Laplace (auch letzte Seite)

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

Fourier

cos = gerade
sin = ungerade

$\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0+0} f(x) + \lim_{x \to x_0-0} f(x) \right) = 0$

f gerade: $f(x) = f(-x)$

f ungerade: $-f(x) = f(-x)$

$$\|f(x) - f_N(x)\|^2 = 2\int_0^{\pi} (f(x) - f_N(x))^2 dx$$

Fkt. $f(x)$ ↗ ↑ N-tes Fourier-Polynom

gerade Fortsetzung

$-L \leq x \leq L$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad b_n = 0$$

$n = 2u+1$ wenn n nie gerade sein darf, $\sum_{u=0}^{\infty}$

$n = 2k$ wenn n gerade sein soll

bei $n=1$ anfangen

ungerade Fortsetzung

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad a_n = 0$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(ux)\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{für } n=u=0 \\ \pi & n=u\neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(ux)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n=u\neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Parsevalsche Gleichung (Besselsche Ungleichung bei $N < \infty$)

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

komplexe $F_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

$$\text{Fourier}_{f(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Ⓐ f ist bis auf endlich viele Ausnahmestellen x_0 in $[-\pi, \pi]$ mit endlichen rechts- und linksseitigen Grenzwerten stetig diffbar → 1. Fourier-Reihe konvergiert an jeder Stelle x, an der f stetig ist, gegen $f(x)$

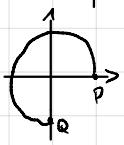
2 An einer Unstetigkeitsstelle x_0 von f konvergiert die F-Reihe von f gegen arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0+0} f(x) + \lim_{x \to x_0-0} f(x)\right)$

Parametrisierungen

$$C_j: [a,b] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto C_j(t) = \begin{pmatrix} C_{n,1}(t) \\ C_{n,2}(t) \end{pmatrix}$$

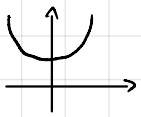


$C(t) = P + t(Q-P)$ ∀



$C: [0, \frac{3}{2}\pi] \to r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$T: [0,1] \to r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2}+1) \\ \sin(\frac{3\pi}{2}+) \end{pmatrix}$



$C: [0,1] \to r \cdot \begin{pmatrix} + \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$

1. Kreis

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \mathbb{R}^2\}$

$\Phi: [0,R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \to r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

2. Ellipse

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq r^2\}$

$\Phi: [0,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ar\cos\varphi \\ br\sin\varphi \end{pmatrix}$

3. Zylinder

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$

$\Phi: [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,h] \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

4. Kugel

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$

$\Phi = [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 :$

$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$

5. Kegel

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 R^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0\}$

$\Phi: [0,R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{R} \cdot r \end{pmatrix}$

Umkehrung: $\Phi_u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

6. Ellipsoid

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq r^2\}$

$\Phi = [0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 :$

$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ar\sin\vartheta\cos\varphi \\ br\sin\vartheta\sin\varphi \\ cr\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Normalbereich x-Achse

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$

Normalbereich y-Achse

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ g(y) \le x \le h(y)\}$

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$

Volumen von Drehkörpern

$z = \sqrt{r(x)^2 - y^2} =: f(x,y)$

$V = \pi \int_a^b r(x)^2\,dx$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, -r(x) \le y \le r(x)\}$

Jordanscher Kurvensatz

$\iint_D 1\,dx\,dy = F(D)$

$\iiint_{D \cup E} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_E f(x,y)\,dx\,dy$

Satz von Stokes – Zirkulation

$\phi \circ C : [a,b] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \phi(C(t))$, Randkurve $\partial S = \phi(U)$

$Z(g, \partial S) = \int_{\partial S} g(x)\,dx = \iint_S \operatorname{rot}(g) \cdot n\,dO \qquad n = |\Phi_u \times \Phi_v|$

$\phi(U) = \partial S$

$= \iint_U \operatorname{rot}(g)(\phi(u,v)) \cdot n(u,v) \cdot |\Phi_u \times \Phi_v|\,du\,dv$

$= \iint_U \operatorname{rot}(g)(\phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v)\,du\,dv$

$n(u,v) = \frac{\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)}{|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)|}$

$x \cdot (y \times z) = \det(x,y,z)$

$= \sum_{j=1}^{n} \int g(\underbrace{\phi(C(t))}_{\text{Parametrisierung}}) \cdot \underbrace{(\phi \circ C)'(t)}_{\text{Kurve}}\,dt$ ⇐ Kurvenintegral!

