



Universität Stuttgart

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers

www.mechbau.uni-stuttgart.de

Ergänzung zur Vorlesung

Technische Mechanik II

Aufgabensammlung
für den Übungsbetrieb

Stand WS 2013/14

letzte Änderung: 07.01.2014

1 Grundzüge der Tensorrechnung

Aufgabe 1.1:

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ und der Tensor $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke: $\mathbf{T}\mathbf{c}$, $\mathbf{T}^T\mathbf{c}$, $\mathbf{T}\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^T\mathbf{T}^T$, $(\mathbf{T}\mathbf{T})^T$.

Aufgabe 1.2:

Ein Körper der Dichte ρ mit der Form einer Halbkugel (Radius r) mit kegelförmiger Aussparung ruht auf einer rauhen schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α (Abb. 1.2).

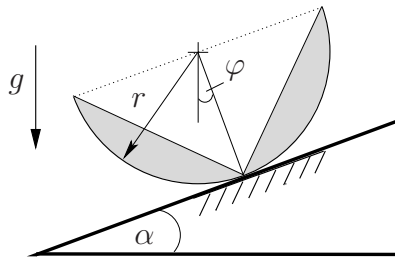


Abb. 1.2

1. Ermitteln Sie den Schwerpunkt des Körpers.
2. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Körpers (Winkel φ in Abb. 1.2).
3. Wie groß darf α höchstens sein (Grenzwert α_{max}), damit Gleichgewicht möglich ist (Gleiten sei ausgeschlossen)?
4. Beurteilen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslage für α_{max} .

Gegeben: r, α, ρ, g .

Aufgabe 1.3:

Gegeben sind der Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ und die Tensoren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

1. Bestimmen Sie $\{\alpha, \beta\}$, so daß $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$.
2. Berechnen Sie $\mathbf{u}_1 = \mathbf{B}\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}_1 = \mathbf{A}\mathbf{u}_1$.
3. Berechnen Sie $\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}_2 = \mathbf{B}\mathbf{u}_2$.

Aufgabe 1.4:

Zeigen Sie, daß die Spur eines schiefsymmetrischen Tensors verschwindet.

Aufgabe 1.5:

Der Deviator eines Tensors ist definiert als $\mathbf{A}^D := \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$.
Zeigen Sie, daß die Spur eines Deviators gleich Null ist.

Aufgabe 1.6:

Gegeben sind die Tensoren $\mathbf{A} = a_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ und $\mathbf{B} = b_{ik}^* \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_k^*$ mit den Koeffizienten

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_{ik}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Basis $\mathbf{e}^*$ folgt durch Drehung um 30° um die $\mathbf{e}_1$ -Achse. Bestimmen Sie

1. den Rotationstensor $\mathbf{R}$, der $\mathbf{e}$ auf $\mathbf{e}^*$ abbildet,
2. $\bar{\mathbf{R}}$, der $\mathbf{e}^*$ auf $\mathbf{e}$ abbildet,
3. die Koeffizienten b_{ik} und
4. $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Aufgabe 1.7:

Schreiben Sie folgende Symbole ausführlich:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|--|
| • a_i | • $A_{ij}v_i$ | • $A_{ij}B_{ij}$ |
| • A_{ij} | • $a_i\delta_{ik}$ | • $A_{im}B_{kl}\delta_{jm}\delta_{jk}$ |
| • $v_k \mathbf{e}_k$ | • $A_{ki}\delta_{il}$ | • $A_{ilm}B_{lm}$ |

mit: $i, j, k, l, m = 1, 2, 3$

Aufgabe 1.8:

Gegeben sind die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \quad \text{und} \\ \mathbf{b} &= 3\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie b_2 und b_3 , so daß $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ein symmetrischer Tensor ist.

Aufgabe 1.9:

Die lineare Abbildung $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ordnet mit dem Tensor $\mathbf{T}$ dem Vektor $\mathbf{a}$ eindeutig einen Vektor $\mathbf{b}$ zu (Abb. 1.9). Der Transformationstensor $\mathbf{T}$ sowie der Vektor $\mathbf{b}$ seien bekannt. Wie lautet der Ausgangsvektor $\mathbf{a}$?

