

Teilprüfung

EINFÜHRUNG IN DIE FESTIGKEITSLEHRE

Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder

Datum: 11. Oktober 2010

Hilfsmittel: Ausgegebenes Formelblatt, nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Prüfungsdauer: 60 min

Der im 1. Prüfungsteil aufgeführte Hinweis für Wiederholer gilt auch für diese Teilprüfung.
**Nur die auf dem Aufgabenblatt eingetragenen Lösungen und Lösungswege werden
eingesammelt und bewertet! Der Lösungsweg wird mitbewertet!**

Name:

Matrikelnummer:

Musterlösung

Aufgabe1:

Abbildung 1.1 zeigt eine Wandhalterung aus S275. Diese wird unter dem Winkel α mit einer Kraft F beaufschlagt.

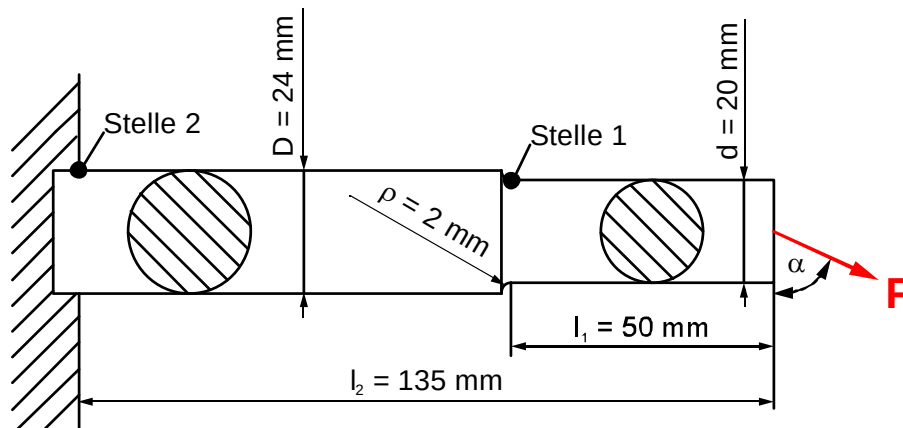


Abbildung 1.1: Wandhalterung

S275: $R_e = 275 \text{ MPa}$; $R_m = 440 \text{ MPa}$; $A_5 = 22 \%$; $\mu = 0,3$; $E = 210000 \text{ MPa}$;

Hinweis: Die Kerbwirkung an der Einspannstelle (Stelle 2), Kerbspannungskomponenten in Tangentialrichtung an Stelle 1, sowie Querkraftschub können vernachlässigt werden.

- a) Bestimmen Sie für die Wandhalterung die Formzahlen für Zug-/Druck- und Biegebeanspruchung.

Platz für Nebenrechnungen	$\frac{D}{d} = 1,2; \frac{\rho}{d} = 0,1; \text{ Aus Diagramm: } \alpha_{k,zd} = 1,78, \quad \alpha_{k,b} = 1,65$ $\alpha_{k,zd} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(D-d)} + 7 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{d}\right)^2}} = 1,784$ $\alpha_{k,b} = 1 + \frac{1}{\sqrt{0,62 \cdot \frac{2 \cdot \rho}{(D-d)} + 116 \cdot \frac{\rho}{d} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{\rho}{d}\right)^2 + 0,2 \cdot \frac{d}{D} \cdot \left(\frac{2 \cdot \rho}{(D-d)}\right)^3}} = 1,638$	
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
$\alpha_{k,zd} =$	$\alpha_{k,zd} = 1,78$	-
$\alpha_{k,b} =$	$\alpha_{k,b} = 1,64$	-

- b) Der Winkel α betrage 0° (reine Biegung). Bei welcher Kraft F tritt an der Wandhalterung erstmalig Fließen auf? An welcher Stelle ist dies der Fall?