$= \iint_J \det(\operatorname{rot} g(\phi), \Phi_u, \Phi_v)\,du\,dv$

Zirkulation

$Z(g,U) = \int_U g(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot C'(t)\,dt$ (Kurve)

$\operatorname{rot} g = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$ (2D)

$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \partial_y g_3 - \partial_z g_2 \\ \partial_z g_1 - \partial_x g_3 \\ \partial_x g_2 - \partial_y g_1 \end{pmatrix}$

$= \iint_J \operatorname{rot} g\,dx_1\,dx_2$ (Gebiet) (Green)

J = von U berandetes Gebiet

Ausfluss – Gauß

$A(g,U) = \int_U g \cdot n\,ds = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g(C(t)) \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} dt$

$n(t) = \frac{1}{|C'(t)|} \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}$

$= \iint_J \operatorname{div} g\,dx_1\,dx_2$ (2D)

$\mathbb{R}^2$: $\operatorname{div}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \partial_x g_1 + \partial_y g_2$

$\mathbb{R}^3$: $\operatorname{div}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \partial_x g_1 + \partial_y g_2 + \partial_z g_3$

Koordinatentransformation

$D = \phi(B) \subseteq Q \qquad f : D \to \mathbb{R}$

$g(U,V) = f \circ \phi : B \to \mathbb{R}$

$\phi : P \to Q : \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi_1(U,V) \\ \phi_2(U,V) \end{pmatrix}$

$J\phi(U,V) = \begin{pmatrix} \phi_{1U} & \phi_{1V} \\ \phi_{2U} & \phi_{2V} \end{pmatrix}$

$\iint_D f(x)\,dx = \iint_{\phi(B)} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \iint_B g(U,V) \cdot |\det J\phi(U,V)|\,du\,dv$

Integration mit Kurven

$\phi : D \to \mathbb{R}^3 \qquad J \subseteq D \qquad S := \phi(J)$

$F(S) = \iint_J |\phi_r(r,\varphi) \times \phi_\varphi(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi$

Mantelfläche eines Drehkörpers

$\phi : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} \to \phi(x,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ r(x)\cos\varphi \\ r(x)\sin\varphi \end{pmatrix}$

$dO = |\Phi_U(u,v) \times \Phi_V(u,v)|$

Flächenintegral $h : S \to \mathbb{R}$

$\iint_S h\,dO = \iint_J h(\phi(u,v)) \cdot |\Phi_U(u,v) \times \Phi_V(u,v)|\,du\,dv$

$F(J) = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} C_1(t) \cdot C_2'(t)\,dt = -\sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} C_2(t) \cdot C_1'(t)\,dt$

Gauß – Ausfluss

$V \in U \qquad g : U \to \mathbb{R}^3$

$A(g,S) = \iint_S g \cdot n\,dO$

$= \iiint_V \operatorname{div} g\,dx\,dy\,dz$ (3D)

$\iint_J g(\phi(U,V)) \cdot (\Phi_U(U,V) \times \Phi_V(U,V))\,du\,dv$

Fläche geschlossen

quellfrei: $A(g,S) = 0$

$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = V(V)$

wirbelfrei: $Z(g,U) = 0$

Kurve geschlossen

3D Integrale

Zylinderkoordinaten:

$\beta : P \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$\det J(\beta) = r$

$\Rightarrow V = \pi r^2 h$

Kugelkoordinaten:

$K(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\det J(U) = -r^2\sin(\vartheta)$

