

Wochenprogramm **9** mit Lösungsweg: Steuerbarkeit

Bestehensniveau

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Differentialgleichungssysteme auf Steuerbarkeit.

a) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$

Lösung: Das System ist steuerbar.

Lösungsweg: Die Steuerbarkeitsmatrix ist

$$S_0 = (\mathbf{b} \quad A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

S_0 hat also vollen Rang.

b) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$

Lösung: Das System ist nicht steuerbar.

Lösungsweg: Die Steuerbarkeitsmatrix ist

$$S_0 = (\mathbf{b} \quad A\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

S_0 hat nicht vollen Rang.

Anmerkung: Eine Untersuchung der Eigenschaften der Systemmatrix A zeigt jedoch, dass beide Eigenwerte negativ sind. Somit ist das System zwar nicht steuerbar, aber stabilisierbar.

c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$

Lösung: Das System ist nicht steuerbar.

Lösungsweg: Die Steuerbarkeitsmatrix ist

$$S_0 = (\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & * \\ 2 & -4 & * \\ 1 & -2 & * \end{pmatrix}.$$

Die erste und zweite Spalte sind linear abhängig, d.h., S_0 hat nicht vollen Rang.

Hinweis:

Die Spalten der Steuerbarkeitsmatrix $A^i\mathbf{b}$ berechnet man am besten rekursiv: $A^i\mathbf{b} = A(A^{i-1}\mathbf{b})$, d.h. durch eine Multiplikation der vorherigen Spalte mit A und nicht durch Berechnung von A^i .

Standardniveau

Aufgabe 2

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \left(1 \quad -\frac{3}{4} \quad 1\right) \mathbf{x} - \frac{1}{4}u.$$

- a) Bestimmen Sie eine Zustandsrückführung $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$ mit $\mathbf{k}^\top = (k_1 \ k_2 \ k_3) \in \mathbb{R}^3$, so dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\{-1, -2, -3\}$ liegen. Ist Ihre Wahl eindeutig?

Lösung: Zum Beispiel $k_1 = k_2 = 5$ und $k_3 = 0$. Die Wahl ist nicht eindeutig, da k_3 beliebig gewählt werden kann.

Lösungsweg: Aus den gegebenen Polen erhalten wir das Sollpolynom $(s+1)(s+2)(s+3)$. Wenn wir nun das charakteristische Polynom von $A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$ berechnen

$$\det(sI - A + \mathbf{b}\mathbf{k}^\top) = \det \begin{pmatrix} s+k_1 & k_2+1 & k_3 \\ -1 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Laplacescher Entwicklungssatz} \\ \text{entwickeln nach 3. Zeile} \end{array} \right.$$
$$= (s+1) \det \begin{pmatrix} s+k_1 & k_2+1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$$
$$= (s+1)(s^2 + k_1s + k_2 + 1)$$

und das Sollpolynom in die gleiche Form bringen

$$(s+1)(s+2)(s+3) = (s+1)(s^2 + 5s + 6),$$

sehen wir sofort, dass $k_1 = k_2 = 5$ und k_3 beliebig.

- b) Ist das System steuerbar?

Lösung: Nein, da die Steuerbarkeitsmatrix

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

keinen vollen Rang hat.

- c) Überprüfen Sie das System mithilfe des Hautus Tests auf Stabilisierbarkeit.

Lösung: Das System ist stabilisierbar.

Lösungsweg: Aus a) folgt unmittelbar (wenn $k_1 = k_2 = 0$ gesetzt wird), dass das charakteristische Polynom von A durch $(s+1)(s^2+1)$ gegeben ist. Daher ergeben sich die Pole zu $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2/3} = \pm j$. Für den Hautus Test müssen wir somit den Rang von $(\lambda I - A \quad \mathbf{b})$ für $\lambda_{2/3}$ überprüfen.

Wir erhalten für $\lambda_2 = j$

$$(\lambda_2 I - A \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 & 1 \\ -1 & j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & j+1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche offensichtlich Rang $3 = n$ besitzt.

Für $\lambda_3 = -j$ gilt

$$(\lambda_3 I - A \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -j & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -j+1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche ebenfalls Rang $3 = n$ besitzt. Damit ist das System mit dem Hautus Test stabilisierbar.

- d) Was fällt Ihnen beim Vergleich Ihrer Ergebnisse aus a), b) und c) auf? Können Sie die Pole in a) auch beliebig anders wählen, wenn nein warum nicht?

Lösung: Da es uns in a) gelungen ist, eine stabilisierende Zustandsrückführung zu wählen, obwohl das System wie in b) festgestellt nicht steuerbar ist, muss es stabilisierbar sein. Dies wurde in c) auch nochmals mithilfe des Hautus Tests festgestellt.

Da das System nicht steuerbar ist, lassen sich die Systempole nicht beliebig anders wählen. Insbesondere lässt sich der Pol bei -1 nicht verschieben, was aus dem charakteristischen Polynom des geschlossenen Kreises abgelesen werden kann.

