

Wochenprogramm **10** mit Lösungsweg: Beobachter

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ y &= (0 \quad 1) \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Entwerfen Sie einen Beobachter $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = F\hat{\mathbf{x}} + Ey$ so, dass die Pole der Beobachterfehlerdynamik bei -4 und -5 liegen.

Lösung: Beobachtergleichung:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= A\hat{\mathbf{x}} + E(y - \hat{y}) = A\hat{\mathbf{x}} + E(y - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}) \\ &= (A - E\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}} + Ey.\end{aligned}$$

Mit $F = (A - E\mathbf{c}^T)$ und $\boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ erhält man für die Beobachterfehlerdynamik

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (A - E\mathbf{c}^T)\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Das charakteristische Polynom der Beobachterfehlerdynamik ergibt sich somit zu

$$\lambda^2 + (e_2 - 3)\lambda + e_2 + e_1 + 2.$$

Das Wunschpolynom lautet

$$\lambda^2 + 9\lambda + 20.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man also

$$E = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad F = (A - E\mathbf{c}^T) = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Standardniveau

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe sollen ein Beobachter und Regler für einen Satelliten entworfen werden, sodass dieser die Erde mit konstanter Geschwindigkeit umkreist.

Das Kinetik des Satelliten wird durch folgende nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben

$$\begin{aligned}m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Mm}{r^2} + u_r, \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= u_\theta.\end{aligned}$$

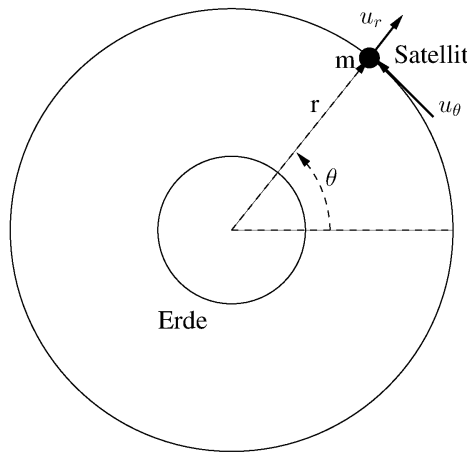


Abbildung 1: Schemadarstellung des Satelliten.

Dabei ist $r > 0$ der Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt, θ der Winkel zu einer gedachten Nulllage (horizontale Linie), $m > 0$ die Masse des Satelliten, $M > 0$ eine Konstante proportional zur Erdmasse und u_r und u_θ sind radiale und tangential Kräfte, mit denen die Lage des Satelliten beeinflusst werden können (vergleiche Abbildung 1). Die kreisförmige Erdumlaufbahn ist durch die Ruhelage $r(t) = r_0$, $\dot{r}(t) = 0$, θ beliebig und $\dot{\theta} = \omega_0$, $\omega_0 > 0$ gegeben. Eine Linearisierung der kinetischen Differentialgleichungen um diese Ruhelage führt auf folgendes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr_0} \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad (1)$$

mit $\mathbf{x} = (r - r_0 \quad \dot{r} \quad \dot{\theta} - \omega_0)^\top$ und $\mathbf{u} = (u_r \quad u_\theta)^\top$. Die Bahn- und Satellitenparameter sind gegeben als $\omega_0 = 1$, $r_0 = \frac{1}{2}$ und $m = \frac{1}{2}$.

- a) Nun soll ein Zustandsregler entworfen werden. Aus Gewichtsgründen kann an dem Satellit allerdings nur ein Antrieb in eine Antriebsrichtung, also entweder in u_r - oder in u_θ -Richtung, montiert werden. Prüfen Sie für u_r und u_θ jeweils, ob eine beliebige Polvorgabe mit diesem Eingang möglich ist.

Lösung: Eine beliebige Polvorgabe ist nur für den Eingang u_θ möglich.

Lösungsweg: Es muss geprüft werden, ob das System mit den entsprechenden Eingangsvektoren steuerbar ist:

- Für den Eingang u_r ist $\mathbf{b} = (0 \quad 2 \quad 0)^\top$. Die entsprechende Steuerbarkeitsmatrix hat keinen vollen Rang. Folglich ist mit dem Eingang u_r keine beliebige Polvorgabe möglich.
- Für den Eingang u_θ ist $\mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 4)^\top$. Die entsprechende Steuerbarkeitsmatrix hat vollen Rang. Folglich ist mit dem Eingang u_θ eine beliebige Polvorgabe möglich.

Betrachten Sie für die weiteren Aufgaben lediglich das lineare System (1) mit dem Eingang $u = u_\theta$ und $\mathbf{b} = (0 \quad 0 \quad 4)^\top$.

- b) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$, so dass alle Pole des geschlossenen Kreises bei $s = -1$ liegen.