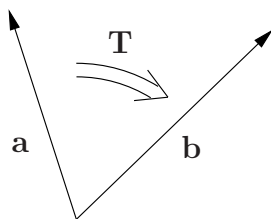


Abb. 1.9

$$\mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{mit} \quad t_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = b_k \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad b_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 1.10:

Gegeben seien die Tensoren $\mathbf{A} = a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ und $\mathbf{B} = b_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ mit

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.
2. Zeigen Sie mit Hilfe von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, daß das Tensorprodukt von Tensoren im allgemeinen nicht kommutativ ist.
3. Gelten die Beziehungen $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ und $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$?

Aufgabe 1.11:

Gegeben sind die Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{w} &= 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie:

- $\mathbf{A} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$ • $\mathbf{B} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ • $\mathbf{C} = \mathbf{AB}^T$ • $\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- $\mathbf{c} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ • $\mathbf{A}^+$ • $\mathbf{A}^{-1}$ • $\mathbf{d} = \mathbf{Av}$

Interpretieren Sie das Ergebnis von $\mathbf{d}$.

Aufgabe 1.12:

Gegeben sind die Tensoren

$$\mathbf{B} = b_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = c_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

mit

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie

- $\alpha = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, • a_{1232} aus $\overset{4}{\mathbf{A}} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}^T$
- a_{13} aus $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}$, • a_3 aus $\mathbf{a} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ und
- a_{12} aus $\mathbf{A} = \mathbf{B} \ast \mathbf{C}$

Geben Sie die Berechnung der Verknüpfungen in Basisdarstellung an.

Aufgabe 1.13:

Gegeben sind die Tensoren

$$\mathbf{B} = b_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = c_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

mit

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen sie

1. den adjungierten Tensor $(\mathbf{BC})^+$ und
2. den inversen Tensor $(\mathbf{BC})^{-1}$.

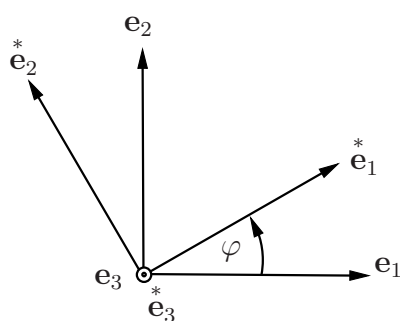


Abb. 1.14

Aufgabe 1.14:

Das Bezugssystem $\{0, \mathbf{e}_i\}$ soll um die $\mathbf{e}_3$ -Achse mit dem Winkel $\varphi = 30^\circ$ gedreht werden (Abb. 1.14).

1. Geben Sie die Basisvektoren des gedrehten Bezugssystems $\{0, \mathbf{e}_i^*\}$ an.
2. Bestimmen Sie den Tensor $\mathbf{R}$ der Abbildung $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i$.
3. Zeigen Sie, daß $\mathbf{R}$ orthogonal ist.

Aufgabe 1.15:

Gegeben ist ein Vektor $\mathbf{u} = -2 \mathbf{e}_1 + 3 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ und ein Tensor $\mathbf{T} = t_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ mit

$$t_{ik} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie den zu $\mathbf{T}$ gehörenden axialen Vektor $\overset{\text{A}}{\mathbf{t}}$ und bestätigen Sie anschließend folgende Beziehung:

$$(\text{skw} \mathbf{T}) \mathbf{u} = \overset{\text{A}}{\mathbf{t}} \times \mathbf{u}.$$

Aufgabe 1.16:

Gegeben sind drei Vektoren in einem orthonormierten Basissystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{e}_1 - 2 \mathbf{e}_2 - 3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v} &= 2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{e}_1 + 3 \mathbf{e}_2 - 2 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Berechnen Sie unter Verwendung des Fundamentaltensors $\overset{3}{\mathbf{E}}$:

- $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}|$,
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$,
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$,
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Aufgabe 1.17:

Gegeben sind die Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \quad \text{und} \\ \mathbf{v} &= 22\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Es möge gelten $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Berechnen Sie $\mathbf{w}$, wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$ einen Winkel von $22,21^\circ$ einschließen.

