot 4mm} = 500MPa$ **Res. Kraft aus Deckelkraft und Innendruck:** $F_{res} = p_i \cdot \pi \cdot r_i^2 + F_{Deckel} = 40MPa \cdot \pi \cdot 50^2 mm^2 - 400kN = -85,8kN$ $\sigma_a = \frac{-F_{res}}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{-85840,7N}{\pi \cdot (54^2 - 50^2)mm^2} = -65,7MPa$ **Abweichende Ergebnisse durch Näherung (Kesselformel) möglich:** $\sigma_a = \frac{p_i d_i}{4s}$ $\sigma_r = -40\,MPa$
Ergebnis	$\sigma_u = 500MPa$; $\sigma_a = -65,7MPa$ und $\sigma_r = -40,0\,MPa$

e) Wie groß sind die Spannungen an der Rohraußenseite (Punkt B) bei der Belastung aus Aufgabenteil 2d) ?

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_u = \frac{p_i d_i}{2s} = \frac{40MPa \cdot 100mm}{2 \cdot 4mm} = 500MPa$ $\sigma_a = \frac{-F_{res}}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} = \frac{-85840,7N}{\pi \cdot (54^2 - 50^2)mm^2} = -65,7MPa$ $\sigma_r = -p_i = -0MPa$
Ergebnis	$\sigma_u = 500MPa$; $\sigma_a = -65,7MPa$ und $\sigma_r = -0MPa$

f) Aus sicherheitstechnischen Gründen muss an der Außenoberfläche (Punkt B) Fließen vermieden werden. Kann die Belastung aus Aufgabe 2d) mit ausreichender Sicherheit vom Ring ertragen werden?

Platz für Nebenrechnungen

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen (da duktiler Werkstoff) nach der **Schubspannungshypothese**:

$$\sigma_v = \sigma_{max} - \sigma_{min} = \frac{R_e}{S} \quad \textbf{\textit{daraus folgt}}$$

$$S = \frac{R_e}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} = \frac{650\ MPa}{500\ MPa + 65{,}7\ MPa} = 1{,}15$$

Berechnung der Sicherheit gegen Fließen nach der **GEH**:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_a^2 - \sigma_u \sigma_a} = \frac{R_e}{S} \quad \textbf{\textit{daraus folgt}}$$

$$S = \frac{R_e}{\sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_a^2 - \sigma_u \sigma_a}} = \frac{650 MPa}{535{,}9 MPa} = 1{,}21$$

Sicherheitsbeiwert gegen Fließen 1,2-2

Ergebnis

Die Sicherheit ist nicht ausreichend (SH)

bzw. ausreichend (GEH)

g) Bis zu welchem Druck kann der Innendruck p_i maximal gesteigert werden ohne dass der Ringwerkstoff an der Außenoberfläche (Punkt B) fließt? Die Axialspannung σ_a wird dabei konstant gehalten.

Platz für Nebenrechnungen

Bedingung für Werkstoffließen $\sigma_v = R_e$:

*mit **Schubspannungshypothese**:*

$$\frac{p_i d_i}{2s} - \frac{-F}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} = R_e \quad \text{daraus folgt}$$

$$p_i = \left(R_e + \frac{-F}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} \right) \frac{2s}{d_i} = \left(650\text{MPa} + \frac{-85840{,}7\text{N}}{\pi \cdot (54^2 - 50^2)}\text{MPa} \right) \frac{2 \cdot 4\text{mm}}{100\text{mm}} = 46{,}7\text{MPa}$$

*mit **GEH**:*

$$\sqrt{\left(\frac{p_i d_i}{2s} \right)^2 + \left(\frac{-F}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} \right)^2 + \frac{p_i d_i}{2s} \frac{F}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)}} = R_e \quad \text{daraus folgt mit} \quad \frac{d_i}{2s} = A$$

und $\frac{F}{\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)} = B$:

$$p_i^2 \, A^2 + p_i \, A B + \left(B^2 - R_e^2 \right) = 0 \quad \text{bzw}$$

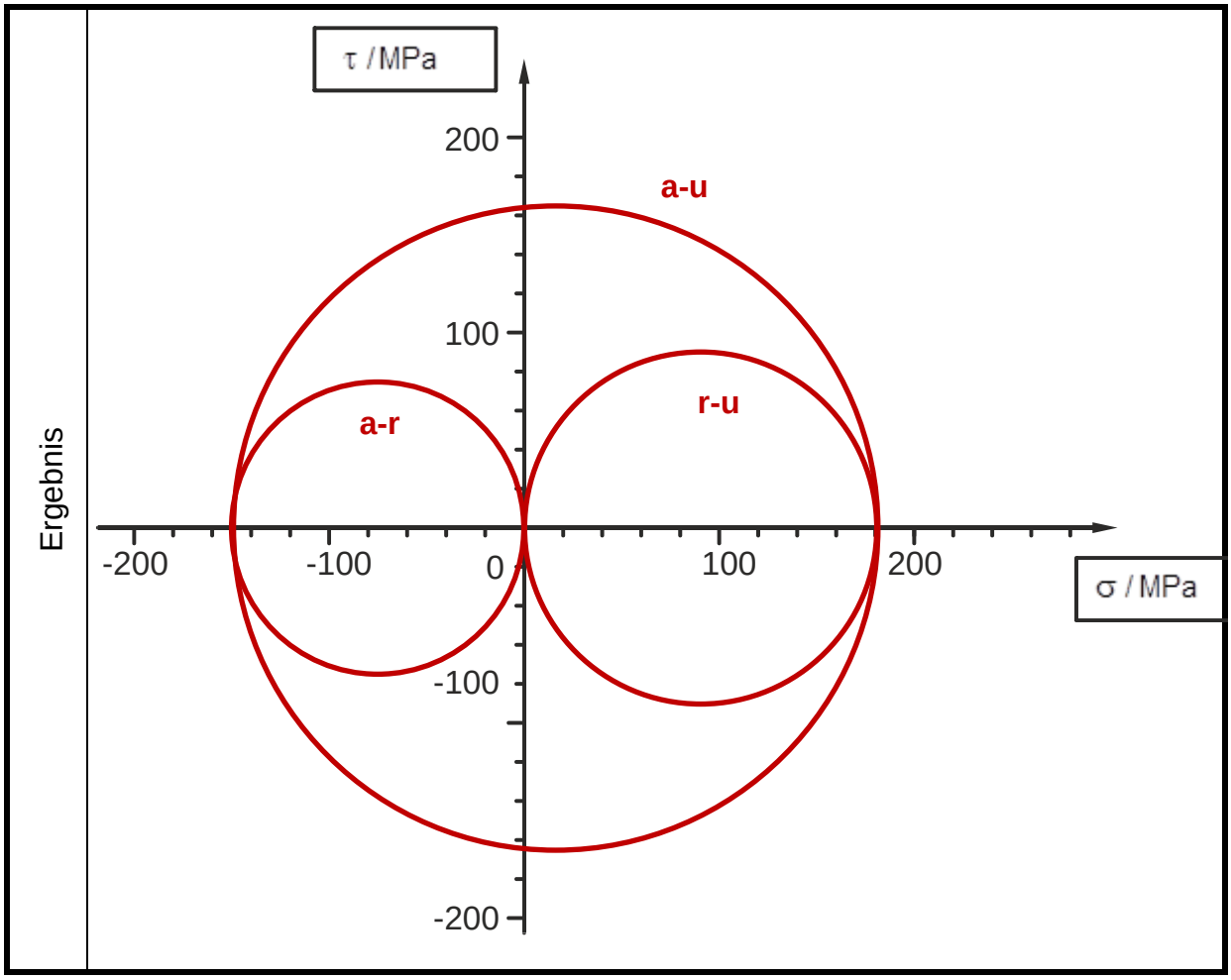
$$p_i = \frac{-AB \pm \sqrt{A^2 B^2 - 4A^2 \left(B^2 - R_e^2 \right)}}{2A^2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\left(B^2 - R_e^2 \right)}}{2A}$$

$$p_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\left(B^2 - R_e^2 \right)}}{2A} = \frac{-65{,}7 \pm 1295{,}0}{25}\text{MPa} = 49{,}1\text{MPa}$$

Ergebnis

Der maximal ertragbare Druck beträgt 467 (491) bar

h) Für einen neuen Lastfall wurden mit einem optischen Verfahren folgende Spannungen am Punkt B bestimmt: σ_u = 180 MPa; σ_a = -150 MPa. Zeichnen Sie die Mohr'schen Spannungskreise für die a-r-Ebene, die a-u-Ebenen und die r-u-Ebene. (u bedeutet Umfang, a bedeutet axial und r bedeutet radial). Beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie die jeweiligen Kreise.



i) Um wie viele mm vergrößert sich der Radius des Rohres bei der Belastung aus Aufgabenteil 2h) ?

Platz für Nebenrechnungen	***Berechnung der Rohraufweitung aus der Zunahme des Umfangs ΔU*** $\Delta U = 2\,\pi\,\Delta r$ daraus folgt: $\Delta r = \frac{\Delta U}{2\,\pi} = \frac{\varepsilon_u\,2\,\pi\,r}{2\,\pi} = \frac{(\sigma_u - \mu(\sigma_a + \sigma_r))r}{E} = \frac{(180\,MPa + 0{,}3 \cdot 150\,MPa)\,54\,mm}{190000\,MPa} = 0{,}064\,mm$
Ergebnis	**Der Rohrdurchmesser vergrößert sich um 0,064 mm**

Guten Erfolg!