

Wochenprogramm 12 mit Lösungsweg: Erweiterte Regelkreisstrukturen

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Um im Standardregelkreis das Führungsverhalten zu verbessern, wird häufig eine zusätzliche Vorsteuerung verwendet. Eine solche Regelkreisstruktur mit Rückführung und Vorsteuerung (vgl. Abbildung 1) wird auch als Struktur mit zwei Freiheitsgraden bezeichnet. Diese Regelkreisstruktur soll in dieser Aufgabe analysiert werden.

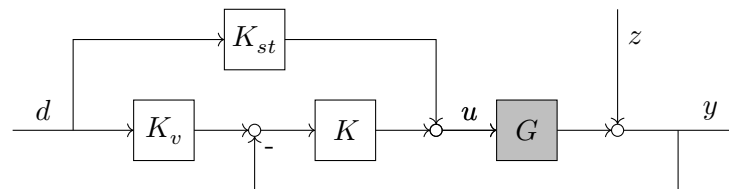


Abbildung 1: Struktur mit zwei Freiheitsgraden.

- a) Welches der drei Übertragungsglieder K , K_v und K_{st} eignet sich dafür, die Störgröße z auszuregeln?

Lösung: K eignet sich zur Störunterdrückung, da dafür eine Rückführung (d.h. ein Feedback-Loop) notwendig ist. K_v und K_{st} sind Steuerungen und sorgen lediglich für ein gutes Führungsverhalten.

- b) Bestimmen Sie die ideale Übertragungsfunktion K_{st}^* , damit die Übertragungsfunktion $G_{d \rightarrow y}$ gleich 1 ist. Nehmen Sie dazu an $K_v = 1$.

Lösung: Es muss gelten

$$Y = \frac{GK_{st} + GK}{1 + GK} D \stackrel{!}{=} D, \quad \Rightarrow \quad K_{st}^* = G^{-1}.$$

- c) Bestimmen Sie für die folgenden Übertragungsfunktionen G jeweils die ideale Übertragungsfunktion K_{st}^* . Ist K_{st}^* realisierbar? Geben Sie eine möglichst gute, realisierbare Übertragungsfunktion K_{st} an. Entwerfen Sie außerdem jeweils eine realisierbare Vorsteuerung K_v , sodass der geschlossene Kreis $d \rightarrow y$ unabhängig vom Regler K die Übertragungsfunktion GK_{st} aufweist.

i) $G(s) = \frac{s+1}{s+2},$

Lösung: $K_{st}^*(s) = \frac{s+2}{s+1}$ ist realisierbar, d.h. $K_{st} = K_{st}^*$. Es muss gelten $Y = \frac{GK_{st} + GK_v}{1 + GK} D \stackrel{!}{=} GK_{st} D$. Daraus folgt $K_v = GK_{st}$. Hier berechnen wir $K_v = GK_{st} = 1$.

ii) $G(s) = \frac{1}{s+2}$,

Lösung: $K_{st}^*(s) = \frac{s+2}{1}$ ist nicht realisierbar, da akausal. Zusätzliches Filter F notwendig:

$$K_{st}(s) = F(s)K_{st}^*(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega} + 1} \cdot \frac{s+2}{1} = \frac{s+2}{\frac{s}{\omega} + 1}.$$

Außerdem gilt $K_v = GK_{st} = \frac{1}{\frac{s}{\omega} + 1}$.

iii) $G(s) = \frac{s-1}{s+2}$,

Lösung: $K_{st}^*(s) = \frac{s+2}{s-1}$ ist nicht technisch realisierbar, da instabil. Zerlegung von G in Allpass-Anteil und minimalphasigen Anteil:

$$G(s) = \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{G_A(s)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{s+1}{s+2}\right)}_{G_M(s)}.$$

Somit ergeben sich $K_{st}(s) = G_M^{-1}(s) = -\frac{s+2}{s+1}$ und $K_v = GK_{st} = -\frac{s-1}{s+1}$.

iv) $G(s) = \frac{s+1}{s+2}e^{-\tau s}$, $\tau > 0$.

