

Wochenprogramm **11** mit Lösungsweg: Beobachtbarkeit

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Welche der folgenden Systeme sind steuerbar und/oder beobachtbar?

a)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 2) \mathbf{x} + u\end{aligned}$$

Lösung: Steuerbar: Ja; beobachtbar: Ja.

Lösungsweg: $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 0) \mathbf{x}\end{aligned}$$

Lösung: Steuerbar: Nein; beobachtbar: Ja.

Lösungsweg: $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

c)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (0 \quad 0 \quad 4) \mathbf{x} + 2u\end{aligned}$$

Lösung: Steuerbar: Nein; beobachtbar: Nein.

Lösungsweg: $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} u \\ y &= (2 \quad 0 \quad -2) \mathbf{x}\end{aligned}$$

Lösung: Steuerbar: Ja; beobachtbar: Ja.

Lösungsweg: $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 12 & 39 \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \\ -4 & -12 & -12 \end{pmatrix}$

Bei welchen Systemen ist es möglich, den Verlust von Steuerbarkeit und/oder Beobachtbarkeit direkt an der Systemrealisierung “abzulesen”?

Lösung: Man sieht zum Beispiel für System b), dass der Zustand x_2 autonom ist, d.h., er wird weder von u noch von x_1 beeinflusst. Daher ist er nicht steuerbar. Dasselbe trifft auf Zustand x_3 bei System c) zu.

Für System c) kann man auch für den Verlust der Beobachtbarkeit eine anschauliche Erklärung finden. Wir haben festgestellt, dass Zustand x_3 von den anderen Zuständen entkoppelt ist. Am Ausgang sind aber nur dieser Zustand sowie der Eingang u sichtbar. Der Ausgang enthält folglich keine Informationen über die Zustände x_1 und x_2 . Das System ist folglich nicht beobachtbar.

Standardniveau

Aufgabe 2

Gegeben sei die Parallelschaltung zweier Systeme gemäß Abbildung 1. Die Systeme mit den Zuständen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ haben jeweils identische Systemmatrizen A sowie identische Ausgangsvektoren $\mathbf{c}^T$. Lediglich die Eingangsvektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ sind verschieden.

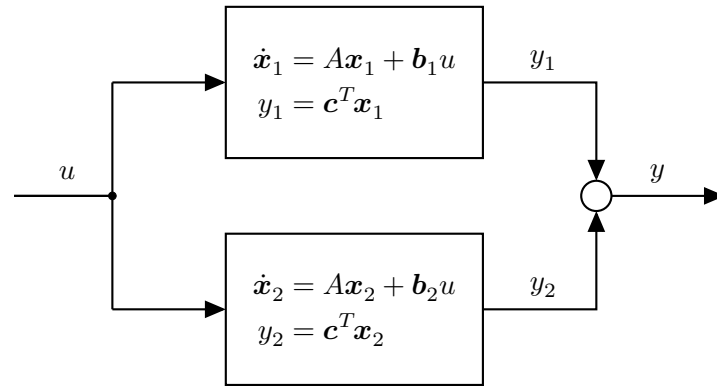


Abbildung 1: Parallelschaltung zweier linearer Systeme.

- a) Geben Sie eine Zustandsraumdarstellung für das Gesamtsystem in Abbildung 1 an.

Lösung:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad A_\Sigma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_\Sigma^\top = (\mathbf{c}^\top \quad \mathbf{c}^\top)$$

- b) Es sei $(A, \mathbf{c}^T)$ beobachtbar. Ist das Gesamtsystem in Abbildung 1 mit dem Ausgang y beobachtbar?

Lösung: Da der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix maximal n sein kann, die Systemordnung jedoch $2n$ ist, ist das System nicht beobachtbar.

Lösungsweg: Der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix ist immer

$$\text{rang } P_{0,\Sigma} = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_\Sigma^\top \\ \mathbf{c}_\Sigma^\top A_\Sigma \\ \vdots \\ \mathbf{c}_\Sigma^\top A_\Sigma^{2n-1} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\top & \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top A & \mathbf{c}^\top A \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top A \\ \vdots \end{pmatrix} = n,$$

daher ist das Gesamtsystem nicht beobachtbar.

