



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Technische Mechanik II

Lösungen zur
Aufgabensammlung

Stand WS 2013/14

letzte Änderung: 07.01.2014

1 Grundzüge der Tensorrechnung

Aufgabe 1.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{c} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}, & \mathbf{T}^T \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} & \mathbf{T}\mathbf{T} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \\ \mathbf{T}^T \mathbf{T}^T &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), & (\mathbf{T}\mathbf{T})^T &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}).$$

Aufgabe 1.3:

1. $\alpha = \beta = -3,$
2. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{w}_1 = \mathbf{v},$
3. $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$

Aufgabe 1.4:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{I} \rightsquigarrow \frac{1}{2}(t_{nn} - t_{nn}) = 0.$$

Aufgabe 1.5:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}^D \stackrel{!}{=} 0.$$

Aufgabe 1.6

$$1. \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$2. \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$3. \quad \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_s,$$

$$4. \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k.$$

Aufgabe 1.7:

Siehe zusätzliche Übung 1/TMII.

Aufgabe 1.8:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & b_2 & b_3 \\ 12 & 4b_2 & 4b_3 \\ 18 & 6b_2 & 6b_3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$b_2 = 12, \quad b_3 = 18.$$

Aufgabe 1.9:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1,4 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i.$$

Aufgabe 1.10:

$$1. \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -4,$$

$$2. \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & 14 & 12 \\ -3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l,$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 11 & -11 & 16 \\ 16 & -12 & 22 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l,$$

$$3. \quad \text{Ja, die Beziehungen gelten.}$$

Aufgabe 1.11

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 42 \\ 0 & -14 & -42 \\ 0 & 28 & 84 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{c} = 14 \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i,$$

$$\alpha = 70, \quad \overset{+}{\mathbf{A}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ existiert nicht.}$$

Aufgabe 1.12:

$$\alpha = 51, \quad a_{12} = 26, \quad a_{1232} = 2, \quad a_3 = -3, \quad a_{12} = 2.$$

Aufgabe 1.13:

$${}^+ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -81 & 69 & -43 \\ -59 & 3 & 331 \\ 91 & 17 & -251 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0063 & -0,046 & 0,071 \\ 0,054 & 0,002 & 0,013 \\ -0,034 & 0,259 & -0,197 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Aufgabe 1.14:

$$1. \quad {}^* \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2, \quad {}^* \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \mathbf{e}_2, \quad {}^* \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

$$2. \quad R_{31i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k,$$

$$3. \quad \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{R} = 1.$$

Aufgabe 1.15:

$${}^A \mathbf{t} = -3 \mathbf{e}_1 + 2 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$${}^A \mathbf{t} \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 5 \mathbf{e}_3.$$

Aufgabe 1.16:

$$1. \quad |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}| = \sqrt{650},$$

$$2. \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -20,$$

$$3. \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = -20,$$

$$4. \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -40 \mathbf{e}_1 - 20 \mathbf{e}_2 + 20 \mathbf{e}_3.$$

Aufgabe 1.17:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i.$$

Aufgabe 1.18:

$$1. \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = 0 \leadsto \text{somit gilt die Aussage,}$$

$$2. \quad \text{tr } \mathbf{A}^D = 0.$$

2 Grundzüge der Vektorrechnung- und Tensoranalysis

Aufgabe 2.1:

1. $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{u}) = -6x_1x_2^2x_3^4 - 8x_1^2x_2^3x_3^3 + 6x_1x_2^3x_3^5,$
2. $\operatorname{div}(\mathbf{v})\mathbf{u} = (6x_1x_2^2x_3 + 9x_1x_3^2)\mathbf{e}_1 + (4x_1x_2^4 + 6x_1x_2^2x_3)\mathbf{e}_2 - (2x_2^3x_3^3 + 3x_2x_3^4)\mathbf{e}_3,$
3. $\operatorname{rot}(\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (12x_1^3x_2 - 6x_2^3x_3)\mathbf{e}_1 + (4x_1^2x_2x_3^3 + 4x_1^2x_2^4)\mathbf{e}_2 - (6x_1^2x_2^2 + 3x_2x_3^4)\mathbf{e}_3,$
4. $\operatorname{div}(\mathbf{v})\mathbf{u} = 4x_1\mathbf{e}_1 + 8x_2\mathbf{e}_3$
5. $\operatorname{rot}(\mathbf{u}) \times \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = (16x_1x_2^3 - 12x_1^2x_2)\mathbf{e}_1 + (8x_1^2x_2^2 - 6x_2^3 - 4x_1x_2x_3^3)\mathbf{e}_2$
 $+ (8x_1x_2x_3^3 - 12x_1^3 + 9x_1x_2)\mathbf{e}_3,$
6. $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(\Phi) = -2x_1x_2^4x_3^3 - 6x_1x_2^2x_3^4 - 12x_1^3x_2^3x_3^2,$
7. $\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (12x_1x_2^2x_3 + 9x_1x_3^2 + 12x_1^3x_2)bf\mathbf{e}_1 + (8x_1x_2^4 + 18x_1x_2^2x_3)\mathbf{e}_2$
 $- (2x_2^3x_3^3 + 6x_2x_3^4 + 12x_1^2x_2^2x_3^2)\mathbf{e}_3.$

Aufgabe 2.2:

1. $\operatorname{grad}(\Phi) = \Phi_{,1}\mathbf{e}_1 + \Phi_{,2}\mathbf{e}_2 + \Phi_{,3}\mathbf{e}_3, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3},$
2. $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = (v_{3,2} - v_{2,3})\mathbf{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1})\mathbf{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2})\mathbf{e}_3,$
3. $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\Phi) \cdot \mathbf{v} + \Phi \operatorname{div}(\mathbf{v}),$
 $\operatorname{rot}[\operatorname{grad}(\Phi)] = (\Phi_{,32} - \Phi_{,23})\mathbf{e}_1 + (\Phi_{,13} - \Phi_{,31})\mathbf{e}_2 + (\Phi_{,21} - \Phi_{,12})\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \rightarrow \Phi_{,ik} = \Phi_{,ki},$
 $\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\mathbf{v})] = v_{3,21} - v_{2,31} + v_{1,32} - v_{3,12} + v_{2,13} - v_{1,23} = 0 \rightarrow v_{i,jk} = v_{i,kj}.$

Aufgabe 2.5:

$$\operatorname{grad}(\Phi) = (2x_1 + x_2 + x_3)\mathbf{e}_1 + (x_1 + x_3)\mathbf{e}_2 + (x_1 + x_2)\mathbf{e}_3,$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

3 Anwendung zur Tensorrechnung

Aufgabe 3.1:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $F = \bar{0}$:

$$\bar{J}_{22} = \frac{\pi}{4} ab^3, \quad \bar{J}_{33} = \frac{\pi}{4} ba^3, \quad \bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = 0, \quad \bar{J}_p = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2).$$

Aufgabe 3.2:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $\hat{O}$:

$$\hat{J}_{22} = \frac{ab^3}{12}, \quad \hat{J}_{33} = \frac{a^3b}{12}, \quad \hat{J}_{23} = \hat{J}_{32} = -\frac{a^2b^2}{24},$$

Flächenträgheitsmomente bezüglich $\bar{O}$ (Schwerpunkt):

$$\bar{J}_{22} = \frac{ab^3}{36}, \quad \bar{J}_{33} = \frac{a^3b}{36}, \quad \bar{J}_{23} = \bar{J}_{32} = \frac{a^2b^2}{72}.$$

Aufgabe 3.3:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $\bar{O}$:

$$\bar{J}_{22} = \frac{23}{12} a^4, \quad \bar{J}_{33} = \frac{115}{6} a^4, \quad \bar{J}_{23} = -\frac{15}{4} a^4,$$

Hauptträgheitsmomente und die Richtung der Trägheitshauptachsen:

$$J_1 = 19,95 a^4, \quad J_2 = 1,13 a^4, \quad \varphi_0 = 11,75^\circ$$

Aufgabe 3.4:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $\hat{O}$:

$$\hat{J}_{22} = \frac{32}{105} ah^3, \quad \hat{J}_{33} = \frac{4}{15} a^3h, \quad \hat{J}_p = \frac{ah}{105}(32h^2 + 28a^2),$$