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{b,i} = \frac{M_{b,i}}{W_{b,i}} \quad \text{mit} \quad M_{b,i} = F \cdot l_i, \quad i = 1, 2$		
	Fließbedingung: $\sigma_v = R_e (= \sigma_b)$		
	$\frac{F_{FB} \cdot l_i}{W_{b,i}} = R_e \rightarrow F_{FB} = \frac{R_e \cdot W_{b,i}}{l_i}$		
	$W_{b,i} = \frac{\pi}{32} d_i^3$		
	Kerbstelle (Stelle 1):		
	$F_{FB} = \frac{R_e \cdot \frac{\pi}{32} d_1^3}{\alpha_{k,b} \cdot l_1} = \frac{R_e \cdot \frac{\pi}{32} (20\text{mm})^3}{1,638 \cdot 50\text{mm}} = 2637,2\text{N}$		
	Einspannstelle (Stelle 2):		
	$F_{FB} = \frac{R_e \cdot \frac{\pi}{32} d_2^3}{l_2} = \frac{R_e \cdot \frac{\pi}{32} (24\text{mm})^3}{135\text{mm}} = 2764,6\text{N}$		
	Fließen tritt bei einer Last $F = 2637,2\text{ N}$ im Kerbgrund (Stelle 1) ein.		

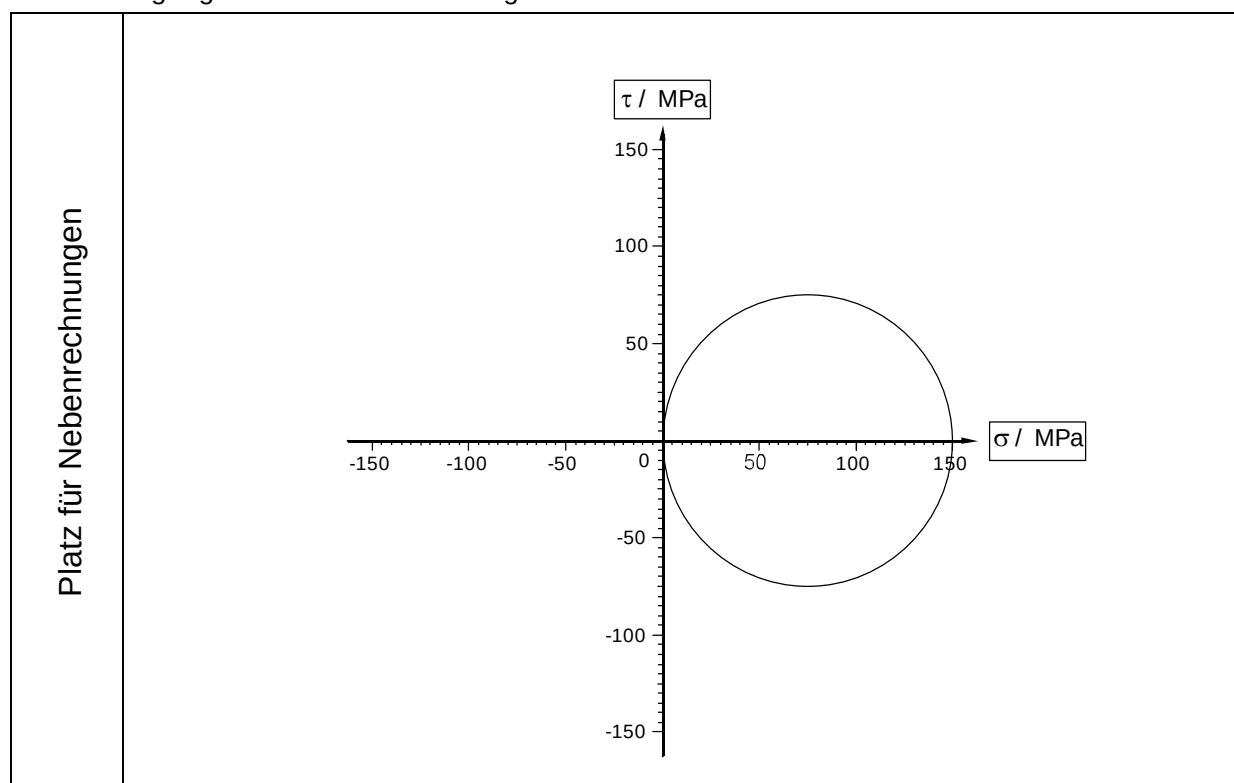
- c) Im Folgenden greift die in Aufgabenteil b) berechnete Kraft F unter einem Winkel von $\alpha = 60^\circ$ an. Ermitteln Sie für diesen Fall die höchstbeanspruchte Stelle und geben Sie die Vergleichsspannung an dieser Stelle an. Ist dort die Sicherheit gegen Versagen ausreichend?