Aufgabe 3

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} u, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

- a) Für welche Werte $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ ist das System stabilisierbar, aber nicht steuerbar? Argumentieren Sie anhand des Hautus Tests.

Lösung: Wir bestimmen die Steuerbarkeitsmatrix zu

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Es gilt $\text{rang}(S_0) = 1$, wenn $\beta = -1 - \alpha$ oder wenn $\beta = 0$, d.h. für solche α und β ist das System nicht steuerbar.

Die Eigenwerte von A liegen bei $\lambda_1 = \alpha > 0$, und $\lambda_2 = -1$. Ein Eigenwert ist negativ und ein Eigenwert ist positiv.

Wir wenden den Hautus Test für Stabilisierbarkeit für λ_1 an:

$$(A - \lambda_1 I \quad \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda_1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 - \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

hat nicht vollen Rang für $\beta = -1 - \alpha$. Daher ist das System für solche α und β nicht stabilisierbar.

Da Stabilisierbarkeit gefordert ist, muss $\beta \neq -1 - \alpha$ gelten. Mit $\beta = 0$, welches sich aus der Forderung nach dem Verlust von Steuerbarkeit ergibt, ergibt sich damit die Bedingung $\alpha \neq -1$. Da $\alpha > 0$ ist, stellt diese Bedingung keine weitere Einschränkung dar. Somit ist das System für alle $\alpha > 0, \beta = 0$ stabilisierbar, aber nicht steuerbar.

- b) Bestimmen Sie für jedes stabilisierbare, aber nicht steuerbare System aus Aufgabenteil a) alle stabilisierenden Zustandsrückführungen $u = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}$.

Lösung: Der geschlossene Kreis

$$A - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top = \begin{pmatrix} \alpha - k_1 & 1 - k_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \alpha - k_1$ und $\lambda_2 = -1$. Daher erhalten wir für $\alpha - k_1 < 0 \iff k_1 > \alpha$ und $k_2 \in \mathbb{R}$ stabilisierende Zustandsrückführungen.

1er-Niveau

Aufgabe 4

Gegeben sei das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{b}u. \quad (1)$$

Wir wollen untersuchen, für welche Vektoren $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ es möglich ist, ein Eingangssignal u zu wählen, so dass das System von jeder gegebenen Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ in endlicher Zeit t_e in den Ursprung gesteuert werden kann. Dabei soll u als stückweise konstante Funktion gewählt werden, d.h. für alle $0 < t_1 < t_e$ gilt

$$u(t) = \begin{cases} v & \text{für } 0 \leq t < t_1, \\ w & \text{für } t_1 \leq t \leq t_e. \end{cases} \quad (2)$$

- a) Geben sie die Lösung $\mathbf{x}(t_e)$ für ein allgemeines Eingangssignal sowie für die oben definierte stückweise konstante Funktion u an.

Lösung: Die allgemeine Lösung $\mathbf{x}(t_e)$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_e) &= e^{At_e} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} e^{A(t_e-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \\ &= e^{At_e} \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} e^{-A\tau} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Da A eine Diagonalmatrix ist, können wir e^{At} sofort angeben als

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in den Ausdruck für $\mathbf{x}(t_e)$ ergibt dies

$$\begin{aligned} x_1(t_e) &= e^{t_e} \left(x_{0,1} + \int_0^{t_e} e^{-\tau} b_1 u(\tau) d\tau \right), \\ x_2(t_e) &= e^{2t_e} \left(x_{0,2} + \int_0^{t_e} e^{-2\tau} b_2 u(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Wenn wir noch (2) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1(t_e) &= e^{t_e} \left(x_{0,1} + \int_0^{t_1} e^{-\tau} d\tau b_1 v + \int_{t_1}^{t_e} e^{-\tau} d\tau b_1 w \right), \\ x_2(t_e) &= e^{2t_e} \left(x_{0,2} + \int_0^{t_1} e^{-2\tau} d\tau b_2 v + \int_{t_1}^{t_e} e^{-2\tau} d\tau b_2 w \right). \end{aligned}$$

- b) Es gelte nun $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\mathbf{x}_0$ eine stückweise konstante Funktion u existiert, die das System in endlicher Zeit t_e von $\mathbf{x}_0$ in den Ursprung überführt.

Lösung: Damit $\mathbf{x}(t_e) = 0$ erreicht wird, muss das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^{t_1} e^{-\tau} d\tau & \int_{t_1}^{t_e} e^{-\tau} d\tau \\ \int_0^{t_1} e^{-2\tau} d\tau & \int_{t_1}^{t_e} e^{-2\tau} d\tau \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{0,1} \\ -x_{0,2} \end{pmatrix}$$

erfüllt werden. Dies ist für beliebige $\mathbf{x}_0$ genau dann der Fall, wenn M vollen Rang hat. Dies trifft hier zu.