Aufgabe 1.18:

Gegeben sind die Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{T}$, wobei $\mathbf{T}$ schiefssymmetrisch sei. Zeigen sie

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{A}^D \cdot \mathbf{T}$ und
2. daß die Spur eines Deviators gleich Null ist.

Der Deviator eines Tensors ist definiert als $\mathbf{A}^D := \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$.

2 Grundzüge der Vektor- und Tensoranalysis

Aufgabe 2.1:

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\mathbf{u} = 3x_1x_3 \mathbf{e}_1 + 2x_1x_2^2 \mathbf{e}_2 - x_2x_3^3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = 2x_1x_2^2 \mathbf{e}_1 + 3x_2x_3 \mathbf{e}_2 + 4x_1^2x_2 \mathbf{e}_3$$

und das Skalarfeld $\Phi = -x_1x_2^2x_3^3$.

Bestimmen Sie:

- $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{u})$, • $(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$, • $\operatorname{rot} \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$, • $\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$,
- $(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u}$, • $\Delta \mathbf{v}$, • $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \Phi$.

Aufgabe 2.2:

Gegeben sind das Skalarfeld $\Phi(\mathbf{x})$ und das Vektorfeld $\mathbf{v} = v_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$.

1. Bestimmen Sie $\operatorname{grad} \Phi$ und $\operatorname{div} \mathbf{v}$.
2. Geben Sie die Koeffizienten von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ an.
3. Bestätigen Sie durch Ausrechnen der folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Phi \mathbf{v}) &= \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathbf{v} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \Phi) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3:

Bestätigen Sie die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \operatorname{div}[\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})] \\ &= \operatorname{grad}[\operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})] \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4:

Zeigen Sie, daß für beliebige Vektorfelder $\mathbf{v}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = 0.$$

Aufgabe 2.5:

Gegeben sind das Skalarfeld

$$\Phi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = x_2x_3 \mathbf{e}_1 + x_3x_1 \mathbf{e}_2 + x_1x_2 \mathbf{e}_3.$$

Bestimmen Sie den Gradienten des Skalarfeldes sowie Gradient, Divergenz und Rotation des Vektorfeldes.

Aufgabe 2.6:

Zeigen Sie, daß das Volumen eines regulär berandeten Körpers wie folgt bestimmt ist:

$$V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{a}$$

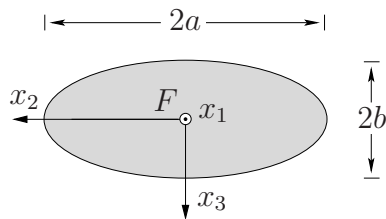
3 Anwendungen zur Tensorrechnung

Abb. 3.1

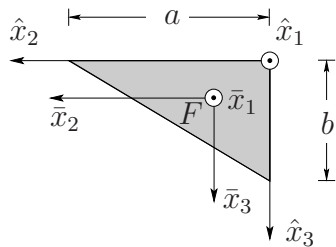


Abb. 3.2

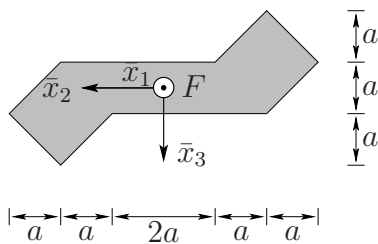


Abb. 3.3

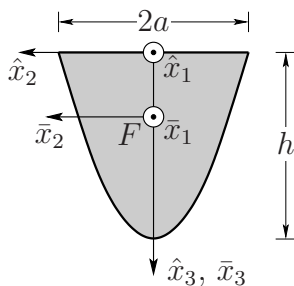


Abb. 3.4

Aufgabe 3.1:

Berechnen Sie für den in Abb. 3.1 gezeichneten ellipsenförmigen Querschnitt die Koeffizienten $\bar{J}_{ij}$ des Eigenträgheitstensors

$$\mathbf{J} = \bar{J}_{ij} (\bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j).$$

Gegeben: a, b .