Flächenträgheitsmomente bezüglich $F = \bar{O}$:

$$\bar{J}_{22} = \frac{16}{175} ah^3, \quad \bar{J}_{33} = \frac{4}{15} a^3h, \quad \bar{J}_p = \frac{ah}{525}(48h^2 + 140a^2),$$

$$J_1 = \bar{J}_{22}, \quad J_2 = \bar{J}_{33}.$$

Aufgabe 3.5:

$$1. \quad \hat{x}_{2F} = 1,14 a, \quad \hat{x}_{3F} = 1,43 a$$

$$2. \quad J_1 = 8,37 a^4, \quad J_2 = 2,81 a^4, \quad \varphi = -44^\circ \text{ (Drehung der Fläche im Uhrzeigersinn).}$$

Aufgabe 3.6:

1. exakte Berechnung:

$$\bar{J}_{22} = 1\,034\,401 \text{ mm}^4, \quad \bar{J}_{33} = 243\,962 \text{ mm}^4, \quad \bar{J}_{23} = -162\,828 \text{ mm}^4,$$

2. Annahme dünnwandiges Profil:

$$\bar{J}_{22} = 1\,042\,096 \text{ mm}^4, \quad \bar{J}_{33} = 243\,573 \text{ mm}^4, \quad \bar{J}_{23} = -164\,318 \text{ mm}^4,$$

Hauptträgheitsmomente:

$$J_1 = 1\,077\,551 \text{ mm}^4, \quad J_2 = 200\,812 \text{ mm}^4.$$

Aufgabe 3.7:

Hauptträgheitsmomente und die Richtung der Trägheitshauptachsen:

$$J_1 = 17,39 ha^3, \quad J_2 = 0,77 ha^3, \quad \varphi_0 = 10,58^\circ.$$

Aufgabe 3.8:

Hauptträgheitsmomente und die Richtung der Trägheitshauptachsen:

$$\hat{J}_{22} = \frac{\pi}{8} r^4, \quad \bar{J}_{22} = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right).$$

Aufgabe 3.9:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $F = \bar{0}$:

$$\bar{J}_{22} = 0, \quad \bar{J}_{33} = \frac{a^3 h}{12} \sqrt{2},$$

Flächenträgheitsmomente bei Rotation:

$$\tilde{J}_{22} = \tilde{J}_{33} = \frac{a^3 h}{6} \sqrt{2},$$

Flächenträgheitsmomente bezüglich $F = 0$:

$$\bar{J}_{22} = \bar{J}_{33} = \frac{4}{3} \sqrt{2} ha^3.$$

Aufgabe 3.10:

Flächenträgheitsmomente bezüglich $F = 0$:

$$\bar{J}_{22} = J_1 = \frac{5}{16} \sqrt{3} a^4, \quad \bar{J}_{33} = J_2 = \frac{5}{16} \sqrt{3} a^4.$$

Aufgabe 3.11:

Flächenschwerpunkte:

$$\hat{x}_{2F} = b, \quad \hat{x}_{3F} = \frac{b}{2}$$

Eigenträgheitsmomente:

$$\bar{J}_{22} = \frac{7}{6} b^3 h, \quad \bar{J}_{33} = \frac{22}{3} b^3 h, \quad \bar{J}_{23} = 0.$$

Aufgabe 3.12:

1. Flächenschwerpunkte:

$$\hat{x}_{2F} = 2,0 \text{ cm}, \quad \hat{x}_{3F} = 0$$

2. Eigenträgheitsmomente:

$$\bar{J}_{22} = 2133 \text{ cm}^4, \quad \bar{J}_{33} = 213,3 \text{ cm}^4, \quad \bar{J}_{23} = 0,$$

3. Hauptträgheitsmomente und die Richtung der Trägheitshauptachsen:

$$J_2 = 2133 \text{ cm}^4, \quad J_3 = 213,3 \text{ cm}^4, \quad \varphi_0 = 0.$$