- c) Nun sei $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass eine entsprechende stückweise konstante Funktion u nicht mehr für beliebige $\mathbf{x}_0$ existiert.

Lösung: Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \int_0^{t_1} e^{-2\tau} d\tau & \int_{t_1}^{t_e} e^{-2\tau} d\tau \end{pmatrix}$$

hat keinen vollen Rang. Alternativ: x_1 wird nicht von u beeinflusst und deswegen kann $x_1(t_e) = 0$ nicht durch u erzwungen werden.

- d) Die Systemmatrix A aus (1) wird nun durch eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ersetzt. Für $\mathbf{b}$ wird ein beliebiger Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ gewählt. Zeigen Sie, dass keine stückweise konstante Funktion u existiert, die das System zum Zeitpunkt t_e in den Ursprung überführt, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{pmatrix}$ keinen vollen Rang hat.

Hinweis: Nach Cayley-Hamilton gilt $e^{At} = \mu_0(t)I + \mu_1(t)A$.

Lösung: An der allgemeinen Lösung erkennt man, dass

$$\int_0^{t_e} e^{-A\tau} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = -\mathbf{x}_0$$

erfüllt werden muss. Mit Cayley-Hamilton und stückweise konstantem u kann man dies umschreiben zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^{t_1} \mu_0(\tau) \mathbf{b} - \mu_1(\tau) A\mathbf{b} d\tau & \int_{t_1}^{t_e} \mu_0(\tau) \mathbf{b} - \mu_1(\tau) A\mathbf{b} d\tau \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{0,1} \\ -x_{0,2} \end{pmatrix}.$$

Mit den Abkürzungen $\alpha = \int_0^{t_1} \mu_0(\tau) d\tau$, $\beta = \int_0^{t_1} \mu_1(\tau) d\tau$, $\gamma = \int_{t_1}^{t_e} \mu_0(\tau) d\tau$, $\delta = \int_{t_1}^{t_e} \mu_1(\tau) d\tau$ folgt

$$M = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{b} - \beta A\mathbf{b} & \gamma \mathbf{b} - \delta A\mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ -\beta & -\delta \end{pmatrix}.$$

Falls $\begin{pmatrix} \mathbf{b} & A\mathbf{b} \end{pmatrix}$ keinen vollen Rang hat, dann hat auch M keinen vollen Rang und es existiert nicht für alle $\mathbf{x}_0$ eine entsprechende stückweise konstante Funktion u .

Aufgabe 5

Ein weiteres Kriterium, um die Steuerbarkeit eines Systems $(A, \mathbf{b})$ zu überprüfen, ist das Folgende: $(A, \mathbf{b})$ ist genau dann steuerbar, wenn gilt: $\mathbf{q}^T A = \lambda \mathbf{q}^T \Rightarrow \mathbf{q}^T \mathbf{b} \neq 0$, d.h., ein System $(A, \mathbf{b})$ ist genau dann steuerbar, wenn kein Linkseigenvektor von A senkrecht auf $\mathbf{b}$ steht.

In dieser Aufgabe soll nun eine Richtung dieser Aussage bewiesen werden, nämlich dass $(A, \mathbf{b})$ nicht steuerbar ist, falls ein Linkseigenvektor $\mathbf{q}^T$ von A existiert, so dass gilt $\mathbf{q}^T \mathbf{b} = 0$. Zeigen sie dazu, dass die Steuerbarkeitsmatrix $S_0 = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b})$ in diesem Fall keinen vollen Rang hat.

Lösung: Sei $\mathbf{q}^T \neq 0$ ein Linkseigenvektor von A und sei $\mathbf{q}^T \mathbf{b} = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^T A &= \lambda \mathbf{q}^T \Rightarrow \mathbf{q}^T A \mathbf{b} = \lambda \mathbf{q}^T \mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{q}^T A^2 &= \lambda \underbrace{\mathbf{q}^T A}_{=\lambda \mathbf{q}^T} = \lambda^2 \mathbf{q}^T \Rightarrow \mathbf{q}^T A^2 \mathbf{b} = \lambda^2 \mathbf{q}^T \mathbf{b} = 0. \\ &\text{usw...}\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck $\mathbf{q}^T S_0$. Für dessen Elemente ergibt sich also

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^T \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{q}^T A \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{q}^T A^2 \mathbf{b} &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{q}^T A^{n-1} \mathbf{b} &= 0.\end{aligned}$$

D.h., $\mathbf{q}^T S_0 = \mathbf{q}^T (\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b} \quad \dots \quad A^{n-1}\mathbf{b}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$. Es existiert also eine Linearkombination der Zeilen von S_0 die den Nullvektor ergibt. D.h., die Zeilen von S_0 sind nicht linear unabhängig, weshalb S_0 nicht vollen Rang hat.