(Wenn Sie Aufgabenteil b) nicht lösen konnten, verwenden Sie $F = 2600\text{N}$)

Platz für Nebenrechnungen	Zug und Biegekomponente der Kraft: $F_{\text{Zug}} = F \cdot \sin \alpha = 2637,2\text{N} \cdot \sin(60^\circ) = 2283,9\text{N}$ $F_{\text{biegung}} = F \cdot \cos \alpha = 2637,2\text{N} \cdot \cos(60^\circ) = 1318,6\text{N}$ <u>Kerbe (Stelle 1):</u> $\sigma_v = \sigma_{\text{zug}} + \sigma_{\text{biegung}} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_{\text{zug}}}{A_1} + \alpha_{k,b} \cdot \frac{F_{\text{biegung}} \cdot l_1}{W_{b1}}$ $\sigma_{\text{zug}} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F_{\text{zug}}}{A_1} = 1,784 \cdot \frac{F \cdot \sin(60^\circ)}{\frac{\pi}{4} (20\text{mm})^2} = 13,0\text{MPa}$ $\sigma_{\text{biegung}} = \alpha_{k,b} \cdot \frac{F_{\text{biegung}} \cdot l_1}{W_{b1}} = 1,638 \cdot \frac{F \cdot \cos(60^\circ) \cdot 50\text{mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (20\text{mm})^3} = 137,5\text{MPa}$ $\sigma_v = 13,0\text{MPa} + 137,5\text{MPa} = 150,5\text{MPa}$ <u>Einspannstelle (Stelle 2):</u> $\sigma_{\text{zug}} = \frac{F_{\text{zug}}}{A_2} = \frac{F \cdot \sin(60^\circ)}{\frac{\pi}{4} (24\text{mm})^2} = 5,0\text{MPa}$ $\sigma_{\text{biegung}} = \frac{F_{\text{biegung}} \cdot l_2}{W_{b2}} = \frac{F \cdot \cos(60^\circ) \cdot 135\text{mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot (24\text{mm})^3} = 131,7\text{MPa}$ $\sigma_v = 5,0\text{MPa} + 131,7\text{MPa} = 136,7\text{MPa}$ Höchstbelastete Stelle: Kerbe (Stelle 1)
--	--

Platz für Nebenrechnungen	Festigkeitsbedingung: $\sigma_v \leq \sigma_{zul} = \frac{K}{S} \rightarrow S = \frac{K}{\sigma_v}$ Sicherheit gegen Fließen: $S_F = \frac{R_e}{\sigma_v} = \frac{275\text{MPa}}{150,5\text{MPa}} = 1,83$ $S_B = \frac{R_m}{\sigma_v} = \frac{440\text{MPa}}{150,5\text{MPa}} = 2,92$ Belastung kann mit Sicherheit ertragen werden			
	Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit	Stelle
	$\sigma_{\max} =$	150,5	MPa	Stelle 1
				Sicherheit ausreichend?
				ja

- d) Zeichnen Sie den Mohr'schen Spannungskreis für die höchstbeanspruchte Stelle und beschriften Sie die Achsen.
(Wenn Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\sigma_{\text{biegung}} = 140\text{MPa}$ und $\sigma_{\text{zug}} = 10\text{MPa}$).