Lösung: $\mathbf{k}^\top = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Lösungsweg: Man erhält für das charakteristische Polynom des Regelkreises mit Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{k}^T = (k_1 \ k_2 \ k_3)$:

$$s^3 + s^2(4k_3) + s(4k_2 + 1) + 4k_1 - 12k_3 \stackrel{!}{=} s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Die Einträge von $\mathbf{k}^T$ erhält man durch Vergleich.

- c) Der Satellit hat lediglich einen Sensor für den Abstand $r = x_1$, d.h. der Ausgang des Systems (1) ist $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = x_1$.
- i) Ist bei diesem Ausgang eine beliebige Vorgabe der Fehlerdynamik des Beobachters möglich? Welche Wahl der Eigenwerte der Fehlerdynamik ist sinnvoll, falls Sie einen Beobachter für das System Satellit-Beobachter-Regler entwerfen und dabei den Zustandsregler aus Teilaufgabe a) verwenden möchten?

Lösung: Die Fehlerdynamik des Beobachters kann beliebig vorgegeben werden. Die Eigenwerte des Beobachters sollen „schneller“ sein als die Eigenwerte der Zustandsregelung; nicht zu schnell, da sonst das Rauschen sehr verstärkt wird.

Lösungsweg: Getestet wird das System auf Beobachtbarkeit mit $\mathbf{c}^T = (1 \ 0 \ 0)$. Die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang.

- ii) Entwerfen Sie einen Beobachter, so dass alle Eigenwerte der Fehlerdynamik bei $s = -3$ liegen. Welche Pole hat das Gesamtsystem Satellit-Beobachter-Regler?

Lösung: $\mathbf{e} = (9 \ 26 \ -9)^T$. Für den Beobachter ergibt sich also insgesamt:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{e}\mathbf{c}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{e}y = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \\ -9 \end{pmatrix} y.$$

Das Gesamtsystem hat dann sechs Pole. Mit dem Separationsprinzip liegen drei bei -1 (Zustandsregler) und drei bei -3 (Beobachter).

Lösungsweg: Beim Luenberger-Beobachter wird die Fehlerdynamik beschrieben durch $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{e}\mathbf{c}^T)\boldsymbol{\varepsilon}$, mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{e} = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T$. Für das charakteristische Polynom der Matrix $(\mathbf{A} - \mathbf{e}\mathbf{c}^T)$ erhält man $s^3 + e_1 s^2 + (e_2 + 1)s + e_3 + 4e_1 = 0$. Das Sollpolynom zum Bestimmen der unbekannten Parameter ist $(s + 3)^3 = 0$.

- d) Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Regelung, welches sowohl die Zustandsrückführung als auch den Beobachter enthält.

Lösung:

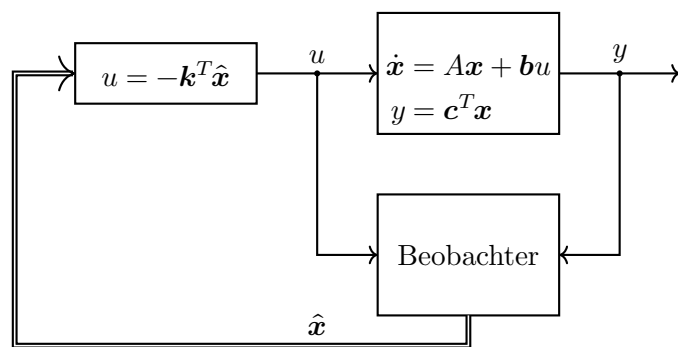


Abbildung 2: Blockschaftbild der Regelung.

Aufgabe 3

Transformieren Sie das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} u$$
$$y = (1 \ 0 \ 0) \mathbf{x}$$

auf Beobachternormalform. Wie lautet die Transformationsmatrix?

Lösung: Das System ist beobachtbar, weshalb eine Transformation auf Beobachternormalform möglich ist. Das charakteristische Polynom ist $\chi(s) = s^3 + s$. Mit $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$ ergibt sich das System in Beobachternormalform zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = (1 \ 0 \ 0) \mathbf{x}.$$

Die Transformationsmatrix ist

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösungsweg: Die Transformation auf Beobachternormalform ist nur möglich, wenn das System beobachtbar ist, was wir im Folgenden überprüfen. Die Beobachtbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$P_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^\top \\ \mathbf{c}^\top A \\ \mathbf{c}^\top A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\text{rang}(P_0) = 3 = n$. Also ist das System beobachtbar. Wir bestimmen das charakteristische Polynom

$$\chi(s) = \det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ -3 & s & -1 \\ 0 & 4 & s \end{pmatrix} = s^3 - 3s + 4s = s^3 + s$$

mit Koeffizienten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$. Damit ergeben sich die Systemmatrix und der Ausgangsvektor des transformierten Systems zu

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{c}^{*\top} = (0 \ 0 \ 1).$$