Normalbereich bezügl. x-y Ebene:

$B = \{\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ u(x,y) \le z \le l(x,y)\}$

DGL

1. homogen, höherer Ordnung

linken Teil = 0 setzen → DGL > 2. Ordnung: Polynom

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \to f_1(x) = ae^{\lambda_1 x} \quad f_2(x) = be^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 = \lambda_2 \to f_1(x) = ae^{\lambda_1 x} \quad f_2(x) = bxe^{\lambda_1 x} \quad f_3(x) = cx^2e^{\lambda_3 x} \dots$

$\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \to f_1(x) = a \cdot e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad f_2(x) = b \cdot e^{\alpha x}\sin(\beta x) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$

2. partikulär – inhomogen

$a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$ bei $g(x) = f(x) + h(x) \to$ 2 Lsg. bestimmen und addieren

$g(x) = r(x)e^{\mu x}$ $\mu \neq$ Nst.: $f_p(x) = s(x)e^{\mu x}$ mit $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} r$

$\mu = m$-fache Nst.: $f_p(x) = x^m s(x) e^{\mu x}$ mit $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} r = m$

Ref ⇒ Resonanzfall

LO $f_p(x)$ ableiten und in y einsetzen

$g(x) = r(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$g(x) = r(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
} $f_p(x) = e^{\alpha x}(a \cdot \cos(\beta x) + b \cdot \sin(\beta x))$ wenn: $\mu = \alpha \pm i\beta$

⇒ $s(x)$ = allg. Form von $r(x)$

1. Ordnung: $y' + g(x) \cdot y = u(x)$

homogen: $f_h(x) = c \cdot e^{-G(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$

partikulär: $f_p(x) = k(x)\,e^{-G(x)}$

$k'(x) = u(x) \cdot e^{G(x)}$

→ zu $u(x)$ integrieren und Integrationskonstante mit AWP berechnen

Trennung Variablen

$y' = g(x) \cdot h(y)$

LO nach x & y sortieren, dann $y' = \frac{dy}{dx}$ und integrieren → Konstante an $\int dx$ anhängen & berechnen

$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_n'(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix} \cdot W(x)^{-1}$

DGL-Systeme

geg.: $y' = Ay + h(x)$ → bestimmen sie alle reellen Lsg.

1. homogen

→ EW & EV bestimmen

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $f_h(x) = c_1v_1e^{\lambda_1 x} + c_2v_2e^{\lambda_2 x} + \dots$ $\qquad c_n \in \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \lambda_2$: $f_h(x) = c_1v_1e^{\lambda_1 x} + c_2v_2e^{\lambda_2 x} + \dots$ $\qquad c_n \in \mathbb{R}$

BSP: $y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}}_{h(x)}$, $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ = Eigenvektor von EW = 2i

(a) FS: $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $2i = 0 + 2i$ ⇒ $f_1(x) = e^0(\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

$f_2(x) = e^0(\sin(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

(b) $W_{sys}(x) = (f_1(x), f_2(x)) = \begin{pmatrix} f_{1a}(x) & f_{2a}(x) \\ f_{1b}(x) & f_{2b}(x) \end{pmatrix}$

$W_{sys}(x)^{-1} = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} f_{1a}(x) & -f_{2a}(x) \\ -f_{1b}(x) & f_{1a}(x) \end{pmatrix}$

(c) $f_p(x)$ gesucht: $\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W_{sys}(x)^{-1} \cdot h(x)$ ⇒ $\int \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$

⇒ $f_p(x) = c_1(x)\,f_1(x) + c_2f_2(x)$

(d) alle Lösungen gesucht:

$g(x) = \underbrace{f_p(x)}_{(c)} + \underbrace{f_h(x)}_{(a)} = f_1(x) + af_1(x) + bf_2(x)$

variable $(a,b \in \mathbb{R})$

wenn $v_1 = v_2$: $B = A - \lambda E$ $\quad B \cdot v_U = v_1$

- v_U: von v_1 lin. unabh. Vektor
- $B v_U = (\dots)$ $B^2 v_U = (\dots)$ bis $B^h v_U = 0$ $\quad h$ = Anzahl des Lsg.