Aufgabe 3.2:

Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente $\hat{J}_{22}$, $\hat{J}_{33}$ und $\hat{J}_{23}$ sowie die Eigenträgheitsmomente $\bar{J}_{22}$, $\bar{J}_{33}$ und $\bar{J}_{23}$.

Gegeben: a, b .

Aufgabe 3.3:

Ermitteln Sie für den in Abb. 3.3 gezeichneten Querschnitt

1. die Flächenträgheitsmomente $\bar{J}_{22}$, $\bar{J}_{33}$ und $\bar{J}_{23}$,
2. die Hauptträgheitsmomente J_1 , J_2 und
3. die Richtung der Trägheitshauptachsen (mit Skizze).

Gegeben: a .

Aufgabe 3.4:

Für den in Abb. 3.4 skizzierten parabelförmigen Querschnitt, dessen Rand durch

$$\hat{x}_3(\hat{x}_2) = h(1 - \frac{\hat{x}_2^2}{a^2})$$

und $\hat{x}_3 = 0$ gegeben ist, sind die Flächenträgheitsmomente $\hat{J}_{22}$, $\hat{J}_{33}$ und $\hat{J}_p$ sowie $\bar{J}_{22}$, $\bar{J}_{33}$ und $\bar{J}_p$ zu bestimmen. Wie lauten die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 ?

Gegeben: a, h .

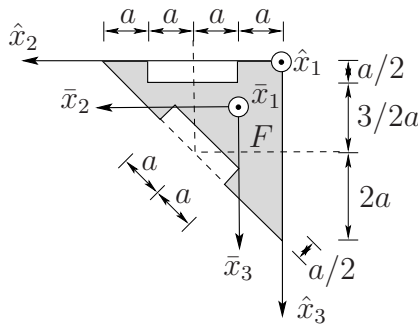


Abb. 3.5

Aufgabe 3.5:

Ermitteln Sie für die in Abb. 3.5 dargestellte Fläche

1. die Schwerpunktskoordinaten $\hat{x}_{2F}$ und $\hat{x}_{3F}$,
2. die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 bezüglich des Flächenschwerpunkts und die Richtung der Trägheitshauptachsen.

Gegeben: a .

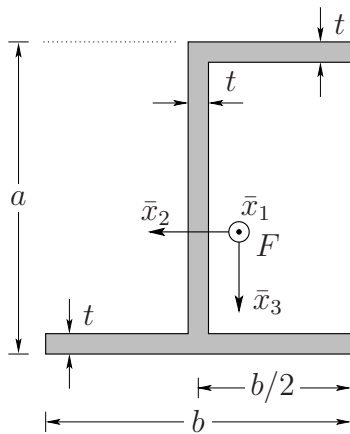


Abb. 3.6

Aufgabe 3.6:

Der Querschnitt eines Trägers besitzt die in Abb. 3.6 angegebene Gestalt.

1. Berechnen Sie die Eigenträgheitsmomente $\bar{J}_{22}$, $\bar{J}_{33}$ und $\bar{J}_{23}$ des Querschnitts zum einen exakt und zum anderen unter der Annahme eines dünnwandigen Profils.
2. Wie lauten die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 ?

Gegeben: $a = 90 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$, $t = 4 \text{ mm}$.

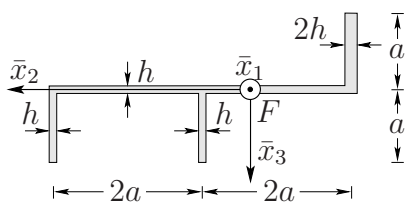


Abb. 3.7

Aufgabe 3.7:

Ermitteln Sie für den in Abb. 3.7 dargestellten, dünnwandigen Querschnitt die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 sowie die Lage des Hauptachsensystems.