Alternativer Lösungsweg: Intuitiv, falls $y \equiv 0$, kann es trotzdem sein, dass $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2$, damit ist das System nicht beobachtbar.

- c) Zeigen Sie, dass für keine Systemmatrix A Eingangsvektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ existieren, so dass das Gesamtsystem steuerbar ist.

Hinweis: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton lässt sich jede Potenz A^i für $i \geq 0$ als Linearkombination von $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ darstellen, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist.

Lösung: Die Steuerbarkeitsmatrix des Gesamtsystems ist

$$S_{0,\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_\Sigma & A_\Sigma \mathbf{b}_\Sigma & \cdots & A_\Sigma^{2n-1} \mathbf{b}_\Sigma \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} I\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_1 & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b}_1 \\ I\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A^{n-1}\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} S_{0,1} \\ S_{0,2} \end{pmatrix} =: X} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{A^n \mathbf{b}_1}^{=:z} & A^{n+1}\mathbf{b}_1 & \cdots & A^{2n-1}\mathbf{b}_1 \\ A^n \mathbf{b}_2 & A^{n+1}\mathbf{b}_2 & \cdots & A^{2n-1}\mathbf{b}_2 \end{pmatrix}}_{=: Y}.$$

Zu zeigen ist, dass $\text{rang } S_{0,\Sigma} < 2n$ für alle $A, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ gilt. Da X den Steuerbarkeitsmatrizen der Teilsysteme entspricht, sieht man direkt, dass das Gesamtsystem nicht steuerbar ist, wenn eines der Teilsysteme nicht steuerbar ist. Wenn wir daher von steuerbaren Teilsystemen ausgehen würden, gälte $\text{rang } S_{0,\Sigma} \geq \text{rang } X = n$. Diese Beobachtung schließt aber noch nicht aus, dass $\text{rang } S_{0,\Sigma} = 2n$ gelten könnte. Daher betrachten wir nun die Einträge in Y .

Wenn wir nun zeigen können, dass eine Spalte in Y , z.B. z , für beliebige $A, \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ eine Linearkombination der Spalten in X ist, haben wir die Aussage bewiesen, da dann direkt $\text{rang } S_{0,\Sigma} < 2n$ folgt. Gemäß dem Satz von Cayley-Hamilton existiert für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein $\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i$$

gilt. Damit folgt, dass

$$z = \begin{pmatrix} A^n \mathbf{b}_1 \\ A^n \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \right) \mathbf{b}_1 \\ \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \right) \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \begin{pmatrix} A^i \mathbf{b}_1 \\ A^i \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = X\alpha,$$

d. h. z ist eine Linearkombination der Spalten von X , unabhängig von der Wahl von $A, \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$. Somit ist der Rang von $S_{0,\Sigma}$ kleiner $2n$, womit die Aussage bewiesen ist.

1er-Niveau

Aufgabe 3

Gegeben sei ein asymptotisch stabiles System in Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

$$y = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \quad (2)$$

mit $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, und $y(t) \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die folgende Matrix

$$W_o = \int_0^\infty (e^{A\tau})^\top \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A\tau} d\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3)$$

Anmerkung zur Einordnung: Die Matrix W_o nennt man Gram'sche Beobachtbarkeitsmatrix (*engl.* observability gramian). Dual dazu gibt es auch eine *controllability gramian* für die Steuerbarkeit. Die Gleichung (4) ist auch als Lyapunov-Gleichung bekannt. Da es effiziente und numerisch stabile Verfahren zur Lösung der Lyapunov-Gleichung gibt, eignet sich diese gut um Stabilität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit numerisch zu überprüfen. In weiterführenden Regelungstechnik-Vorlesungen wird Ihnen diese Gleichung noch öfter begegnen, z. B. bei der Anwendung der Lyapunov-Stabilitätstheorie auf lineare Systeme oder zur Berechnung der asymptotischen Kovarianz von linearen Systemen mit additivem weißen Rauschen. Darin wird dieses Konzept auch noch genauer eingeführt. Diese Einordnung soll aber nur ein kleiner Vorgeschmack darauf sein, was sie in der Regelungstechnik nach der ERT noch erwartet, und hat hier keine Prüfungsrelevanz.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix W_o die Matrixgleichung

$$A^\top W_o + W_o A = -\mathbf{c} \mathbf{c}^\top \quad (4)$$

erfüllt.