$f_1(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x^0}{0!} B^{h-1} v_U\right)$

$f_2(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x^1}{1!} B^{h-1} v_U + \frac{x^0}{0!} B^{h-2} v_U\right)$

$f_h(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x^{h-1}}{(h-1)!} B^{h-1} v_U + \frac{x^{h-2}}{(h-2)!} B^{h-2} v_U + \frac{x^0}{0!} B^0 v_U\right)$

2. partikulär - inhomogen

- $W_{sys}(x) = (f_1\ f_2\ f_3)$ (homogene Lösung als Vektoren)
- $W_{sys}^{-1}(x) = W_{sys}^{-1}(0) \cdot W_{sys}(-x) \cdot W_{sys}(0)^{-1}$
- $c'(x) = W_{sys}(x)^{-1} \cdot h(x) \rightarrow \int c_n' dx = c_n$

Lösung: $f_p(x) = W_{sys}(x) \cdot c(x)$

normal: in $\mathbb{R}^1$ $\quad W(x) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ → Ableitungen

$c'(x) = W(x)^{-1} \cdot h(x) \rightarrow c_n = \int c_n' dx$

c_n in Lsg. des homogenen Teils einsetzen → partikulärer Teil

$\mathbb{R}^2$: $W(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow W(x)^{-1} = \frac{1}{\det W(x)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

⇒ wenn $\det W(x) \neq 0$ ⇒ Fundamentalsystem

komplex bei System:

$\lambda = a + bi$ mit $v = u + iw$ $\quad \lambda$ Lsg. → $\bar{\lambda}$ auch LS

→ $f_1(x) = e^{ax}(\cos(bx) \cdot u - \sin(bx) \cdot w)$
→ $f_2(x) = e^{ax}(\sin(bx) \cdot u + \cos(bx) \cdot w)$

} u & w vektorweise → ein EV reicht für μ

Wärmeleitungsgleichung

Partielle Differentialgleichungen

$u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t)$ | a^2 = Koeffizient der Temperaturleitfähigkeit, $r(x,t)$ = 2-mal stetig diff.bare Funktion ↳ modelliert äußere Einflüsse

$u_x = \frac{du}{dx}$ $\quad u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ $\quad \dots$

für $r(x,t) = 0$ homogen, für $r(x,t) \neq 0$ inhomogen

homogen → $r(x,t) = 0$ → $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(x,t) = v(t) \cdot s(t)$

$v(x) = y'' + \lambda y = 0 \rightarrow p(x) = x^2 + \lambda \overset{!}{=} 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

1) $\lambda < 0$ $\quad v(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$
2) $\lambda = 0$: $\quad v(x) = c_1 + c_2 x$ $\quad c_n \in \mathbb{R}$
3) $\lambda > 0$: $\quad v(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$s(t) = re^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t}$ $\quad r \in \mathbb{R}$

Bsp: $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x,0) = f(x) = 3\cos(x)$, $u_t(x,0) = g(x) = \cos(x)$

(a) $\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,ds = \int_{x-2t}^{x+2t} g(x)\,dx = \int_{x-2t}^{x+2t} \cos(x)\,dx = \left[\sin(x)\right]_{x-2t}^{x+2t} = \sin(x+2t) - \sin(x-2t)$

(b) Lösung des Anfangswertproblems mittels d'Alembertschen Formel bestimmen:

$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$ | ⇒ $c = 2$ (siehe (a))

$= \frac{1}{2}(f(x-2t) + f(x+2t)) + \frac{1}{4}(\sin(x+2t) - \sin(x-2t))$

⇒ $u(x,t) = \frac{1}{2}(3\cos(x-2t) + 3\cos(x+2t)) + \frac{1}{4}(\sin(x+2t) - \sin(x-2t))$

schon passend!