Lösung: $K_{st}^*(s) = \frac{s+2}{s+1}e^{+\tau s}$ ist nicht realisierbar, da akausal. Zerlegung von G in Allpass-Anteil und minimalphasigen Anteil:

$$G(s) = \underbrace{e^{-\tau s}}_{G_A(s)} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{s+2}}_{G_M(s)}.$$

Somit ergeben sich $K_{st}(s) = G_M^{-1}(s) = \frac{s+2}{s+1}$ und $K_v = GK_{st} = e^{-\tau s}$.

Standardniveau

Aufgabe 2 In dieser Aufgabe soll ein Kaskadenregler (vgl. Abbildung 2) für die Drehzahl des in Übung 0 untersuchten Gleichstrommotors entworfen werden. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Rückwirkung der Drehzahl auf den Ankerstrom gering ist, d.h. $P_e \approx 0 \frac{V}{\text{rad s}}$. Damit erhält man

$$L \frac{di}{dt} = e - Ri,$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = P_T i + M.$$

Für die Parameter gilt: $R = 5 \Omega$, $L = 3 \text{ mH}$, $P_T = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$ und $J = 130 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

- a) Stellen Sie die Übertragungsfunktionen $G_1 (E \rightarrow I)$, $G_2 (P_T I \rightarrow \omega)$ und $G (E \rightarrow \omega)$ auf.

Lösung:

$$G_1(s) = \frac{1}{Ls + R}, \quad G_2(s) = \frac{1}{Js}, \quad G(s) = \frac{P_T}{Js(Ls + R)}.$$

- b) Für das System soll ein Kaskadenregler gemäß Abbildung 2 entworfen werden. Welche Voraussetzungen müssen dafür erfüllt sein?

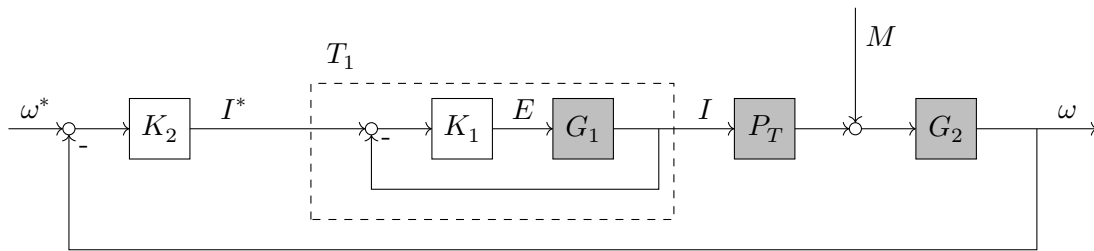


Abbildung 2: Kaskadenregler.

Lösung:

- Der Ausgang des inneren Kreises, die Stromstärke I , muss messbar sein.
 - Die Dynamik des inneren Kreises muss schneller als die des äußeren Kreises sein.
- c) Entwerfen Sie für den inneren Kreis einen P-Regler $K_1(s) = k_1$, sodass der geschlossene innere Kreis T_1 eine Bandbreite von ca. $\omega_{B1} = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ besitzt. Berechnen Sie die stationäre Verstärkung von T_1 mit diesem Regler.

Lösung: Mit der Faustformel aus der Vorlesung gilt für die Bandbreite $\omega_{B1} \approx \omega_{D1}$, d.h. die Bandbreite ist ungefähr gleich der Durchtrittsfrequenz des offenen inneren Kreises $G_{01} = G_1 K_1$. Die Durchtrittsfrequenz ist bestimmt durch

$$|G_{01}(j\omega_{D1})| \stackrel{!}{=} 1.$$

Hier ergibt sich

$$|G_{01}(j\omega_{D1})|^2 = \left| \frac{\frac{k_1}{L}}{j\omega_{D1} + \frac{R}{L}} \right|^2 = \frac{\frac{k_1^2}{L^2}}{\omega_{D1}^2 + \frac{R^2}{L^2}}$$

und damit mit dem geforderten $\omega_{D1} \approx \omega_{B1} \stackrel{!}{=} 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$k_1 = \sqrt{\omega_{D1}^2 L^2 + R^2} = 13 \, \Omega.$$

Für die stationäre Verstärkung ergibt sich

$$T_1(0) = \frac{k_1}{R + k_1} = \frac{13}{18}.$$

- d) Als Nächstes soll ein P-Regler $K_2(s) = k_2$ für den äußeren Kreis entworfen werden. Dieser soll eine Bandbreite von ca. $\omega_{B2} = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ besitzen. Außerdem soll gewährleistet werden, dass keine bleibende Regelabweichung bei einem sprungförmigen Referenzsignal auftritt. Für den Entwurf kann angenommen werden, dass der innere Kreis T_1 ein ideales Übertragungsverhalten aufweist, d.h., sein Übertragungsverhalten exakt dessen stationärer Verstärkung entspricht.