Lösung: Aus A Hurwitz folgt, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^\top \tau} = 0$ gilt. Damit lässt sich dann durch Einsetzen von W_o berechnen, dass

$$\begin{aligned} A^\top W_o + W_o A &= \int_0^\infty A^\top e^{A^\top \tau} \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A\tau} d\tau + \int_0^\infty e^{A^\top \tau} \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A\tau} A d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} (e^{A^\top \tau} \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A\tau}) d\tau \\ &= e^{A^\top t} \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A t} \Big|_{t=0}^\infty \\ &= 0 - \mathbf{c} \mathbf{c}^\top \\ &= -\mathbf{c} \mathbf{c}^\top \end{aligned}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass $(A, \mathbf{c}^\top)$ beobachtbar ist, genau dann wenn W_o vollen Rang hat.

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Definition von Beobachtbarkeit:

$(A, \mathbf{c}^\top)$ ist beobachtbar, genau dann wenn $\forall t \geq 0 : y(t) = 0 \implies \forall t \geq 0 : \mathbf{x}(t) = 0$.

Lösung: Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ zu (1) ist $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$, damit ist der Ausgang $y(t) = \mathbf{c}^\top e^{At} \mathbf{x}_0$. Somit gilt

$$\mathbf{x}_0^\top W_o \mathbf{x}_0 = \int_0^\infty \mathbf{x}_0^\top (e^{A\tau})^\top \mathbf{c} \mathbf{c}^\top e^{A\tau} \mathbf{x}_0 d\tau = \int_0^\infty y(\tau)^\top y(\tau) d\tau = \int_0^\infty \|y(\tau)\|^2 d\tau. \quad (5)$$

Nun zeigen wir zunächst, dass wenn $(A, \mathbf{c}^\top)$ beobachtbar ist, W_o vollen Rang haben muss. Wir nehmen dazu an, W_o habe keinen vollen Rang, und zeigen, dass $(A, \mathbf{c}^\top)$ in diesem Falle auch nicht beobachtbar sein kann.

Wenn W_o keinen vollen Rang hat, dann existiert eine Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 \neq 0$ mit $\mathbf{x}_0^\top W_o \mathbf{x}_0 = 0$. Für diese Anfangsbedingung gilt $\forall t \geq 0 : \mathbf{x}(t) \neq 0$, da $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$. Jedoch folgt aus $\mathbf{x}_0^\top W_o \mathbf{x}_0 = 0$ dass $\int_0^\infty \|y(\tau)\|^2 d\tau = 0$ gilt und damit $y(t) \equiv 0$. Somit ist das System nicht beobachtbar.

Als Nächstes zeigen wir, dass wenn W_o vollen Rang hat, $(A, \mathbf{c}^\top)$ beobachtbar sein muss. Dies erreichen wir erneut mit einem Widerspruchsbeweis.

Wenn $(A, \mathbf{c}^\top)$ nicht beobachtbar ist, dann existiert eine Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t) \neq 0$ mit Ausgang $y(t) \equiv 0$. Aus $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 \neq 0$ folgt sofort, dass dann auch $\mathbf{x}_0 \neq 0$ gelten muss. Wegen $y(t) \equiv 0$ gilt $\mathbf{x}_0^\top W_o \mathbf{x}_0 = \int_0^\infty \|y(\tau)\|^2 d\tau = 0$ für $\mathbf{x}_0 \neq 0$. Da W_o aufgrund seiner Definition (3) symmetrisch und positiv semidefinit sein muss, hat W_o damit also keinen vollen Rang.

Damit haben wir gezeigt, dass $(A, \mathbf{c}^\top)$ beobachtbar ist, genau dann wenn W_o vollen Rang hat.