$= \frac{1}{2}(3(\cos(x)\cos(2t) - \sin(x)\sin(2t)) + 3(\cos(x)\cos(2t) + \sin(x)\sin(2t)) + \frac{1}{4}[\dots]$

$= \frac{1}{2}(3\cos(x)\cos(2t) + 3\cos(x)\cos(2t)) + \frac{1}{4}[\dots]$

$= \frac{1}{2} \cdot 6\cos(x)\cos(2t) + \frac{1}{4}[\dots]$

$u(x,t) = 3\cos(x)\cos(2t) + \frac{1}{4}(\sin(x+2t) - \sin(x-2t))$

inhomogen: → $r(x,t) \neq 0$ → $u_t = a^2 u_{xx} + r(x,t)$

- homogene Randbedingung

$u(0,t) = 0 = u(L,t)$ für $t \geq 0$
$u(x,0) = 0$ für $x \in [0,L]$

1. $\bar{b}_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L r(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$
   → $b_n(t) = \int \bar{b}_n(t) e^{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L} \cdot t}\,dt + \beta_n$
2. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$
3. β_n durch Anfangsbedingung ausrechnen
4. β_n in $u(x,t)$ einsetzen

- inhomogene Randbedingung:

$u(0,t) = g(t)$ $\quad u(L,t) = h(t)$
$u(x,0) = f(x)$ für $x \in [0,L]$

1. $\bar{r}(x,t) = r(x,t) - (1 - \frac{x}{L})g'(t) - \frac{x}{L}h'(t)$
2. $\bar{f}(x) = f(x) - (1 - \frac{x}{L})g(0) - \frac{x}{L}h(0)$ $\quad$ Randbed.
   → homogene RzB für $\bar{u}_t = a^2 u_{xx} + \bar{r}(x,t)$, s.o.
3. $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + (1 - \frac{x}{L})g(t) + \frac{x}{L}h(t)$

Wellengleichung

d'Alembertsche Formel

$u_{tt} = c^2 u_{xx} + r(x,t)$

$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$

$u_t(x,0) = g(x)$
$u(x,0) = f(x)$

→ 2 mal nach x bzw. t ableiten und vergleichen

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Erg: Länge Kurve: $L(\gamma)=\int_a^b |c'(t)|\,dt$

SP: $x_s = \frac{1}{V}\iiint x\,dx\,dy\,dz$

$F(S) = \iint_S |\phi_r(r,\varphi) \times \phi_\varphi(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi$

$= \iint_S 1\,dO$

$= \frac{1}{\text{rot}\,g}\iint_S \text{rot}\,g\,dx\,dy$

$= \frac{1}{\text{rot}\,g}\cdot z(g,K)$ div>0 Quelle, div<0 Senke

$\int \cos^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))\right]$

$\int \sin^2(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))\right]$

$\int \ln(x)\,dx = [x(\ln|x|-1)]$

$\int \cos^3(x)\,dx = \int \cos(x)(1-\sin^2(x))\,dx = \left[\sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]$

$\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin(x)(1-\cos^2(x))\,dx = \left[-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]$

Additionstheoreme

$\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t) = \cos(t)$

$\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$

$\cos^2(x)-\sin^2(x) = \cos(2x)$

$\sin^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$

$\cos(x\pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp \sin(x)\cdot\sin(y)$

$\tan(x\pm y) = \frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\cdot\tan(y)}$

$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(x) = \frac{(e^{ix}-e^{-ix})}{2i}$

$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

$|z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Formel Euler & de Moivre: $e^{iz} = \cos(z)+i\sin(z)$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

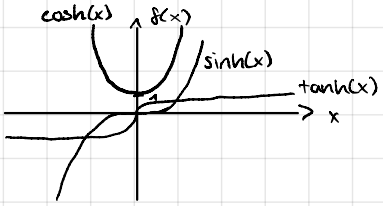
$\cosh^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2x)+1)$