Lösungsweg: Für eine verschwindende bleibende Regelabweichung muss der offene Kreis ein integrierendes Verhalten aufweisen. Da bereits die Strecke einen I-Anteil besitzt, genügt der P-Regler, um dies zu gewährleisten. Unter der Annahme, dass der innere Kreis ideales Übertragungsverhalten aufweist, d.h. $T_1(s) \equiv \frac{k_1}{R+k_1}$, lautet die Übertragungsfunktion des offenen äußeren Kreises $G_{02}(s) = \frac{k_2 P_T k_1}{(R+k_1)J} \frac{1}{s}$. Mit der Faustformel aus der Vorlesung $\omega_{D2} \approx \omega_{B2} \stackrel{!}{=} 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ und $|G_{02}(j\omega_{D2})| = 1$ erhalten wir

$$k_2 = \omega_{D2} \frac{R + k_1}{P_T k_1} J = 9 \, \text{kg m}^2.$$

Aufgabe 3

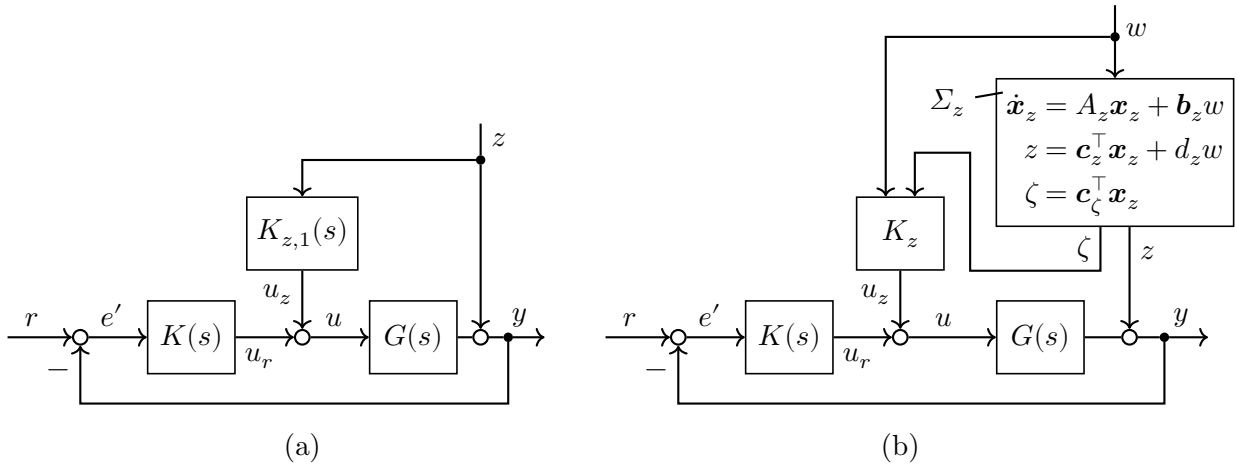


Abbildung 3: Regelkreis mit Störgrößenaufschaltung.

Gegeben sei ein Regler K , welcher die Strecke

$$G(s) = \frac{s^2 - 4s + 4}{s^3 + 2s^2 + s} \quad (1)$$

asymptotisch stabilisiert. Es wirkt eine Störgröße z auf den Ausgang der Strecke.

Zunächst wird angenommen, dass die Störgröße z direkt messbar sei (siehe Abbildung 3a).

- a) Entwerfen Sie ein $K_{z,1}$, welches die Störung bestmöglich kompensiert. Ist eine exakte Kompensation möglich?