Als Nächstes bestimmen wir die Transformationsmatrix T für die Transformation $\mathbf{x} = T\mathbf{z}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= T^{-1}AT\mathbf{z} + T^{-1}\mathbf{b}u &= A^*\mathbf{z} + \mathbf{b}^*u \\ y &= \mathbf{c}^\top T\mathbf{z} &= \mathbf{c}^{*\top}\mathbf{z}, \end{aligned}$$

so dass wir das System auf Beobachternormalform transformieren. Aus $\mathbf{c}^{*\top} T^{-1} = \mathbf{c}^\top$ und $A^* T^{-1} = T^{-1} A$ erhalten wir ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\mathbf{t}^{(3)\top} &= \mathbf{c}^\top \\ -a_0 \mathbf{t}^{(3)\top} &= \mathbf{t}^{(1)\top} A \\ \mathbf{t}^{(1)\top} - a_1 \mathbf{t}^{(3)\top} &= \mathbf{t}^{(2)\top} A \\ \mathbf{t}^{(2)\top} - a_2 \mathbf{t}^{(3)\top} &= \mathbf{t}^{(3)\top} A\end{aligned}$$

und bestimmen $T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)\top} \\ \mathbf{t}^{(2)\top} \\ \mathbf{t}^{(3)\top} \end{pmatrix}$ rekursiv:

$$\mathbf{t}^{(3)\top} = \mathbf{c}^\top = (1 \quad 0 \quad 0)$$

$$\mathbf{t}^{(2)\top} = \mathbf{t}^{(3)\top} A + a_2 \mathbf{t}^{(3)\top} = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$\mathbf{t}^{(1)\top} = \mathbf{t}^{(2)\top} A + a_1 \mathbf{t}^{(3)\top} = (0 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot (1 \quad 0 \quad 0) = (4 \quad 0 \quad 1),$$

so dass

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)\top} \\ \mathbf{t}^{(2)\top} \\ \mathbf{t}^{(3)\top} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Der Eingangsvektor ist somit

$$\mathbf{b}^* = T^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1er-Niveau

Aufgabe 4

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} z_0 \quad (2)$$

$$y = (0 \quad 1) \mathbf{x}, \quad (3)$$

wobei $z_0 \in \mathbb{R}$ ein unbekannter konstanter Wert ist.

- a) Ist es möglich einen Beobachter zu entwerfen, der asymptotisch den Wert von z_0 rekonstruiert?

Lösung:

Die Hauptidee zur Rekonstruktion von z_0 besteht darin, $x_3(t) = z_0$ als zusätzlichen Zustand zu begreifen dann die Beobachtbarkeit des entsprechend erweiterten Systems zu prüfen.

Wir definieren also zunächst den erweiterten Zustandsvektor

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ z \end{bmatrix}$$

ist.

Damit lässt sich die lineare Systemdynamik des erweiterten Systems folgendermaßen beschreiben

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}u(t) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ 0_{1 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \tilde{\mathbf{c}}^\top \tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{c}^\top \quad 0) \tilde{\mathbf{x}}(t) = (0 \quad 1 \quad 0) \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix des erweiterten Systems lässt sich berechnen zu

$$\tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

welche Rang $3 = n$ besitzt. Somit ist das System beobachtbar und $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ und damit auch z_0 können rekonstruiert werden.

Nun sei ein Luenberger-Beobachter mit asymptotisch stabiler Fehlerdynamik gegeben, welcher den geschätzten Zustand $\hat{\mathbf{x}}$ und die geschätzte Konstante $\hat{z}_0$ ausgibt.

- b) Zeigen Sie, dass das Regelgesetz $u = -\mathbf{k}^\top \hat{\mathbf{x}} - \hat{z}_0$ für beliebige Konstanten z_0 den Zustand $\mathbf{x}$ in den Ursprung überführt, wenn die Matrix $A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ Hurwitz ist.

Lösung: In dieser Teilaufgabe kann das bekannte Separationsprinzip nicht direkt angewendet werden, da $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} - z_0$ den Zustand z_0 nicht stabilisiert. Deshalb muss ein modifiziertes Separationsprinzip explizit hergeleitet werden.

Das Gesamtsystem bestehend aus 2 und Beobachterfehlerdynamik für $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{z}_0$ kann wie folgt aufgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{z}_0 - \dot{\hat{z}}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top \hat{\mathbf{x}} - (\mathbf{b}\mathbf{k}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top \hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{b}\hat{z}_0 + \mathbf{b}z_0 \\ (\tilde{A} - \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{c}}^\top) \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \\ z_0 - \hat{z}_0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top & [\mathbf{b}\mathbf{k}^\top & \mathbf{b}] \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{c}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \\ z_0 - \hat{z}_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Systemmatrix des Gesamtsystems ist blockdiagonal, sodass die Eigenwerte der Diagonalmatrizen die Eigenwerte der Systemmatrix definieren. Da $\tilde{A} - \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{c}}^\top$ und $A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ laut Aufgabenstellung Hurwitz sind, ist die Systemmatrix des Gesamtsystems ebenfalls Hurwitz. Daher überführt der Regler für beliebige konstante Störungen z_0 den Zustand $\mathbf{x}$ in den Ursprung.