$\sinh^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2x)-1)$

$\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\cosh\sinh = \frac{1}{2}\sinh(2x)$



$\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad \cos(kx) = (-1)^k$

$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\quad \sin(kx) = 0$

$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}\pm x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$\cosh(-x) = \cosh(x)$

$\sinh(-x) = \sinh(x)$

Bsp: $\mathcal{L}(\cosh(2t)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+2+s-2}{s^2-4}\right) = \frac{s}{s^2-4}$

Laplace

geg. $y''+y'+y = h(t)$

1. $\mathcal{L}(\,)$ anwenden auf beiden Seiten
2. durch $F(s)$ Ausdrücke ersetzen, nach $F(s)$ auflösen

$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$\mathcal{L}(f^n(t)) = s^nF(s)-s^{n-1}f^{(0)}(0)-s^{n-2}f^{(1)}(0)-s^0f^{(n-1)}(0)$

$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

Linearität: $\mathcal{L}(af+bg) = a\cdot\mathcal{L}(f)+b\mathcal{L}(g)$

Dämpfung: $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$

Streckung: $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

Faltung: $\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$

Mitternacht

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ln-Gesetze

$\ln(x\cdot y) = \ln(x)+\ln(y)$

$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x)-\ln(y)$

$\ln(x^n) = n\cdot\ln(x)$

$\ln\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\cdot\ln(x)$

Matrixrechnungen

Eigenwerte: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{pmatrix} \to \ldots = \chi_1(\lambda) = 0 \to \lambda = \ldots$

Determinante:

$2\times2 = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = ad-bc = \chi_A(\lambda)$

$3\times3 = \begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\begin{matrix}a&d\\b&e\\c&f\end{matrix} = aei+dhc+gbf-ceg-fha-ibd = \chi_A(\lambda)$

$4\times4 = \begin{pmatrix}a&e&i&m\\b&f&j&n\\c&g&k&o\\d&h&l&p\end{pmatrix} = a\cdot(+1)\det\begin{pmatrix}f&j&n\\g&k&o\\h&l&p\end{pmatrix}+e(-1)\det\begin{pmatrix}b&j&n\\c&k&o\\d&l&p\end{pmatrix}+i(+1)\det\begin{pmatrix}b&f&n\\c&g&o\\d&h&p\end{pmatrix}+m(-1)\det\begin{pmatrix}b&f&j\\c&g&k\\d&h&l\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$

Eigenvektoren:

$(A-\lambda_i E)\cdot v = 0 \dots \to \begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&c_1\\0&1&c_2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to v(\lambda_i) = \left\{\begin{pmatrix}-c_1\\-c_2\\1\end{pmatrix}\cdot\mu;\mu\in\mathbb{R}\right\}$

$\dots \to \begin{pmatrix}1&c_1&c_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to v(\lambda_i) = \left\{\begin{pmatrix}-c_1\\1\\0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}-c_2\\0\\1\end{pmatrix}\nu;\ \mu,\nu\in\mathbb{R}\right\}$

Jacobi-Matrix

$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}g_1(x,y)\\g_2(x,y)\end{pmatrix} \to Jg\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial/\partial x_1\, g_1 & \cdots & \partial/\partial x_n\, g_1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial/\partial x_1\, g_m & \cdots & \partial/\partial x_n\, g_m\end{pmatrix}$

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$	$s>a$
1	$\frac{1}{s}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	
$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^n(s)$	
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	

Integrale

$f(x)$	$\sqrt{x}$	b^x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sinh(x)$	$\tan(x)$
$\int f(x)\,dx$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{b^x}{\ln(b)}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\tan x$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\text{arcsinh}(x)$	$\cosh(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$

Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty}\sinh(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to\infty}\cosh(x) = \infty$ $\quad \lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin(0) = 0$ $\quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty}\cosh(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arccos(1) = 0$

$\sinh(0) = 0$ $\quad \cosh(0) = 1$ $\quad \arctan(0) = 0$ $\quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \arccos(-1) = \pi$

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$