Lösung: Die ideale Übertragungsfunktion für die Störgrößenaufschaltung ist $K_{z,1}^{**} = -\frac{G_z}{G} = -G^{-1} = -\frac{s(s+1)^2}{(s-2)^2}$.

Allerdings ist G nicht minimalphasig, da es eine doppelte Nullstelle bei 2 hat. Daher muss es in einen Allpass und einen minimalphasigen Teil zerlegt werden: $G(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+2)^2} \cdot \frac{(s+2)^2}{s(s+1)^2}$, $G_M := \frac{(s+2)^2}{s(s+1)^2}$ und wir wählen $K_{z,1}^* = -G_M^{-1} = -\frac{s(s+1)^2}{(s+2)^2}$.

Des Weiteren gilt $1 = \text{rel. Grad}(G) > \text{rel. Grad}(G_z) = \text{rel. Grad}(1) = 0$, daher ist $\frac{G_z}{G}$ akausal. Es muss also ein Filter erster Ordnung $\frac{\lambda_a}{s+\lambda_a}$, mit $\lambda_a \gg 1$, hinzugefügt werden, damit $K_{z,1} = -\frac{\lambda_a s(s+1)^2}{(s+2)^2(s+\lambda_a)}$ kausal ist.

Durch diese beiden Approximationen ist eine exakte Kompensation nicht möglich.

Nun soll angenommen werden, dass z nicht direkt messbar sei. Jedoch wurden unter Berücksichtigung technischer Einschränkungen zwei alternative messbare Signale w und ζ gefunden, welche stattdessen für die Störgrößenaufschaltung verwendet werden sollen (siehe Abbildung 3b). Von dem Störübertragungssystem Σ_z seien die Systemgrößen $A_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, $b_z, c_z, c_\zeta \in \mathbb{R}^{n_z}$ sowie $d_z \neq 0$ bekannt, und die Anfangsbedingung $x_z(0) \in \mathbb{R}^{n_z}$ sei unbekannt. Weiterhin sei $(A_z, c_\zeta^\top)$ beobachtbar.

Ihr Kollege Herr R. Egler hat die Idee, die Störgröße z über einen Beobachter mit Eingängen w und ζ zu schätzen, und dann die geschätzte Störung als Eingang für $K_{z,1}$ zu verwenden.

- b) Welches Problem ergäbe sich, wenn für eine Störgrößenaufschaltung ausschließlich das Signal ζ zur Verfügung stünde?

Lösung: Im Allgemeinen lässt sich der Eingang w nicht aus Messungen des Ausgangs ζ rekonstruieren. Gleichzeitig, da $d_z \neq 0$ gilt, hängt der Ausgang z von w ab und lässt sich somit nicht rekonstruieren.

- c) Welches Problem ergäbe sich, wenn für eine Störgrößenaufschaltung ausschließlich das Signal w zur Verfügung stünde?

Lösung: Da $\mathbf{x}_z(0)$ unbekannt ist, reicht ein reiner Simulator als Beobachter nicht aus, um $\mathbf{x}_z$ zu rekonstruieren (A_z ist nicht notwendigerweise Hurwitz, w geht nicht notwendigerweise gegen 0). Dafür bräuchte es das Signal ζ . Somit ist nur der Term $d_z w$ von z bekannt, was nicht ausreicht, um z zu rekonstruieren.

- d) Entwerfen Sie einen Beobachter, der z rekonstruiert.

Lösung:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_z &= (A_z - \mathbf{l}\mathbf{c}_\zeta^\top)\hat{\mathbf{x}}_z + \mathbf{b}_z w + \mathbf{l}\zeta \\ \hat{z} &= \mathbf{c}_z^\top \hat{\mathbf{x}}_z + d_z w\end{aligned}$$

wobei $A_z - \mathbf{l}\mathbf{c}_\zeta^\top$ Hurwitz ist. Solch eine Wahl von $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ ist immer möglich, da $(A_z, \mathbf{c}_\zeta^\top)$ beobachtbar ist.

- e) Beschreiben Sie die sich ergebende Gesamtstruktur der approximativen Störgrößenaufschaltung K_z .

Lösung: K_z besteht also aus einer Reihenschaltung des obenstehenden Beobachters mit Eingängen w und ζ und des oben bereits entworfenen $K_{z,1}$.