- e) Bestimmen Sie den Winkel α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), bei dem die Spannung in der Kerbe einen Extremwert (=Maximum) annimmt.
Hinweis: $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{zug}} + \sigma_{\text{biegung}}$	
	$\sigma_{\max} = \alpha_{k,zd} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha}{A_1} + \alpha_{k,b} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha \cdot l_1}{W_{b1}}$	
	$\frac{d\sigma_{\max}}{d\alpha} = 0$	
	$\alpha_{k,zd} \cdot \frac{F \cdot \cos \alpha}{A_1} - \alpha_{k,b} \cdot \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot l_1}{W_{b1}} = 0$	
	$\frac{\alpha_{k,zd}}{A_1} - \alpha_{k,b} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot l_1}{\cos \alpha \cdot W_{b1}} = 0$	
	$\tan \alpha = \frac{\left(\frac{\alpha_{k,zd}}{A_1} \right) \cdot W_{b1}}{\alpha_{k,b} \cdot l_1}$	
	$\alpha = \arctan \left(\frac{\left(\frac{\alpha_{k,zd}}{A_1} \right) \cdot W_{b1}}{\alpha_{k,b} \cdot l_1} \right)$	
	$\alpha = \arctan \left(\frac{\left(\frac{1784}{314,16 \text{mm}^2} \right) \cdot 785,4 \text{mm}^3}{1,638 \cdot 50 \text{mm}} \right)$	
	$\alpha = 3,12^\circ$	
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
$\alpha =$	3,12	° (Grad)

Aufgabe2:

Die Trimmklappen eines Tragflügels werden gemäß **Abbildung 2.1** über Hydraulikzylinder bedient. Details des als Zylinder mit beweglichem Kolben ausgeführten Systems aus dem Werkstoff **20MnCr5** sind in **Abbildung 2.2** dargestellt. Die Kolbenstange ist im Querschnitt B über einen Bolzen gelenkig an der Trimmklappe montiert.

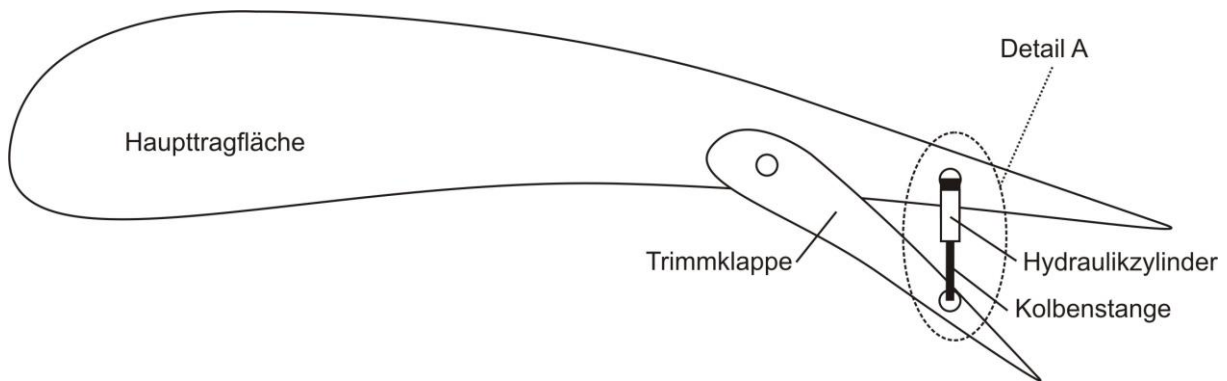
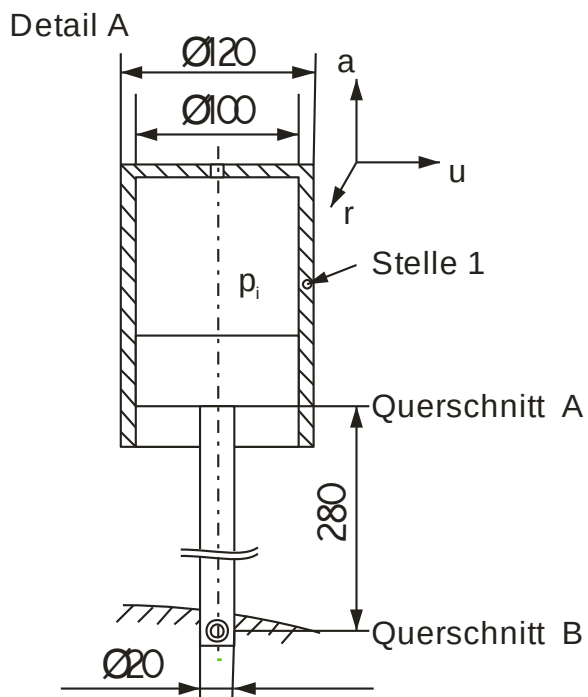