Gegeben: a , h .

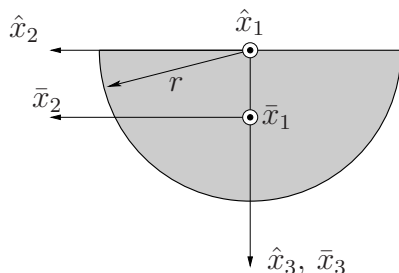


Abb. 3.8

Aufgabe 3.8:

Gegeben ist die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius r (Abb. 3.8). Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment $\hat{J}_{22}$ und das Eigenträgheitsmoment $\bar{J}_{22}$.

Gegeben: r .

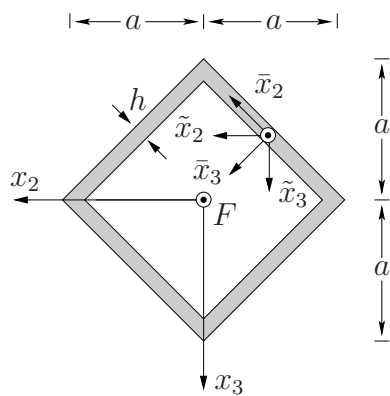


Abb. 3.9

Aufgabe 3.9:

Ermitteln Sie die Flächenträgheitsmomente J_{22} , J_{33} und J_{23} des in Abb. 3.9 dargestellten, dünnwandigen Profils. Welche Flächenträgheitsmomente erhält man bei Drehung des x_2, x_3 -Systems?

Gegeben: a, h .

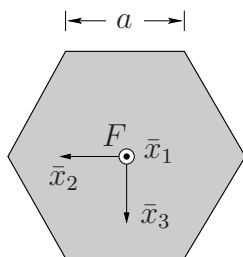


Abb. 3.10

Aufgabe 3.10:

Ermitteln Sie für den in Abb. 3.10 dargestellten Querschnitt die Hauptträgheitsmomente J_1 und J_2 sowie die Lage des Hauptachsensystems.

Gegeben: $a = 20 \text{ cm}$.

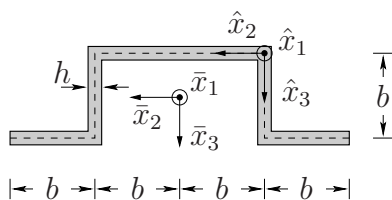


Abb. 3.11

Aufgabe 3.11:

Geben Sie für das dünnwandige Profil in Abb. 3.11 die Koordinaten $\hat{x}_{2F}$ und $\hat{x}_{3F}$ des Flächenschwerpunkts und die Eigenträgheitsmomente $\bar{J}_{22}$, $\bar{J}_{33}$ und $\bar{J}_{23}$ an.

Gegeben: b, h .

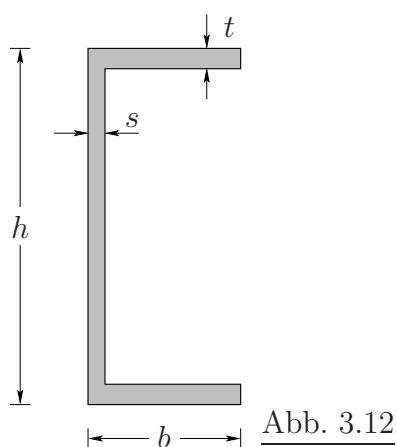


Abb. 3.12

Aufgabe 3.12:

Ermitteln Sie für den dünnwandigen Querschnitt in Abb. 3.12

1. den Flächenschwerpunkt,
2. die Koeffizienten des Eigenträgheitstensors $\mathbf{J}$ und
3. die Hauptträgheitsmomente J_1, J_2 sowie die Richtung der Trägheitshauptachsen.

Gegeben: $h = 20 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}, t = 1 \text{ cm}, s = 0,8 \text{ cm}$.