Abbildung 2.1: Schema der Trimmklappen-Hydraulik



Gegeben:

20MnCr5:

$$R_e = 900 \text{ MPa} ;$$

$$R_m = 1100 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_{\text{Sch}} = 650 \text{ MPa} ,$$

$$E = 210000 \text{ MPa} ;$$

$$\mu = 0,3 ; A_5 = 25\% ,$$

Hinweise:

Koordinatensystem:

a - axial, u - Umfang, r – radial

Abbildung 2.2: Hydraulik-Zylinder

Freie Ausdehnung der Zylinderwände in axialer Richtung möglich. Reibung zwischen Kolben und Zylinderwänden ist zu vernachlässigen.

- a) Während eines statischen Belastungstests wirkt an der Stelle 1 eine maximale Spannung von $\sigma_{\max} = 550 \text{ MPa}$.
 In welcher Richtung (axial, Umfang, radial) wird diese Spannung auftreten?
 Berechnen Sie den Innendruck in bar und geben Sie die Axial-, Umfangs- und Radialspannung in der Mitte der Zylinderwand an. Geben Sie zusätzlich die Radialspannung auf der Außenoberfläche des Zylinders an!

Platz für Nebenrechnungen

$$\sigma_{\max} = 550 \text{ MPa in Umfangsrichtung, dort größte Spannung}$$

$$\sigma_u = \frac{p d_i}{2s} \rightarrow p = \frac{2s \cdot \sigma_u}{d_i} = \frac{20 \text{ mm} \cdot 550 \text{ MPa}}{100 \text{ mm}}$$

$$p = 110 \text{ MPa} = 1100 \text{ bar}$$

Axial frei beweglicher Kolben:

$$\sigma_a = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r,\text{Mitte}} = -\frac{p}{2} = -55 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{r,\text{Außen}} = 0 \text{ MPa}$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Wirkrichtung $\sigma_{\max}$	Umfang	-
Innendruck	1100	bar
σ_a	0	MPa
σ_u	550	MPa
σ_r , Wandmitte	-55	MPa
σ_r , Außenoberfläche	0	MPa

- b) Berechnen Sie die mittlere Durchmesser-Aufweitung des Zylinders in mm und die relative mittlere Aufweitung in % und geben Sie den neuen mittleren Durchmesser an!
(Hinweis: Der Einfluss des Zylinderdeckels kann vernachlässigt werden.)

Platz für Nebenrechnungen

Berechnung erfolgt über **Umfangsrichtung**, da Dehnung in Radialrichtung nur Abnahme der Wanddicke bei Umfangsvergrößerung angibt

Umfangsvergrößerung:

Aus der Gleichung für den aufgeweiteten mittleren Umfang mit Anfangsdurchmesser $d_{m,0}$ und Aufweitung Δd_m ,

$$U_m = \pi(d_{m,0} + \Delta d_m) = \pi \cdot (1 + \varepsilon_u) \cdot d_{m,0} \text{ folgt nach Kürzen:}$$

$$\Delta d_m = \varepsilon_u \cdot d_{m,0}$$

$$d_{m,0} = d_i + s = 110 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} (\sigma_u - \mu \sigma_r) = \frac{1}{210000 \text{ MPa}} (550 + 0,3 \cdot 55) \text{ MPa}$$

$$= 0,002698 = 0,2698\%$$

$$\Delta d_m = \varepsilon_u \cdot d_{m,0} = 0,002698 \cdot 110 \text{ mm} = 0,2967 \text{ mm}$$

$$\Delta d_{m,neu} = d_{m,0} + \Delta d_m = 110,2967 \text{ mm}$$

Relative Aufweitung in Prozent:

$$\frac{\Delta d_{m,neu} - d_{m,0}}{d_{m,0}} = \frac{\Delta d_m}{d_{m,0}} = 0,2698\%$$

Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit
Aufweitung	0,2698%	%
Aufweitung	0,2967	mm
mittlerer Durchmesser	110,2967	mm

- c) Berechnen Sie die Vergleichsspannung in der Wandmitte nach der Schubspannungshypothese (SH). Kann der Zylinder die Belastung mit ausreichender Sicherheit ertragen?

Platz für Nebenrechnungen	$\sigma_{v,SH} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_u - \sigma_r = (550 + 55) \text{ MPa} = 605 \text{ MPa}$ Sicherheit gegen Fließen: $S_F = \frac{R_e}{\sigma_{v,SH}} = \frac{900}{605} = 1,49 \rightarrow \text{ausreichend}$ $S_B = \frac{R_m}{\sigma_{v,SH}} = \frac{1100}{605} = 1,82 \rightarrow \text{nicht ausreichend}$ insgesamt: nicht ausreichend!		
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit	
$\sigma_{v,SH}$	605	MPa	
sicher ertragbar?	nein	-	

- d) Im Betrieb wird der Zylinder mit einem statischen Druck von $p_i = 200 \text{ bar}$ betrieben.

Berechnen Sie die durch den Innendruck auf den beweglichen Kolben verursachte Druckspannung in der Kolbenstange. Berechnen Sie alle relevanten Sicherheiten gegen Versagen. Ist Versagen mit ausreichender Sicherheit auszuschließen?

Platz für Nebenrechnungen	Berechnung der Kraft auf den Kolben: $A_{\text{Kolben}} = \frac{\pi}{4} d_{\text{Kolben}}^2 = \frac{\pi}{4} 100^2 \text{ mm}^2 = 7853,98 \text{ mm}^2$ $F = p_i \cdot A_{\text{Kolben}} = 157.080 \text{ N} = 157,08 \text{ kN}$ $A_{\text{Stange}} = \frac{\pi}{4} d_{\text{Stange}}^2 = \frac{\pi}{4} 20^2 = 314,16 \text{ mm}^2$ $\sigma_d = \frac{F}{A_{\text{Stange}}} = \frac{157080 \text{ N}}{314,16 \text{ mm}^2} = 500 \text{ MPa}$ Rechnung gegen Fließen: (Bruch bei Druck / duktiler Werkstoff nicht nötig) $S_F = \frac{R_e}{\sigma_d} = \frac{900}{500} = 1,8 \text{ ausreichend}$ Rechnung gegen Knicken: relevanter Knickfall: Euler 3 $I_{\text{Stange}} = \frac{\pi}{64} d_{\text{Stange}}^4 = 7853,98 \text{ mm}^4$ $F_K = 2\pi^2 \frac{E \cdot I_{\text{Stange}}}{l_{\text{Stange}}^2} = 2\pi^2 \frac{210000 \text{ MPa} \cdot 7853,98 \text{ mm}^4}{280^2 \text{ mm}^2} = 415,26 \text{ kN}$ $S_K = \frac{F_K}{F} = \frac{415,26}{157,08} = 2,64 \text{ ausreichend}$ Insgesamt ausreichende Sicherheit
---------------------------	--

Platz für Nebenrechnungen			
Eintragung Endergebnis	Ergebnis	Einheit	
σ_d	500	MPa	
Sicherheiten:	$S_F = 1,8$ $S_K = 2,64$	-	
Sicherheit insgesamt ausreichend?	ja	-	

Viel Erfolg!